# Devoir non surveillé

## Intégrales de Wallis

### Partie A – Intégrales et formules de Wallis

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel, par :

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n \mathrm{d}t.$$

**A.1** Calculer $u_0$, $u_1$ et $u_2$.

**A.2** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, puis qu'elle converge.

**A.3** Établir la relation $u_n = \frac{n-1}{n} u_{n-2}$, pour tout $n \geqslant 2$.

**A.4** En déduire une expression sous forme de produits, de $u_{2n}$ et de $u_{2n+1}$. On donnera ensuite une expression de ces termes à l'aide de factorielles, de puissances de 2 et du nombre $\pi$.
**Indication :** remarquer que $(1 \cdot 3 \cdots (2n+1))(2 \cdot 4 \cdots (2n)) = (2n+1)!$ et que $(2 \cdot 4 \cdots (2n)) = 2^n n!$.

**A.5** Montrer que pour tout entier naturel $n$ : $u_{2n} \cdot u_{2n+1} = \frac{\pi}{2(2n+1)}$. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**A.6** Montrer : $u_{2n} \sim u_{2n+1}$.

**A.7** Établir, à l'aide des questions précédentes, les *formules de Wallis* :

$$u_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \quad \text{et} \quad \sqrt{\pi} \sim \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}.$$

### Partie B – Une application

Pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout réel $x$, on pose $f_n(x) = x^2(\cos(x))^n$ et $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\mathrm{d}x$.

**B.1** Calculer $I_0$ et $I_1$.

**B.2** Montrer, pour tout entier naturel non nul $n$ :

$$(2n-1)I_{2n-2} - 2nI_{2n} = \frac{1}{n} u_{2n}.$$

**B.3** Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{\pi^2}{4}(u_n - u_{n+2})$. En déduire que $I_n = \mathrm{o}(u_n)$.

**B.4** Vérifier que pour tout entier naturel non nul $n$ :

$$\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{2I_{2n}}{u_{2n}}.$$

**B.5** Montrer : $\lim\limits_{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.