Devoir non surveillé

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel.

Partie A – Recherche d'un équivalent

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, non nulle en 1. On pose

$$\gamma_n = \int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x.$$

A.1 Montrer que $|f|$ est majorée sur $[0,1]$. On fixe un majorant M de $|f|$ sur $[0,1]$.

A.2 Montrer que $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

A.3 Montrer que f est lipschitzienne sur $[0,1]$. On fixe $K>0$ tel que f soit K-lipschitzienne.

A.4 Montrer que $\left|\gamma_n - \frac{f(1)}{n+1}\right| \leqslant \frac{K}{(n+1)(n+2)}$.

Indication : on pourra remarquer que $f(1)/(n+1) = \int_0^1 f(1)x^n\mathrm{d}x$.

A.5 En déduire que $\gamma_n \sim f(1)/n$.

Partie B – Convergence de deux suites vers $\pi/4$

B.1 On note $\alpha_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$. Montrer que : $\quad \alpha_n = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

Indication : on pourra noter que $(-1)^k/(2k+1) = \int_0^1 (-x^2)^k\mathrm{d}x$.

B.2 En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\pi/4$, et trouver un équivalent simple de $\alpha_n - \pi/4$ lorsque n tend vers ∞.

On pose

$$b_n = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1-x^2}{2}\right)^n \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \beta_n = \sum_{k=0}^{n} b_k.$$

B.3 Montrer que (β_n) converge vers $\pi/4$, avec une vitesse au pire géométrique, dans le sens où il existe $K>0$ et $r \in [0,1[$ (indépendants de n) tels que

$$|\beta_n - \pi/4| \leqslant K r^n.$$

B.4 De (α_n) et (β_n), qui converge asymptotiquement le plus vite vers $\pi/4$?

Partie C – Transformée d'Euler d'une suite

On désigne par E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbb{C}$. Si u est une telle suite, on note u_n son terme d'indice n. On note I l'application identité de E.

C.1 Montrer que l'on définit un endomorphisme T de E en posant :

$$\forall\, u \in E, \quad T(u) = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, le n-ième terme de la suite $T(u)$ vérifie : $(T(u))_n = u_{n+1}$.

C.2 Cet endomorphisme est-il injectif ? surjectif ?

On considère également l'endomorphisme L de E défini par $L = I + T$. Enfin, on rappelle que pour tout endomorphisme F de E, on définit par récurrence l'endomorphisme itéré F^k par $F^0 = I$ et pour tout entier naturel k non nul, $F^k = F \circ F^{k-1}$.

C.3 Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

C.4 Après avoir justifié avec soin les hypothèses de son application, utiliser la formule du binôme pour calculer $L^n = (I+T)^n$.

C.5 En déduire, pour $u \in E$, l'égalité :

$$(L^n(u))_0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k,$$

où $(L^n(u))_0$ désigne le terme d'indice 0 de la suite $L^n(u)$.

C.6 Soit u une suite dans E admettant une limite l.

a Vérifier que

$$\frac{1}{2^n}(L^n(u))_0 - l = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(u_k - l)$$

Soit N un entier naturel. Pour tout entier naturel $n > N$, on pose :

$$S_N(n) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N} \binom{n}{k}(u_k - l) \quad \text{et} \quad T_N(n) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=N+1}^{n} \binom{n}{k}(u_k - l).$$

b Montrer que :

$$|T_N(n)| \leqslant \sup\{|u_k - l|, k \in [\![N+1, n]\!]\}.$$

On pose $P_N(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!}$ pour $x \in \mathbb{C}$.

c Montrer que :

$$|S_N(n)| \leqslant \frac{1}{2^n} P_N(n) \sup\{|u_k - l|, k \in [\![0, N]\!]\}.$$

d Justifier que

$$\lim_{n\to+\infty} S_N(n) = 0.$$

e Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}(L^n(u))_0 = l.$$

C.7 Soit $u \in E$. On définit une suite s par : $s_0 = 0$, et $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k$ si $n \geqslant 1$. On définit également une suite S par $S_n = \displaystyle\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s_k$.

a Montrer, pour tout entier naturel n, l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} s_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s_k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s_{k+1}.$$

b En déduire, pour tout entier naturel n, que :

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{2^{n+1}} (L^n(u))_0.$$

Indication : on pourra noter que $s_{k+1} = s_k + u_k$.

c On suppose que la suite de terme général $\sum_{k=0}^{n} u_k$ converge vers un complexe l. La *transformée d'Euler* de cette suite est la suite de terme général $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} (L^k(u))_0$. Montrer que cette transformée d'Euler converge vers l.

C.8 Montrer que (β_n) est la transformée d'Euler de (α_n).