Corrigé de devoir non surveillé

Étude de suite implicite *(Mines MP 04)*

1 Soit x et y deux points de I, $x \leqslant y$. On a $0 \leqslant f(x) \leqslant f(y)$ et $0 \leqslant g(x) \leqslant g(y)$, donc : $0 \leqslant f(x)g(x) \leqslant f(y)g(x)$ et $0 \leqslant f(y)g(x) \leqslant f(y)g(y)$, en multipliant les deux systèmes d'inéquations précédents par les réels positifs $g(x)$ et $f(y)$ respectivement. Il vient $0 \leqslant f(x)g(x) \leqslant f(y)g(y)$.

$\boxed{\text{Ainsi la fonction } fg \text{ est-elle croissante.}}$

Si f et g sont en outre supposées strictement croissantes, alors, en reprenant le calcul précédent avec $x < y$, on a $0 \leqslant f(y)g(x) < f(y)g(y)$, car $f(y) > f(x) \geqslant 0$ et $0 \leqslant g(x) < g(y)$. On a donc $0 \leqslant f(x)g(x) < f(y)g(y)$: $\boxed{\text{la fonction } fg \text{ est strictement croissante.}}$

2 La fonction $\varphi_n : x \mapsto nx^{n+1} - (n+1)x^n = x^n(nx - (n+1))$ est négative sur $[0, 1 + \frac{1}{n}]$, et strictement croissante sur $[1+\frac{1}{n}, +\infty[$, car produit des fonctions $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto nx-(n+1)$, strictement croissantes ($n \neq 0$) et positives sur cet intervalle : 1 admet donc au plus un antécédent par φ_n.

Comme $\varphi(1+\frac{1}{n}) = 0$ et $\varphi(1+\frac{2}{n}) = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n > 1$, et que φ_n est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, le théorème des valeurs intermédiaires atteste l'existence d'un réel x_n, compris entre $1+\frac{1}{n}$ et $1+\frac{2}{n}$, tel que $\varphi_n(x_n) = 1$.

$\boxed{\text{L'équation } nx^{n+1} - (n+1)x^n = 1 \text{ possède une unique solution } x_n \text{ sur } \mathbb{R}_+, \text{ et } 1+\frac{1}{n} \leqslant x_n \leqslant 1+\frac{2}{n}.}$

Prise en étau entre deux suites de limite 1, $\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ converge vers } 1}$ (principe des gendarmes).

3 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{n\ln(1+\frac{\lambda}{n})}$. Le rappel permet d'affirmer que $\lim\limits_n \frac{\ln(1+\frac{\lambda}{n})}{\frac{\lambda}{n}} = 1$ ($\lambda \neq 0$ par hypothèse), et donc que $n\ln(1+\frac{\lambda}{n})$ tend vers λ lorsque n tend vers $+\infty$. Par continuité de la fonction exponentielle en λ, on peut affirmer que $\boxed{\text{la suite } \left(\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } e^\lambda.}$

4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$n\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^{n+1} - (n+1)\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^n = \left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(n\left(1+\frac{\lambda}{n}\right) - (n+1)\right) = (\lambda-1)\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^n,$$

donc $\boxed{\text{la suite de terme général } n\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^{n+1} - (n+1)\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^n \text{ converge vers } e^\lambda(\lambda-1).}$

5 La fonction $\psi : x \mapsto e^x(x-1)$ est négative sur $]-\infty, 1]$, et strictement croissante sur $[1, +\infty[$ (car la fonction exponentielle et $x \mapsto x-1$ sont positives et strictement croissantes sur cet intervalle) : l'équation $e^x(x-1) = 1$ possède au plus une solution réelle.

Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction continue ψ entre 1 et 2 permet d'affirmer que l'équation $e^x(x-1) = 1$ admet une solution α dans l'intervalle $]1,2[$ ($\psi(2) = e^2 > 1$ car $e > 1$, par stricte croissance de l'exponentielle).

$\boxed{\text{L'équation } e^x(x-1) = 1 \text{ possède une unique solution réelle } \alpha, \text{ et } \alpha \in]1,2[.}$

6 Soit $\varepsilon \in]0, \alpha-1[$, de sorte que $1 < \alpha-\varepsilon < \alpha < \alpha+\varepsilon$, et donc que

$$\psi(\alpha-\varepsilon) < \psi(\alpha) = 1 < \psi(\alpha+\varepsilon)$$

La question **??** montre que $\lim\limits_n(\varphi_n(1+\frac{\alpha-\varepsilon}{n})) = \psi(\alpha-\varepsilon)$ et $\lim\limits_n(\varphi_n(1+\frac{\alpha+\varepsilon}{n})) = \psi(\alpha+\varepsilon)$. Il existe donc un rang à partir duquel $\varphi_n(1+\frac{\alpha-\varepsilon}{n}) < 1 = \varphi_n(x_n)$ et $\varphi_n(1+\frac{\alpha+\varepsilon}{n}) > 1 = \varphi_n(x_n)$ Comme φ_n est strictement croissante sur $[1+\frac{1}{n}, +\infty[$ et $\alpha-\varepsilon > 1$, on en déduit que

$$1 + \frac{\alpha-\varepsilon}{n} \leqslant x_n \leqslant 1 + \frac{\alpha+\varepsilon}{n}$$

à partir d'un certain rang.

7 La question précédente montre que pour tout $\varepsilon \in]0, \alpha-1[$, il existe un rang à partir duquel

$$n\left|x_n - 1 - \frac{\alpha}{n}\right| \leqslant \varepsilon,$$

autrement dit, $\lim\limits_n n\left(x_n - 1 - \frac{\alpha}{n}\right) = 0$, *i.e.* $\boxed{x_n = 1 + \frac{\alpha}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).}$