Corrigé de devoir non surveillé

Formules pour tangente et tangente hyperbolique

Problème – Formules pour tangente et tangente hyperbolique

Partie A – Formules pour tangente

A.1

a Observons déjà que $|1+i\alpha| = \sqrt{1+\alpha^2}$. Notons $\beta = \arctan(\alpha)$. Par définition de la fonction arctangente, on a $\beta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, d'où $\cos(\beta) > 0$. En outre, $\cos^2(\beta) = \dfrac{1}{1+\tan^2(\beta)} = \dfrac{1}{1+\alpha^2}$. On a donc $\cos(\beta) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$. Comme $\sin(\beta) = \tan(\beta)\cos(\beta)$, on a $\sin(\beta) = \dfrac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$. Ainsi,

$$1 + i\alpha = \sqrt{1+\alpha^2}\, e^{i\beta},$$

donc $\boxed{\beta = \arctan(\alpha) \text{ est un argument de } 1+i\alpha.}$

Si $\lambda > 0$, un argument de $\lambda(1+i\alpha)$ est $\boxed{\arctan(\alpha),}$ et si $\lambda < 0$, un argument de $\lambda(1+i\alpha)$ est $\boxed{\arctan(\alpha)+\pi.}$

b En écrivant $z = \mathrm{Re}(z)\left(1 + i\dfrac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right)$ (ce que l'on peut faire puisque z n'est pas imaginaire pur), et en appliquant le résultat obtenu précédemment, on en déduit qu'un argument de z est $\boxed{\arctan\left(\dfrac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right)}$ si $\mathrm{Re}(z) > 0$, $\boxed{\arctan\left(\dfrac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right)+\pi}$ si $\mathrm{Re}(z) < 0$.

A.2

a Un argument de $(1+i\tan(\theta))$ est $\arctan(\tan(\theta))$ (qui est congru à θ modulo π, mais que l'on se gardera de simplifier en θ ...), donc un argument de $(1+i\tan(\theta))^n$ est $\boxed{n\arctan(\tan(\theta)).}$

On suppose $(1+i\tan(\theta))^n = P_n(\tan(\theta))$ non imaginaire pur.

D'après A.1.b, un argument de $(1+i\tan(\theta))^n$ est $\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(P_n(\tan(\theta)))}{\mathrm{Re}(P_n(\tan(\theta)))}\right)$ ou $\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(P_n(\tan(\theta)))}{\mathrm{Re}(P_n(\tan(\theta)))}\right)+\pi$.

En égalant les tangentes des arguments trouvés (et sachant que la fonction tangente est π-périodique), il vient

$$\boxed{\tan(n\theta) = \frac{\mathrm{Im}(P_n(\tan(\theta)))}{\mathrm{Re}(P_n(\tan(\theta)))},}$$

pour tout réel θ tel que $\tan(\theta)$ et $\tan(n\theta)$ soient bien définis.

b Supposons $\tan(\varphi)$ et $F_n(\tan(\varphi))$ bien définis. Il s'agit de montrer que $\tan(n\varphi)$ est bien défini. Or $(1+i\tan(\varphi))^n$ n'est pas imaginaire pur (puisque $F_n(\tan(\varphi))$ est bien défini), donc son argument $n\arctan(\tan(\varphi))$ n'est pas congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π, puis $n\varphi$ n'est pas congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π ($\arctan(\tan(\varphi))$ et φ sont congrus modulo π) : $\tan(n\varphi)$ est bien défini. D'après la question précédente, $\boxed{F_n(\tan(\varphi)) = \tan(n\varphi).}$

c $P_5(X) = (1+iX)^5 = 1 - 10X^2 + 5X^4 + i(5X - 10X^3 + X^5)$. Les racines de $1 - 10Y + 5Y^2$ sont $1 \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$. L'ensemble de définition de F_5 est donc $\boxed{\mathbb{R} \setminus \left\{\pm\sqrt{1 \pm \tfrac{2}{\sqrt{5}}}\right\}.}$ C'est aussi l'ensemble des réels de la forme $\tan(\varphi)$, pour lesquels $\tan(\varphi)$ et $\tan(n\varphi)$ sont bien définis. C'est donc $\boxed{\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\tan(\tfrac{\pi}{10}), \pm\tan(\tfrac{3\pi}{10}\right\}}$.

$\tan(\frac{\pi}{10})$ est la plus petite racine positive de $1 - 10X^2 + 5X^4$, ainsi :

$$\boxed{\tan(\frac{\pi}{10}) = \sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{5}}}.}$$

De plus, pour tout point x du domaine de définition de F_5 :

$$\boxed{F_5(x) = \frac{x(5 - 10x^2 + x^4)}{1 - 10x^2 + 5x^4}.}$$

Partie B – Formule pour tangente hyperbolique

B.1 L'image de th étant $]-1, 1[$, les nombres considérés sont strictement positifs, et on peut donc en prendre le logarithme :

$$\ln\left(\left(\frac{1 + \mathrm{th}(x)}{1 - \mathrm{th}(x)}\right)^n\right) = n \ln\left(\frac{1 + \mathrm{th}(x)}{1 - \mathrm{th}(x)}\right) = 2\, n\ \mathrm{argth}(\mathrm{th}(x)) = nx$$

et

$$\ln\left(\frac{1 + \mathrm{th}(nx)}{1 - \mathrm{th}(nx)}\right) = 2\ \mathrm{argth}(\mathrm{th}(nx)) = 2nx$$

La fonction logarithme étant injective, on a bien : $\boxed{\left(\frac{1 + \mathrm{th}(nx)}{1 - \mathrm{th}(nx)}\right) = \left(\frac{1 + \mathrm{th}(x)}{1 - \mathrm{th}(x)}\right)^n.}$

B.2 D'après la question précédente, on a, pour tout réel x :

$$(*) \quad \mathrm{th}(nx) = \frac{y_n(x) - 1}{y_n(x) + 1},$$

où l'on a posé $y_n(x) = \left(\frac{1+\mathrm{th}(x)}{1-\mathrm{th}(x)}\right)^n$. En multipliant numérateur et dénominateur du membre de droite de $(*)$ par le réel non nul $(1 - \mathrm{th}(x))^n$, on constate que

$$\boxed{\mathrm{th}(nx) = \frac{\mathcal{I}(Q_n)(\mathrm{th}(x))}{\mathcal{P}(Q_n)(\mathrm{th}(x))},}$$

où $\boxed{Q_n = (1 + X)^n}$ est un polynôme de degré n.