Devoir non surveillé

Étude de suite implicite *(Mines MP 04)*

1 Soit f et g deux fonctions croissantes et positives sur un intervalle I. Montrer que fg est croissante. Si f et g sont en outre strictement croissantes, fg est-elle strictement croissante ?

2 Montrer que pour tout entier naturel non nul n, l'équation

$$nx^{n+1} - (n+1)x^n = 1$$

possède une unique solution x_n sur $\mathbb{R}_+$, et que $1 + \frac{1}{n} \leqslant x_n \leqslant 1 + \frac{2}{n}$. Qu'en déduire sur la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
Indication : on pourra étudier la fonction $x \mapsto nx^{n+1} - (n+1)x^n$ sur $[0, 1 + \frac{1}{n}]$ et sur $[1 + \frac{1}{n}, +\infty[$.

3 Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, la suite $\left(\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n\right)$ converge, et déterminer sa limite.

4 Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, la suite de terme général $n\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^{n+1} - (n+1)\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n$ converge, et déterminer sa limite.

5 Montrer que l'équation $e^x(x-1) = 1$ possède une unique solution réelle α, et que $\alpha \in]1, 2[$.

6 ♡ Montrer que pour tout $\varepsilon \in]0, \alpha - 1[$, on a

$$1 + \frac{\alpha - \varepsilon}{n} \leqslant x_n \leqslant 1 + \frac{\alpha + \varepsilon}{n}$$

à partir d'un certain rang.

7 Montrer que $x_n = 1 + \frac{\alpha}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.