Corrigé de devoir non surveillé

Partie A – Recherche d'un équivalent

A.1 $|f|$ est majorée sur $[0,1]$ car f est continue – donc bornée – sur le segment $[0,1]$.

A.2 $|\gamma_n| = \left|\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 x^n|f(x)|\mathrm{d}x \leqslant M\int_0^1 x^n\mathrm{d}x = \frac{M}{n+1}$. Comme $M/(n+1)$ tend vers 0 lorsque n tend vers ∞, $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge bien vers 0.

A.3 f' est bornée sur $[0,1]$, car continue sur ce segment. L'inégalité des accroissements finis montre alors que f est lipschitzienne sur $[0,1]$.

A.4

$$\left|\gamma_n - \frac{f(1)}{n+1}\right| = \left|\int_0^1 x^n(f(x)-f(1))\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 |x^n(f(x)-f(1))|\,\mathrm{d}x \leqslant K\int_0^1 x^n(1-x)\mathrm{d}x = \frac{K}{(n+1)(n+2)},$$

donc $\left|\gamma_n - \frac{f(1)}{n+1}\right| \leqslant \frac{K}{(n+1)(n+2)}$.

A.5 Clairement, $\gamma_n = f(1)/(n+1) + \mathrm{O}(1/(n+1)^2)$, d'où, puisque $f(1)\neq 0$,

$$\gamma_n \sim \frac{f(1)}{n+1} \sim \frac{f(1)}{n}.$$

Partie B – Convergence de deux suites vers $\pi/4$

B.1 Par linéarité de l'intégrale, et grâce à l'observation de l'énoncé,

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{n}\int_0^1 (-x^2)^k\mathrm{d}x = \int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n}(-x^2)^k\right)\mathrm{d}x$$

puis, $-x^2$ ne prenant pas la valeur 1 si $x\in[0,1]$:

$$\alpha_n = \int_0^1 \frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1-(-x^2)}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}\mathrm{d}x,$$

car $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = [\arctan(x)]_0^1 = \pi/4$.

B.2 D'après A.5 (applicable car $x\mapsto 1/(1+x^2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$), on a

$$\alpha_n - \pi/4 \sim \frac{(-1)^n}{2(2n+2)} \sim \frac{(-1)^n}{4n}.$$

En particulier, (α_n) converge bien vers $\pi/4$.

B.3 On a, comme en B.1,

$$\beta_n = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1-\left(\frac{1-x^2}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1-x^2}{2}\right)}\mathrm{d}x = \pi/4 - \int_0^1 \frac{\left(\frac{1-x^2}{2}\right)^{n+1}}{1+x^2}\mathrm{d}x,$$

donc (puisque $0\leqslant(1-x^2)/2\leqslant 1/2$ et $0\leqslant 1/(1+x^2)\leqslant 1$ si $x\in[0,1]$)

$$|\beta_n - \pi/4| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}.$$

La suite (β_n) converge bien vers $\pi/4$ avec une vitesse au pire géométrique.

B.4 $\beta_n - \pi/4 = \mathrm{o}(\alpha_n - \pi/4)$ (une suite dominée par une suite géométrique de raison $1/2$ est négligeable devant une suite équivalente à $(-1)^n/(4n)$) donc (β_n) converge plus rapidement vers $\pi/4$ que (α_n).

Partie C – Transformée d'Euler d'une suite

C.1 Pour toutes suites u et v de E, tous scalaires λ et μ,

$$(T(\lambda u+\mu v))_n=(\lambda u+\mu v)_{n+1}=\lambda u_{n+1}+\mu v_{n+1}=(\lambda T(u)+\mu T(v))_n,$$

donc T est bien un endomorphisme de E.
Remarque : on pouvait aussi observer que T est la composition à droite par $n\mapsto n+1$, donc linéaire (la composition à droite par un élément fixé est linéaire, c'est la composition à gauche qui ne l'est généralement pas [1]).

C.2 Cet endomorphisme T n'est pas injectif, car la suite non nulle $(1,0,0,0,\dots)$ appartient à son noyau. Il est cependant surjectif car pour toute suite u, la suite $(0,u_0,u_1,u_2,\dots)$ est un antécédent de u par T.

C.3 D'après la formule du binôme de Newton dans le corps (commutatif) $\mathbb{R}$,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k}=(1+1)^n=2^n$$

C.4 Les endomorphismes I et T commutent ($I\circ T=T\circ I=T$) : on peut appliquer la formule du binôme dans l'anneau $\mathcal{L}(E)$ pour écrire

$$L^n=(I+T)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}T^kI^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}T^k.$$

C.5 D'après la question précédente,

$$(L^n(u))_0=\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}T^k(u)\right)_0=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_k.$$

C.6

a La relation

$$\frac{1}{2^n}(L^n(u))_0-l=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(u_k-l)$$

est une conséquence évidente de C.3 et de C.5.

b Notons $\xi=\sup\{|u_k-l|,k\in[\![N+1,n]\!]\}$. On a

$$|T_N(n)|\leqslant\frac{1}{2^n}\sum_{k=N+1}^{n}\binom{n}{k}|u_k-l|\leqslant\frac{\xi}{2^n}\sum_{k=N+1}^{n}\binom{n}{k}\leqslant\frac{\xi}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\xi.$$

c Il est clair que pour tout $k\in[\![0,n]\!]$,

$$\frac{n!}{(n-k)!}=\prod_{j=n-k+1}^{n}j\leqslant\prod_{j=n-k+1}^{n}n=n^k,$$

et donc que $\binom{n}{k}\leqslant\frac{n^k}{k!}$. On a ainsi :

$$|S_N(n)|\leqslant\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}|u_k-l|\leqslant\frac{1}{2^n}P_N(n)\sup\{|u_k-l|,k\in[\![0,N]\!]\}.$$

d $P_N(n)\sim n^N/N!$, et $n^N/N!=\mathrm{o}(2^n)$ (pour N fixé), donc

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}P_N(n)=0,$$

puis, la suite $u-l$ étant bornée (car convergente),

$$\lim_{n\to+\infty}S_N(n)=0.$$

1. exception notable : la composition à gauche dans les espaces d'applications linéaires

e Fixons $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. On choisit N tel que, pour tout $n \geqslant N$, $|u_n - l| \leqslant \varepsilon/2$.

Pour $n > N$, on a alors $|T_N(n)| \leqslant \varepsilon/2$ (cf. C.6.b). D'après C.6.c, il existe un entier $N' \geqslant N$ tel que, pour tout $n \geqslant N'$, $|S_N(n)| \leqslant \varepsilon/2$.

Pour tout $n > N'$, on a

$$\left|\frac{1}{2^n}(L^n(u))_0 - l\right| = |S_N(n) + T_N(n)| \leqslant |S_N(n)| + |T_N(n)| \leqslant \varepsilon.$$

Il vient bien

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n}(L^n(u))_0 = l.$$

C.7

a On rappelle la formule du triangle de Pascal : pour tout $k \in [\![0, n+1]\!]$,

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1},$$

(où l'on a posé $\binom{n}{n+1} = 0$ et $\binom{n}{-1} = 0$).

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}s_k = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k}s_k + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k-1}s_k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}s_k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}s_k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}s_k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}s_{k+1}.$$

b On observe d'abord que

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}s_{k+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(s_k + u_k) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}s_k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}s_k + (L^n(u))_0.$$

Dès lors, en divisant par 2^{n+1} la relation trouvée en C.7.a, on obtient bien

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{2^{n+1}}(L^n(u))_0.$$

c D'après la question précédente, on a

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^{k+1}}(L^k(u))_0 = \sum_{k=0}^{n}(S_{k+1} - S_k) = S_{n+1} - S_0 = S_{n+1}.$$

La suite (S_n) convergeant vers l d'après C.6.e, la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^{k+1}}(L^k(u))_0$ converge bien vers l.

C.8 Pour tout entier naturel k,

$$b_k = \frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1-x^2}{2}\right)^k \mathrm{d}x = \frac{1}{2^{k+1}}\int_0^1\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-x^2)^j \mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2^{k+1}}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(-1)^j}{2j+1}.$$

On a bien $b_k = \frac{1}{2^{k+1}}(L^k(a))_0$: (β_n) est la transformée d'Euler de (α_n).