Devoir non surveillé

Problème – Valeurs propres et sous-espaces stables

Dans ce problème, on considère un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E, de dimension finie $n \geqslant 1$.

On note multiplicativement la composition dans $\mathcal{L}(E)$.

Dans ce qui suit, f désigne un endomorphisme de E, *i.e.* $f \in \mathcal{L}(E)$.

On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une *valeur propre* de f si $f - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif, *i.e.* s'il existe un vecteur *non nul* x de E tel que

$$f(x) = \lambda x.$$

On dit alors que x est un *vecteur propre* de f pour (ou associé à) la valeur propre λ.

On pose $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $f^{k+1} = f \circ f^k$, de sorte que, par exemple, $f^1 = f$ et $f^3 = f \circ f \circ f (= fff)$, et, pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$: $f^{p+q} = f^p \circ f^q (= f^p f^q)$.

Partie A – Existence d'une valeur propre

L'objectif de cette partie est de montrer l'existence d'une valeur propre (complexe) pour f.

A.1 Trouver un entier N tel que $(f^k)_{k \in [\![0,N]\!]}$ soit liée.

A.2 En déduire qu'il existe un entier naturel non nul m tel que $f^m \in \mathrm{Vect}(f^k)_{k \in [\![0,m-1]\!]}$.

On admet[1] que pour tout entier naturel non nul m,

$$\left\{ f^m - \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k f^k, (\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1}) \in \mathbb{C}^m \right\} = \left\{ \prod_{k=1}^{m} (f - \lambda_k \mathrm{Id}_E), (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{C}^m \right\}.$$

A.3 Montrer que f admet une valeur propre complexe.

Partie B – Majoration du nombre de valeurs propres

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ des valeurs propres complexes, *distinctes deux à deux*, et $x_1, \dots, x_m$ des vecteurs propres de f pour ces valeurs propres respectives.

On souhaite montrer que $(x_1, \dots, x_m)$ est libre. On raisonne par l'absurde, en supposant cette famille liée.

B.1 Montrer que $m \geqslant 2$, et qu'il existe $p \in [\![1, m-1]\!]$ tel que $(x_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ soit libre et $x_{p+1} \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$.

B.2 On note $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ le p-uplet des composantes de x_{p+1} dans $(x_1, \dots, x_p)$, c'est-à-dire **l'unique** p-uplet de complexes tel que :

$$(*) \quad x_{p+1} = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k x_k.$$

a Montrer que $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont non tous nuls.

En appliquant f à $(*)$, trouver une absurdité :

b Dans le cas où $\lambda_{p+1} = 0$.

c Dans le cas où $\lambda_{p+1} \neq 0$.

B.3 Quel est le nombre maximum *possible* de valeurs propres complexes d'un endomorphisme de E ?

B.4 Afin d'*illustrer le travail précédent*, on travaille dans cette question (dont les suivantes ne dépendent pas) dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

a On considère des nombres complexes $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, distincts deux à deux. Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, on pose $e_i \ : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{\alpha_i t}$. Montrer que $(e_1, \dots, e_m)$ est libre.

b Montrer que $(c_k \ : t \in \mathbb{R} \mapsto \cos(kt))_{k \in [\![0,m]\!]}$ est libre.

---

1. Cela résulte du théorème de d'Alembert-Gauss

Partie C – Commutant et sous-espaces stables

On appelle *commutant* de f et on note $\mathcal{C}(f)$ la partie suivante de $\mathcal{L}(E)$:

$$\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E), fg = gf\}.$$

C.1 Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathcal{L}(E)$.

Comme $f \in \mathcal{C}(f)$, on a $\mathrm{Vect}(f^k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}(f)$, et, en particulier, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $f - \lambda \mathrm{Id}_E \in \mathcal{C}(f)$.

Un sous-espace vectoriel F de E est dit *stable* par f si $f(F) \subset F$. Dans un tel cas, on peut restreindre et corestreindre f à F, obtenant un endomorphisme $f_{|F}^{|F}$ de F, appelé *endomorphisme de F induit par f*.

C.2 Montrer qu'il existe une droite vectorielle de E, stable par f.

C.3 Soit F un sous-espace vectoriel de E, $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que F est stable par f si et seulement si F est stable par $f - \lambda \mathrm{Id}_E$.

C.4 On considère un endomorphisme g de E, commutant avec f.

a Montrer que $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont stables par f.

On suppose que g admet n valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, distinctes deux à deux. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ soit x_i un vecteur propre de g associé à λ_i.

b Montrer que $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E.

c ♡ Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Ker}(g - \lambda_i \mathrm{Id}_E) = \mathbb{C}x_i$.

Indication : on pourra, un peu comme dans B.2, se fonder sur l'existence et unicité du n-uplet des composantes d'un vecteur de E dans la base $(x_1, \dots, x_n)$.

d Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, x_i est un vecteur propre de f.

C.5 On considère des endomorphismes $h_1, \dots, h_p$ de E. On suppose que $\{0_E\}$ et E sont les seuls sous-espaces de E stables par chacun des endomorphismes $h_1, \dots, h_p$.

Montrer que si $g \in \mathcal{L}(E)$ commute avec $h_1, \dots, h_p$, alors g est une homothétie, *i.e.* un élément de $\mathbb{C}\mathrm{Id}_E$.

Partie D – Caractérisation de l'existence d'une base de vecteurs propres

D.1 Montrer l'équivalence des assertions suivantes :

i $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$.

ii $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$.

iii $\mathrm{Ker}(f)$ admet un supplémentaire F dans E, stable par f.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on note $E_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$.

D.2 ♡ On suppose que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, E_λ admet un supplémentaire dans E, stable par f.

Montrer que E admet une base de vecteurs propres pour f.

Indication : on pourra raisonner par récurrence forte sur la dimension de E, et considérer un endomorphisme induit par f sur un sous-espace vectoriel.

D.3 Montrer, réciproquement, que si E admet une base de vecteurs propres pour f, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, E_λ admet un supplémentaire dans E, stable par f.

Partie E – Endomorphismes semi-simples

f est dit *semi-simple* si tout sous-espace vectoriel de E stable par f admet un supplémentaire dans E stable par f.

E.1 On suppose ici f semi-simple. Montrer alors l'existence d'une base de E de vecteurs propres pour f.

E.2 On suppose réciproquement l'existence d'une telle base : en particulier, il existe des nombres complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, distincts deux à deux, tels que

$$E = E_{\lambda_1} + \cdots + E_{\lambda_p} \left(= \mathrm{Vect}\left(E_{\lambda_1} \cup \cdots \cup E_{\lambda_p}\right)\right).$$

On souhaite montrer que f est semi-simple. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par E.

On veut montrer que $F = (F \cap E_{\lambda_1}) + \cdots + (F \cap E_{\lambda_p})$. On a évidemment l'inclusion indirecte (inutile de la démontrer).

a Donner un exemple de trois sous-espaces vectoriels F, G, H d'un espace vectoriel E tels que

$$F \cap (G + H) \neq (F \cap G) + (F \cap H).$$

b ♡ Soit $x \in F$, $(x_1, \dots, x_p) \in E_{\lambda_1} \times \cdots \times E_{\lambda_p}$ tel que $x = x_1 + \cdots + x_p (= \sum_{k=1}^p x_k)$. Montrer que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $x_i \in (F \cap E_{\lambda_i})$.

c ♡ Montrer que f est semi-simple.