Corrigé de devoir non surveillé

Quelques résultats sur l'uniforme continuité

1

a Soit f une application uniformément continue sur I. Soit ε un réel strictement positif. Comme f est supposée uniformément continue sur I, il existe un réel strictement positif η tel que, pour tous points x et y de I vérifiant $|y-x| \leqslant \eta$, on ait $|f(y)-f(x)| \leqslant \varepsilon$.

Considérons deux suites (x_n) et (y_n) d'éléments de I, telles que $\lim_n (y_n - x_n) = 0$. Il existe un entier N tel que, pour tout entier naturel $n \geqslant N$, on ait $|y_n - x_n| \leqslant \eta$. Pour tout entier $n \geqslant N$, on a donc

$$|f(y_n) - f(x_n)| \leqslant \varepsilon$$

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, $\boxed{\text{la suite de terme général } f(y_n) - f(x_n) \text{ tend donc vers } 0.}$

b Si (x_n) converge, alors sa suite extraite $(x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge également, vers la même limite. Par conséquent, $\lim_n (x_{n+1} - x_n) = 0$. D'après la question précédente, on a : $\lim_n (f(x_{n+1}) - f(x_n)) = 0$.

2 Bien que la suite de terme général $x_n = \frac{1}{n+1}$ tende vers 0, on a $\lim_n g(x_{n+1}) - g(x_n) = 1 \neq 0$: $\boxed{\text{la fonction } g \text{ n'est donc pas unif}}$

De même, en considérant la suite de terme général $y_n = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$, comme $h(y_{n+1}) - h(y_n) = 2(-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on constate que $\boxed{h \text{ n'est pas uniformément continue sur }]0,1]}$.

$\boxed{h \text{ n'est pas prolongeable par continuité en } 0}$ (la suite (y_n) en apporte la preuve).

3

a Soit $c \in [a,b[$. La fonction f est continue sur le segment $[a,c]$, donc y est majorée. Comme elle n'est pas majorée sur $[a,b[$, elle ne peut l'être sur $[c,b[$.

$\boxed{f \text{ n'est pas majorée sur } [c,b[.}$

b On peut construire la suite (x_n) par récurrence. Fixons un entier N, et supposons construits $x_0, \ldots, x_N$ vérifiant les conditions de l'énoncé. La fonction f n'est pas majorée sur $[x_N, b[$ d'après la question précédente : il existe donc un élément x_{N+1} de $[x_N, b[$ tel que $f(x_{N+1}) \geqslant f(x_N) + 1$.

La suite (x_n) ainsi construite est croissante et majorée par b, donc convergente vers un point c de $[a,b]$. La relation $f(x_{n+1}) - f(x_n) \geqslant 1$ force $c = b$ (un problème de continuité en b se poserait dans le cas contraire).

Si f n'est pas majorée, il existe une suite croissante (x_n) d'éléments de $[a,b[$, vérifiant $f(x_{n+1}) - f(x_n) \geqslant 1$ pour tout entier naturel n, et convergeant vers b.

c Si f n'est pas majorée, la question précédente et 1.b montre que f n'est pas uniformément continue sur $[a,b[$. Si f n'est pas minorée, alors $-f$ n'est pas majorée, et donc $-f$ n'est pas uniformément continue sur $[a,b[$: f ne l'est donc pas non plus.

Ceci prouve que si f n'est pas majorée ou n'est pas minorée, alors f n'est pas uniformément continue sur $[a,b[$. Par contraposition, on a le résultat voulu :

$\boxed{\text{Si } f \text{ est uniformément continue sur } [a,b[, \text{ elle y est bornée.}}$

4

a Soit (y_n) une suite d'éléments de $[a,b[$, tendant vers b. La fonction f étant bornée (question précédente), la suite des images $(f(y_n))$ est bornée, et admet donc une suite extraite convergente $(f(y_{\varphi(n)}))$ en vertu du théorème de Bolzano-Weierstrass. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = y_{\varphi(n)}$.

$\boxed{\text{Il existe une suite } (x_n) \text{ d'éléments de } [a,b[, \text{ de limite } b, \text{ dont la suite des images } (f(x_n)) \text{ converge.}}$

b D'après 1.a, pour toute suite (y_n) d'éléments de $[a,b[$ convergeant vers b, la suite $(f(y_n) - f(x_n))$ tend vers 0. Comme $(f(x_n))$ tend vers l, $\boxed{(f(y_n)) \text{ tend également vers } l.}$

c Nous avons trouvé un réel l tel que, pour toute suite y_n d'éléments de $[a,b[$ tendant vers b, la suite des images $(f(y_n))$ tend vers l : c'est l'expression séquentielle du fait que f admette l pour limite en b.

f admet l pour limite en b.