CCP 2010. Option MP. Mathématiques 1.

Corrigé pour serveur UPS par JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

QUELQUES UTILISATIONS DES PROJECTEURS

I. Questions préliminaires.

1. $A^2 = B^2 = 0$ donc $\exp(A) = I + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\exp(B) = I + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\exp(A)\exp(B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

En notant $C = A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ il vient $C^2 = I$ donc $C^{2n} = I$ et $C^{2n+1} = C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\exp(C) = \lim\limits_{N \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{2N+1} \dfrac{C^k}{k!} = \lim\limits_{N \to +\infty} \Big(\Big(\sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{1}{(2k)!} \Big) I + \Big(\sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{1}{(2k+1)!} \Big) C \Big) = \operatorname{ch} 1 I + \operatorname{sh} 1 C = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} 1 & \operatorname{sh} 1 \\ \operatorname{sh} 1 & \operatorname{ch} 1 \end{pmatrix}$ $\square$

2. Une condition suffisante pour que $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ est que A et B commutent (conséquence du produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes et du binôme de Newton pour le calcul de la puisance de la somme de deux éléments qui commutent dans un anneau unitaire). $\square$

II. Un calcul d'exponentielle de matrices à l'aide des projecteurs spectraux : cas diagonalisable.

3. Si $P \in \operatorname{Ker} \phi$ alors P est un polynôme de degré au plus $r-1$ s'annulant en au moins r points deux à deux distincts donc P est le polynôme nul. Ainsi ϕ est une application linéaire injective entre deux espaces de même dimension finie r donc est un isomorphisme. D'où l'existence et l'unicité du polynôme L. $\square$

4.a) Il vient immédiatement que $l_i(\lambda_j) = 0$ si $i \neq j$ et vaut 1 si $i = j$. $\square$

4.b) Ainsi le polynôme $\sum\limits_{i=1}^{r} e^{\lambda_i} l_i(X)$ est-il un polynôme répondant à la question.

Donc il égal à P en vertu de l'unicité d'un tel polynôme. $\square$

5.a) Endomorphisme d'un espace de dimension finie donc continu. On peut aussi remarquer (en notant $\|.\|$ une norme d'algèbre quelconque - toutes équivalentes - sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) que $\|PMP^{-1}\| \leqslant k\|M\|$ avec $k = \|P\|.\|P^{-1}\|$ $\square$

5.b) On a $\sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{(PDP^{-1})^k}{k!} = P\Big(\sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{D^k}{k!} \Big) P^{-1}$ clairement. Or le membre de gauche tend, lorsque $N \to +\infty$, vers $\exp(PDP^{-1})$ et le membre de droite vers $P\exp(D)P^{-1}$ par continuité de l'application de la question précédente. Par unicité de la limite on obtient le résultat demandé. $\square$

6. Comme A est diagonalisable, il existe P inversible telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \operatorname{diag}(\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n)$ (chaque μ_i étant égal à un certain λ_j).
On a clairement $\exp(D) = \operatorname{diag}(e^{\mu_1}, e^{\mu_2}, \ldots, e^{\mu_n})$ donc $\exp(D) = L(D)$ puisque chaque μ_i est égal à un certain λ_j.
Par ailleurs, par la question précédente on a $P\exp(D)P^{-1} = \exp(A)$, et puisque L est un polynôme on a évidemment $PL(D)P^{-1} = L(PDP^{-1}) = L(A)$.
Ainsi $\exp(A) = L(A)$ $\square$

7. Immédiat puisque $X^k(v)(x) = v^k(x) = \lambda^k x$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. $\square$

8.a) Soit x un élément quelconque de E et $x = \sum\limits_{j=1}^{r} x_j$ la décomposition de x adaptée à la somme directe $E = \bigoplus\limits_{j=1}^{r} E_j$.

Il vient alors pour i fixé : $l_i(v)(x) = \sum\limits_{j=1}^{r} l_i(v)(x_j)$. Or $l_i(v)(x_j) = l_i(\lambda_j)x_j$ par la question précédente. D'après la question 4.a), il vient donc $l_i(v)(x) = x_i$.
Ce qui prouve bien que $l_i(v)$ n'est autre que le projecteur p_i de E sur $\bigoplus\limits_{j \neq i} E_j$ $\square$

8.b) D'après la question 6) on a $\exp(v) = L(v)$. Or $L(v) = \sum\limits_{i=0}^{r} e_i^{\lambda} l_i(v) = \sum\limits_{i=0}^{r} e^{\lambda_i} p_i$ par les questions 4.b) et 8.a).

En traduisant dans la base $\mathcal{B}$ il vient $\exp(A) = \sum\limits_{i=0}^{r} e^{\lambda_i} P_i$ où P_i est la matrice du projecteur p_i. $\square$

III. Un calcul d'exponentielle de matrices à l'aide des projecteurs spectraux : cas non diagonalisable.

9. Non diagonalisable car polynôme minimal non à racines simples. $\square$

10. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique est $(X-1)^2(X-2)$ donc le polynôme minimal qui le divise et qui a même ensemble de racine est soit $(X-1)(X-2)$ soit $(X-1)^2(X-2)$. Or un calcul immédiat prouve que le sous-espace propre associé à 1 est la droite dirigée par e_1.
Donc A n'est pas diagonalisable et $\pi_A(X) = (X-1)^2(X-2)$ $\square$

11. $(X-1)^2(X-2)$ annule A et $(X-2)^2 \wedge (X-1) = 1$ d'où la conclusion par le théorème de décomposition des noyaux. $\square$

12. $p+q = (u^2 - 2u + id) + (2u_u^2) = id$ $\square$

13 Soit x un élément quelconque de E. On a donc $x = q(x) + p(x)$ (1).
Or $(u-id)^2\big(q(x)\big) = (u-id)^2 \circ u \circ (2id - u)(x) = -u \circ \pi_u(x) = 0$ et $(u-2id)\big(p(x)\big) = \pi_u(x) = 0$.
Ainsi $\big(q(x), p(x)\big) \in \mathrm{Ker}(u-id)^2 \times \mathrm{Ker}(u-2id)$ de sorte que (1) est la décomposition de x adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Ker}(u-id)^2 \oplus \mathrm{Ker}(u-2id)$.
En d'autres termes p (resp. q) est le projecteur de E sur $\mathrm{Ker}(u-2id)$ (resp. $\mathrm{Ker}(u-id)^2$) parallèlement à $\mathrm{Ker}(u-id)^2$ (resp $\mathrm{Ker}(u-2id)$). $\square$

14.a) $(u-2id)\big(p(x)\big) = 0$ comme noté ci-dessus. $\square$

14.b) Donc $u\big(p(x)\big) = 2p(x)$ d'où par itération $u^k \circ p = 2^k p$ pour $k \in \mathbb{N}$ (également vrai si $k=0$). $\square$

14.c) Ainsi $\left(\sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{u^k}{k!}\right) \circ p = \left(\sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{2^k}{k!}\right) p$. Le membre de gauche tend vers $\exp(u) \circ p$ lorsque $N \to +\infty$ car l'application $v \longmapsto v \circ p$ de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même est continue en tant qu'endomrphisme d'un espace de dimension finie n^2.
Par passage à la limite on obtient donc $\exp(u) \circ p = e^2 p$ $\square$

15. Pour $k \geqslant 2$ on a $(u-id)^k \circ q = (u-id)^{k-2} \circ p \circ q = 0$ puisque $p \circ q = 0$. $\square$

Comme $(u-id)$ et id commutent on a $\exp(u) = \exp(id) \circ \exp(u-id) = e \exp(u-id)$

Donc $\left(\sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{(u-id)^k}{k!}\right) \circ q$ est une suite stationnaire en $\big(id + (u-id)\big) \circ q = u \circ q$

Ainsi $\exp(u) \circ q = e(u \circ q)$ $\square$

16. Comme $p+q = id$ il vient $\exp(u) = \exp(u) \circ (p+q) = e^2 p + e(u \circ q) = -eu^3 + (e^2 + 2e)u^2 - 2e^2 u + e^2 id$ $\square$

IV. Un calcul de distances à l'aide des projecteurs orthogonaux.

17. $d(x,F) = \|x - p_F(x)\|$ $\square$

18. Dan ce cas $p_F(x) = x - < \dfrac{n}{\|n\|}, x > \dfrac{n}{\|n\|}$ donc $d(x,H) = \dfrac{|< n, x >|}{\|n\|}$ $\square$

19. Comme la trace est une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, H est bien un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Par ailleurs $< A, B >= \mathrm{tr}({}^tAB) = \sum\limits_{i,j} a_{i,j} b_{i,j}$ est bien le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
En outre $M \in H \iff \mathrm{tr}({}^tI_n M) = 0 \iff < I_n, M >= 0$ donc $H = I_n^{\perp}$
La question précédente fournit alors immédiatement $d(M,H) = \dfrac{|\,\mathrm{tr}(M)|}{\sqrt{n}}$ $\square$

20. Soit $y = (t, 0)$ un élément quelconque de F. Il vient $N_\infty(x-y) = \max(|1-t|, 1)$ donc $N_\infty(x-y) = 1$ si $0 \leqslant t \leqslant 2$ et $N_\infty(x-y) = |1-t| > 1$ sinon.
Il en découle que $d(x,F) = 1$ et que cette distance est atteinte en une infinité de points : tous les points du segment $[0,2] \times \{0\}$ $\square$

Remarque : on peut facilement démontrer que la distance à un sous-espace F de dimension finie d'un espace normé $(E, \|.\|)$ quelconque est atteinte sur un ensemble non vide, compact et convexe (donc sur un segment si F est une droite).
En effet notons $d = d(x,F)$ et soit (a_n) une suite minimisante de F c'est à dire telle que $d(x, a_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} d$. La suite (a_n) est bornée (car $\|a_n\| \leqslant \|x - a_n\| + \|x\|$) donc admet une suite extraite $(b_n) = (a_{\varphi(n)})$ convergente vers $a \in F$ par le théorème de Bolzano-Weierstrass puisque F est de dimension finie. Or $\|b_n - x\|$ tend d'une part vers d en tant que suite extraite de la suite $(\|a_n - x\|)$ et d'autre part vers $\|a - x\|$ par continuité de la norme.
Ce qui prouve déjà que la distance est bien atteinte.
Notons D l'ensemble des points de F en lesquels elle est atteinte.
D est un fermé de F en tant qu'image réciproque de $\{d\}$ par l'application continue $y \longmapsto \|y - x\|$ de F dans $\mathbb{R}$.
C'est également un borné de F car si y est un élément de F tel que $\|y-a\| > 2d+1$ alors $\|y-a\| - \|x-a\| \leqslant \|y-x\|$ donc $\|y-x\| \geqslant d+1 > d$.
Ainsi D est bien compact (fermé borné en dimension finie).
Enfin si la distance est atteinte en a et b alors, pour $t \in [0,1]$, on a :
$\|x - (ta + (1-t)b)\| = \|t(x-a) + (1-t)(x-b)\| \leqslant t\|x-a\| + (1-t)\|x-b\| = td + (1-t)d = d$ ce qui prouve qu'elle est également atteinte en tout point du segment $[a,b]$ donc que D est convexe. $\square$

Par contre si F n'est pas de dimension finie, la distance n'est pas forcément atteinte comme le prouvent les exemples classiques d'hyperplans denses dans un espace normé.

FIN