Corrigé de devoir non surveillé

Partie A – La règle et le compas

A.1 La bissection ne pose aucun problème particulier : pour couper un angle XOY en deux angles égaux, on prend son compas, on trace un cercle (de rayon r non nul) de centre O, qui coupe (OX) et (OY) en A et B respectivement. Des points A et B, on trace des cercles de rayon r, qui se coupent en I. La droite (OI), diagonale du losange $OAIB$, permet de couper XOY en deux angles égaux.

A.2 Considérons deux axes perpendiculaires (OX) et (OY). Pour trisecter l'angle droit XOY, on se rappelle que $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ et que $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$. Il suffit donc de tracer un cercle de centre O et de rayon donné (par exemple 1), de tracer les cercles de mêmes rayons et de centres A et B (en rouge). Les intersections trouvées permettent de trisecter l'angle droit (en vert).

Partie B – La trisectrice de Mac-Laurin

B.1 $\mathcal{D}_\theta$ admet pour équation

$$\begin{vmatrix} x & \cos(\theta) \\ y & \sin(\theta) \end{vmatrix} = 0,$$

soit : $\boxed{x\sin(\theta) - y\cos(\theta) = 0.}$

$\Delta_{3\theta}$ admet pour équation

$$\begin{vmatrix} x-2 & \cos(3\theta) \\ y & \sin(3\theta) \end{vmatrix} = 0,$$

soit : $\boxed{x\sin(3\theta) - y\cos(3\theta) = 2\sin(3\theta).}$

B.2 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. $\mathcal{D}_\theta$ et $\Delta_{3\theta}$ sont sécantes si et seulement si

$$\begin{vmatrix} \cos(\theta) & \cos(3\theta) \\ \sin(\theta) & \sin(3\theta) \end{vmatrix} \neq 0,$$

soit $\sin(2\theta) \neq 0$, soit enfin $\boxed{\theta \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}.}$

Dans un tel cas, nous pouvons poser $t = \tan(\theta)$.

Vérifions que le point de coordonnées

$$x = \frac{3-t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad y = tx = t\frac{3-t^2}{1+t^2},$$

satisfait $x\sin(\theta) - y\cos(\theta) = 0$ et $x\sin(3\theta) - y\cos(3\theta) = 2\sin(3\theta)$. On remarque déjà que $xt - y = 0$ et donc que ce point appartient à $\mathcal{D}_\theta$.

Si $\tan(3\theta)$ est défini, alors $\tan(3\theta) = \frac{t(3-t^2)}{1-3t^2}$. On a :

$$x\tan(3\theta) - y = x\left(\frac{t(3-t^2)}{1-3t^2} - t\right) = tx\frac{2+2t^2}{1-3t^2} = 2t\frac{3-t^2}{1-3t^2} = 2\tan(3\theta)$$

donc le point considéré est bien le point d'intersection de $\mathcal{D}_\theta$ et de $\Delta_{3\theta}$.

Si $\tan(3\theta)$ n'est pas défini, alors le point cherché est le point de $\mathcal{D}_\theta$ d'abscisse 2. De plus $\theta \in \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}$. Dans ces conditions, comme $\tan(\theta)$ est bien défini, on doit avoir $t = \tan(\theta) = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. On vérifie aisément que $\frac{3-t^2}{1+t^2}$ vaut 2 lorsque $t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$: les formules fonctionnent encore.

Dans tous les cas, le $\boxed{\text{point de coordonnées } x = \frac{3-t^2}{1+t^2} \text{ et } y = tx = t\frac{3-t^2}{1+t^2}}$ est bien le point d'intersection de $\mathcal{D}_\theta$ et de $\Delta_{3\theta}$.

B.3

a L'arc f est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine $\mathbb{R}$. De plus, sa première (resp. seconde) fonction coordonnée est paire (resp. impaire). Il suffit donc d'étudier f sur $\mathbb{R}_+$ (une fois le support de $(\mathbb{R}_+, f)$ tracé, on lui adjoindra son symétrique par rapport à l'axe des abscisses pour obtenir le support de l'arc f sur $\mathbb{R}$).

b Pour tout réel t, on a :

$$x'(t) = \frac{-8t}{(1+t^2)^2} \quad \text{et} \quad y'(t) = \frac{-t^4 - 6t^2 + 3}{(1+t^2)^2}.$$

En particulier, l'arc est régulier (y' ne s'annule pas à l'instant 0, tandis que x' ne s'annule qu'à l'instant 0).

Le polynôme $-X^2 - 6X + 3$ est de racines $-3 + \sqrt{12}$ et $-3 - \sqrt{12}$, donc $-m^2 - 6m + 3$ est positif ou nul si $0 \leqslant m \leqslant \sqrt{12} - 3$, négatif ou nul si $m \geqslant \sqrt{12} - 3$.

On déduit facilement de tout ceci les variations des fonctions coordonnées.

c L'arc présente une branche infinie au voisinage de $+\infty$, que l'on détermine facilement : la courbe présente en $+\infty$ une asymptote d'équation $x = -1$, l'arc est à droite de son asymptote, et $\lim_{+\infty} y = -\infty$.

d Soit t_0 et t_1 deux instants en lesquels on se retrouve en un même point physique. Si $x(t_1) = x(t_0) \neq 0$, alors $t_1 = \frac{y(t_1)}{x(t_1)} = \frac{y(t_0)}{x(t_0)} = t_0$. L'unique point multiple éventuel est donc d'abscisse nulle : ce ne peut être que l'origine. Comme le point mobile se retrouve sur l'origine si et seulement si $t \in \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$, l'origine est l'unique point multiple de l'arc, et c'est un point double.

La tangente en $M(\sqrt{3})$ est dirigée par $f'(\sqrt{3})$, donc par $(1, \sqrt{3})$. La tangente en $M(-\sqrt{3})$ est dirigée par $(1, -\sqrt{3})$.

e Voir la feuille Maple.

B.4 On trace la droite $\Delta_{\frac{\pi}{3}}$, on détermine son intersection I d'ordonnée positive avec la trisectrice de MacLaurin. L'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}})$ est alors de mesure $\frac{\pi}{9}$: $\boxed{\frac{\pi}{3} \text{ est trisecté.}}$

Partie C – Le folium de Dürer

C.1 Soit t un réel. D'après la formule de Moivre :

$$\cos(3t) + i\sin(3t) = (\cos(t) + i\sin(t))^3 = \cos^3(t) - 3\cos(t)\sin^2(t) + i(3\cos^2(t)\sin(t) - \sin^3(t),$$

dont on déduit les formules annoncées en égalant parties réelles d'une part, parties imaginaires d'autre part : Pour tout réel t : $\boxed{\cos(3t) = 4\cos^3(t) - 3\cos(t) \text{ et } \sin(3t) = 3\sin(t) - 4\sin^3(t).}$

C.2

a Pour tout intervalle réel I, notons Γ_I le support de (I, g).

Pour tout réel t, $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe des abscisses. Ainsi $\Gamma_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ est-il réunion de $\Gamma_{[0, \frac{\pi}{2}]}$ et de son symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

Pour tout réel t, $M(t + \pi)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'origine (les fonctions cosinus et sinus sont π-antipériodiques). Par conséquent, $\Gamma_{[-\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}]}$ est la réunion de $\Gamma_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ et de son symétrique par rapport à l'origine.

Enfin, g est 2π-périodique : son support est donc $\Gamma_{[-\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}]}$.

$\boxed{\text{On peut donc réduire l'étude de l'arc au domaine « utile » } [0, \frac{\pi}{2}].}$

b bien entendu, l'arc g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$g'(t) = (-(\sin(t) + 3\sin(3t)), \cos(t) + 3\cos(3t)) = (2\sin(t)(6\sin^2(t) - 5), 4\cos(t)(3\cos^2(t) - 2).$$

L'arc $([0, \frac{\pi}{2}], g)$ est donc régulier.

c L'arc croise l'axe des abscisses aux instants 0 et $\frac{\pi}{2}$ et ses tangentes y sont respectivement verticale et horizontale. Il croise l'axe des ordonnées aux instants $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$. À l'instant $\frac{\pi}{4}$, la tangente est dirigée par $g'(\frac{\pi}{4})$, donc par $(2, 1)$.

d Voir feuille Maple.

C.3 Pour tout réel t, $g(t) = (2\cos(t)\cos(2t), 2\cos(t)\sin(2t))$, donc

$$\overrightarrow{OM(t)} = 2\cos(t)\vec{u}_{2t}.$$

En posant $\theta = 2t$, on constate que $\boxed{\mathcal{F} \text{ est d'équation polaire : } \quad r = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).}$

C.4 Le cercle $\mathcal{C}$ est d'équation polaire $\rho = 2\cos(\theta - \theta_0)$. On est tenté de prendre le point de $\mathcal{F}$ de paramètre polaire $\frac{2\theta_0}{3}$. Pour cet angle polaire, r vaut $2\cos(\frac{\theta_0}{3})$, et ρ vaut $2\cos(\frac{2}{3}\theta_0 - \theta_0) = 2\cos(\frac{\theta_0}{3})$. Pour ce paramètre, on obtient donc bien un point commun à $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}$. De plus, comme $2\cos(\frac{\theta_0}{3}) > 0$ ($\theta_0 \in [-\pi,\pi]$), $\overrightarrow{OM}$ est de même sens que $\vec{u}_{\frac{2\theta_0}{3}}$.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{C} \text{ et } \mathcal{F} \text{ ont un point commun } M \text{ vérifiant : } (\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OP}}) \equiv \frac{1}{3}\theta_0\ [2\pi].}$

C.5 On trace le cercle $\mathcal{C}$ lorsque $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$. En considérant ses intersections avec $\mathcal{F}$, on peut trouver le point M de la question précédente, ce qui permet de trisecter $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$ en $\theta_1 = \frac{\pi}{9}$:

Partie D – Utilisation d'une conchoïde

D.1 Voir la feuille Maple. Chaque segment rouge est de longueur 2, et l'extrémité sur $\mathcal{D}$ est envoyée par c sur l'autre extrémité.

D.2 La droite $\mathcal{D}$ est d'équation polaire $r = \frac{a}{\cos(\theta)}$. Soit $M \in \mathcal{D}$, et (r,θ) un système de coordonnées polaires satisfaisant l'équation précédente. Quitte à changer (r,θ) en $(-r,\theta+\pi)$, on peut supposer $r > 0$. Quitte à retrancher un multiple entier de 2π à θ, on peut également supposer $\theta \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

On a : $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_\theta$ et, par définition de M' : $\overrightarrow{MM'} = 2\vec{u}_\theta$. La relation de Chasles donne alors

$$\overrightarrow{OM'} = (r+2)\vec{u}_\theta = \left(\frac{a}{\cos(\theta)} + 2\right)\vec{u}_\theta.$$

Le point $\boxed{M' \text{ appartient bien à l'ensemble } \Omega}$ d'équation polaire :

$$r = \frac{a}{\cos(\theta)} + 2.$$

D.3

a Le domaine de définition de $\varphi : \theta \mapsto \frac{a}{\cos(\theta)} + 2$ est $\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$. De plus φ est 2π-périodique : la conchoïde sera entièrement tracée si on restreint l'étude à $[-\pi,-\frac{\pi}{2}[\cup]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2},\pi]$. De plus, φ est paire. On peut donc étudier φ sur $[0,\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2},\pi]$. Une fois le support correspondant γ tracé, la conchoïde sera obtenue en formant la réunion de γ et de son symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

b Le support est constitué de deux branches, l'une à gauche de $\mathcal{D}$, l'autre à sa droite. Aucun point n'est singulier (r' ne s'annule pas au pôle), le pôle est un point double (obtenu pour les paramètres $\arccos(-a/2)$ et $-\arccos(-a/2)$), et la courbe ne possède pas d'autre point multiple (nonobstant la 2π-périodicité), car si θ_0 et θ_1 diffèrent de π, et si $r(\theta_0) = -r(\theta_1)$, alors on obtient $4 = 0$, ce qui est faux.

Les branches infinies de la courbe admettent $\mathcal{D}$ pour asymptote, car l'abscisse $\varphi(\theta)\cos(\theta)$ tend vers a lorsque θ tend vers $\pm\frac{\pi}{2}$.

c Voir feuille Maple.

D.4

a $\overrightarrow{E'C}$ est colinéaire et de sens opposé à $\overrightarrow{OB}$. Le vecteur $\overrightarrow{E'E}$ est colinéaire et de sens opposé à $\overrightarrow{OE}$, donc : $(\widehat{\overrightarrow{E'C},\overrightarrow{E'E}}) \equiv (\widehat{-\overrightarrow{OB},-\overrightarrow{OE}})\ [2\pi] \equiv (\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OE}})\ [2\pi]$.

$\boxed{(\widehat{\overrightarrow{E'C},\overrightarrow{E'E}}) \text{ est de mesure } \theta_1.}$

Le triangle OFC est isocèle en C, donc $(\widehat{\overrightarrow{FC},\overrightarrow{FO}})$ est de mesure θ_2. Comme $\overrightarrow{FO}$ et $\overrightarrow{FE}$ sont colinéaires et de même sens, $\boxed{(\widehat{\overrightarrow{FC},\overrightarrow{FE}}) \text{ est de mesure } \theta_2.}$

b D'après le théorème de l'angle au centre pour les cercles, et comme F est le centre du cercle circonscrit au triangle (rectangle) $EE'C$, on a : $\theta_2 \equiv 2\theta_1\ [2\pi]$, puis $\boxed{\theta_2 = 2\theta_1.}$

c On a clairement $\theta_0 = \theta_1 + \theta_2$, ce qui donne, avec la question précédente : $\boxed{\theta_1 = \frac{1}{3}\theta_0.}$

D.5 Voir feuille Maple.

D.6 On prend une règle à glissière passant par O, sur laquelle sont fixées une pointe sèche M et une pointe traçante M', telles que $MM' = 2$ et $M \in [OM']$. La pointe sèche décrit $\mathcal{D}$, et la pointe traçante décrira une portion de Ω.

Une autre possibilité est de fixer un $\boxed{\text{pitbull}}$ à un piquet O. Si on balade son chat en le tenant par une laisse de longueur 2, en restant sur une droite $\mathcal{D}$ à distance a du piquet, alors le chat décrira une portion de la branche de conchoïde cherchée.