Corrigé de devoir non surveillé

Problème – Valeurs propres et sous-espaces stables

Partie A – Existence d'une valeur propre

A.1 Pour $N = n^2$, $(f^k)_{k\in[\![0,N]\!]}$ est une famille de $n^2+1 > n^2 = \dim(\mathcal{L}(E))$ vecteurs de $\mathcal{L}(E)$: c'est donc une famille liée.

A.2 D'après la question précédente, on a une relation de liaison $\sum_{k=0}^{n^2} \lambda_k f^k = 0$ (où $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n^2}$ sont des complexes non tous nuls). En introduisant $m = \max\{k \in [\![0, n^2]\!], \lambda_k \neq 0\}$, non nul car (Id_E) est libre (puisque $E \neq \{0_E\}$), on obtient aisément : $f^m \in \mathrm{Vect}(f^k)_{k\in[\![0,m-1]\!]}$.

A.3 D'après la question précédente, il existe des complexes $\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1}$ tels que $f^m - \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k f^k = 0$. Grâce à la proposition admise, il existe donc des nombres complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ tels que $\prod_{k=1}^{m}(f - \lambda_k \mathrm{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Si, pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, $(f - \lambda_k \mathrm{Id}_E)$ était injective, alors $0_{\mathcal{L}(E)}$ le serait. Or $0_{\mathcal{L}(E)}$ n'est pas injective, car E n'est pas réduit à son vecteur nul : il existe $k \in [\![1, m]\!]$ tel que $(f - \lambda_k \mathrm{Id}_E)$ ne soit pas injective : f admet une valeur propre complexe.

Partie B – Majoration du nombre de valeurs propres

B.1 Un vecteur propre étant par nature non nul, puisque $(x_k)_{k\in[\![1,m]\!]}$ est liée, on a $m \geqslant 2$. En prenant $p = \max(k \in [\![1, m]\!], (x_1, \ldots, x_k)$ est libre), on a $p < m$, puis nécessairement $x_{p+1} \in \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_p)$. Il existe donc bien p comme souhaité.

B.2

a Bien sûr, $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont non tous nuls (car x_{p+1} n'est pas nul).

b On applique f à $(*)$, obtenant :

$$(**) \quad \lambda_{p+1} x_{p+1} = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \lambda_k x_k.$$

Si $\lambda_{p+1} = 0$, alors $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont tous non nuls, donc $(**)$ donne une relation de liaison pour la famille libre $(x_1, \ldots, x_p)$: c'est absurde.

c On a, dans le cas où $\lambda_{p+1} \neq 0$:

$$(***) \quad x_{p+1} = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \frac{\lambda_k}{\lambda_{p+1}} x_k.$$

Par unicité des composantes d'un vecteur dans une base, il vient, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$: $\alpha_k = \alpha_k \frac{\lambda_k}{\lambda_{p+1}}$. Sachant que $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont non tous nuls, et $\lambda_{p+1} \notin \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$, on obtient une absurdité.

Dans tous les cas, c'est absurde.

B.3 Un endomorphisme de E ne peut compter plus de n valeurs propres (car une famille libre de vecteurs de E est de cardinal au plus n). Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, f l'endomorphisme de E défini sur la base $\mathcal{B}$ par $f(e_k) = ke_k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. f admet n valeurs propres (les entiers de 1 à n).

n est donc le nombre cherché.

B.4

a On considère l'endomorphisme de dérivation D dans $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_m)$: pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, e_k est vecteur propre de f pour la valeur propre α_k. Ces scalaires étant distincts deux à deux, $(e_1, \ldots, e_m)$ est libre.

b De même, en considérant cette fois-ci la dérivée seconde, on obtient la liberté de $(c_k \; : t \in \mathbb{R} \mapsto \cos(kt))_{k\in[\![0,m]\!]}$.

Partie C – Commutant et sous-espaces stables

C.1 L'application $g \mapsto fg - gf$ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$, dont $\mathcal{C}(f)$ est le noyau : $\mathcal{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. Par ailleurs, $\mathcal{C}(f)$ comprend évidemment Id_E et, si g, h commutent avec f, alors

$$f(gh) = (fg)h = (gf)h = g(fh) = g(hf) = (gh)f,$$

donc $gh \in \mathcal{C}(f)$.

Ceci montre[1] que $\mathcal{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathcal{L}(E)$.

C.2 f admet un vecteur propre x pour une valeur propre λ, et la droite vectorielle $\mathbb{C}x$ est alors clairement stable par f.

C.3 Soit $x \in F$. On a évidemment $f(x) \in F$ si et seulement si $f(x) - x \in F$, donc F est stable par f si et seulement si F est stable par $f - \lambda \mathrm{Id}_E$.

C.4

a Soit $x \in \mathrm{Ker}(g)$. On a $g(f(x)) = f(g(x)) = f(0_E) = 0_E$, donc $f(x) \in \mathrm{Ker}(g)$: $\mathrm{Ker}(g)$ est stable par f.

Soit $y \in \mathrm{Im}(g)$, $x \in E$ tel que $y = g(x)$. On a $f(y) = f(g(x)) = g(f(x)) \in \mathrm{Im}(g)$, donc $\mathrm{Im}(g)$ est stable par f.

b D'après B.2, $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille libre de vecteurs de E. Comme son cardinal est la dimension de E, c'est une base de E.

c L'inclusion indirecte est évidente. Soit réciproquement $x \in \mathrm{Ker}(g - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$. On le décompose dans la base $(x_1, \dots, x_n)$:

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k.$$

En appliquant f, on obtient

$$\lambda_i x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_k x_k.$$

Si $\lambda_i = 0$, alors il faut (par liberté) que $\alpha_k = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!] \setminus \{i\}$, donc $x = \lambda_i x_i \in \mathbb{C}x_i$.

Si $\lambda_i \neq 0$, alors

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{\lambda_k}{\lambda_i} x_k,$$

ce qui force, à nouveau (par unicité des coordonnées), $\alpha_k = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!] \setminus \{i\}$, et donc $x = \lambda_i x_i \in \mathbb{C}x_i$.

d On sait que f et $g - \lambda_i \mathrm{Id}_E$ commutent, donc $\mathrm{Ker}(g - \lambda_i \mathrm{Id}_E) = \mathbb{C}x_i$ est stable par f, *i.e.* $f(x_i)$ est colinéaire à x_i, soit encore x_i est vecteur propre de f

C.5 Supposons que $g \in \mathcal{L}(E)$ commute avec $h_1, \dots, h_p$. Soit λ une valeur propre (complexe) de g, et $f = g - \lambda \mathrm{Id}_E$. Comme f commute avec $h_1, \dots, h_n$, son noyau est stable par $h_1, \dots, h_n$, donc égal à $\{0_E\}$ ou E : comme il est non nul, $\mathrm{Ker}(g - \lambda \mathrm{Id}_E) = E$, *i.e.* $g = \lambda \mathrm{Id}_E$, et g est donc bien une homothétie

Partie D – Caractérisation de l'existence d'une base de vecteurs propres

D.1 On procède par implications cycliques : l'implication de *i* vers *ii* résulte simplement du théorème du rang, celle de *ii* vers *iii* est évidente (prendre $F = \mathrm{Im}(f)$).

Supposons *iii* : soit F un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dans E, stable par f. Soit $x \in E$, $(x_{\mathrm{Ker}(f)}, x_F) \in \mathrm{Ker}(f) \times F$ tel que $x = x_{\mathrm{Ker}(f)} + x_F$. En appliquant f, on obtient par linéarité $f(x) = f(x_F)$, montrant l'inclusion de $\mathrm{Im}(f)$ dans $f(F)$. On a donc :

$$\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) \subset f(F) \cap \mathrm{Ker}(f) \subset F \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\},$$

d'où *i*.

L'équivalence de ces assertions est bien montrée.

D.2 On raisonne par récurrence comme l'indique l'énoncé, l'amorçage lorsque E est une droite vectorielle étant évident.

Supposons avoir prouvé le résultat pour tout endomorphisme (vérifiant cette propriété) de tout espace vectoriel de dimension $m \in [\![1, n]\!]$. Supposons E de dimension $n + 1$, soit f un endomorphisme de E vérifiant cette propriété. On sait que f admet une valeur propre λ. E_λ est donc non réduit au vecteur nul. Si $E_\lambda = E$,

[1] la stabilité par différence (pour la structure de sous-anneau) résulte de la structure de sous-espace vectoriel

alors f est une homothétie, et admet donc une base de vecteurs propres (et même *toute base* est une base de vecteurs propres !). Supposons $E_\lambda \neq E$, et soit F un supplémentaire de E_λ, stable par f. On peut restreindre et corestreindre f à F, obtenant un endomorphisme g de F, pour lequel il existe par hypothèse de récurrence une base de vecteurs propres. Ces vecteurs (vus comme vecteurs de E) sont aussi des vecteurs propres de f, et, en les complétant par une base de E_λ, on obtient bien une base de E de vecteurs propres pour f.

D.3 Supposons que E admette une base de vecteurs propres. Il existe donc des nombres complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, distincts deux à deux, tels que

$$E = E_{\lambda_1} + \cdots + E_{\lambda_p}.$$

E_{λ_1} admet $E_{\lambda_2} + \cdots + E_{\lambda_p}$ pour supplémentaire [2] dans E (leur intersection est réduite au vecteur nul grâce à B.2), stable par f. De même pour $E_{\lambda_2}, \ldots, E_{\lambda_p}$. Pour toute autre valeur de λ, $E_\lambda = \{0_E\}$, qui admet E pour supplémentaire stable par f : dans tous les cas, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, E_λ admet un supplémentaire dans E, stable par f.

Partie E – Endomorphismes semi-simples

E.1 On sait que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, E_λ est stable par f : comme f est semi-simple, nous pouvons appliquer les résultats de la partie précédente, montrant l'existence d'une base de E de vecteurs propres pour f.

E.2

a Il suffit de prendre $E = \mathbb{C}^2$, $G = \mathbb{C}(1,0)$, $H = \mathbb{C}(0,1)$ et $F = \mathbb{C}(1,1)$.

b Soit $g = \prod_{k=2}^{p}(f - \lambda_k \mathrm{Id}_E)$. Pour tout $i \in [\![2,p]\!]$, $g(x_i) = 0_E$. Par ailleurs, $g(x_1) = \prod_{k=2}^{p}(\lambda_1 - \lambda_k)x_1$, et $g(x) \in F$ car F est stable par f. On a donc

$$x_1 = \frac{1}{\prod_{k=2}^{p}(\lambda_1 - \lambda_k)} g(x) \in F,$$

donc $x_1 \in F$, puis $x_1 \in (F \cap E_{\lambda_1})$. De même, pour tout $i \in [\![2,p]\!]$, $x_i \in (F \cap E_{\lambda_i})$.

c La question précédente montre bien que $F = (F \cap E_{\lambda_1}) + \cdots + (F \cap E_{\lambda_p})$. Bien sûr, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $F \cap E_{\lambda_i}$ admet un supplémentaire G_i dans E_{λ_i}, stable par f (tout supplémentaire convient, car f induit une homothétie sur E_{λ_i}). $G_1 + \cdots + G_n$ est alors un supplémentaire de F dans E, stable par f : f est semi-simple.

2. en convenant que cette somme égale $\{0_E\}$ dans le cas où $p = 1$