Corrigé de devoir non surveillé

Intégrales de Wallis

Partie A – Intégrales et formules de Wallis

A.1 $\boxed{u_0 = \frac{\pi}{2},\ u_1 = 1 \text{ et } u_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2x)}{2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.}$

A.2 Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$, donc, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant \cos(x)^{n+1} \leqslant \cos^n(x)$. La croissance de l'intégrale sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ montre alors l'inégalité $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$. Ceci étant valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$ Décroissante et minorée (par 0), la suite $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente.}}$

A.3 Remarque : les applications considérées étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, on pourra intégrer par parties sans scrupules (on a $\int uv' = [uv] - \int u'v$ dès que u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$).

Soit $n \geqslant 2$.

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n = u_{n-2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \cos^{n-2} = u_{n-2} - \left([\frac{-1}{n-1} \sin \cos^{n-1}]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \right) = u_{n-2} - \frac{1}{n-1} u_n$$

donc $\boxed{u_n = \frac{n-1}{n} u_{n-2}.}$

A.4 Une récurrence immédiate montre que

$$u_{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = \frac{\pi}{2} \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)}.$$

En remarquant que $1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k+1) = \frac{(2k+1)!}{2^k (k!)}$, on a :

$$u_{2n} = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2} \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

A.5 En utilisant les relations précédentes, on trouve : $\boxed{u_{2n} \cdot u_{2n+1} = \frac{\pi}{2(2n+1)}.}$

Remarque : on peut aussi montrer (plus économiquement) que $(2n+1)u_{2n}u_{2n+1}$ est constant, par récurrence.

La limite l de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la limite commune de ses suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}), la relation précédente montre que $\boxed{l = 0.}$

A.6 L'encadrement $\frac{2n+1}{2n+2} u_{2n} = u_{2n+2} \leqslant u_{2n+1} \leqslant u_{2n}$ permet de montrer que $\lim \frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} = 1$, donc que $\boxed{u_{2n} \sim u_{2n+1}.}$

A.7 Les équivalents se comportant bien avec le produit, on a :

$$u_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$$

En passant aux racines carrées, on obtient : $\boxed{u_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}.$

Comme $\sqrt{\pi} \sim \sqrt{4n+2}\,u_{2n+1} \sim \frac{2n+1}{\sqrt{n}} u_{2n+1}$, on obtient $\boxed{\sqrt{\pi} \sim \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}.}$

Partie B – Une application

B.1 Bien sûr, $I_0 = \frac{\pi^3}{24}$. Grâce à des intégrations par parties,

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(x)\mathrm{d}x = [x^2\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4} - 2\left([-x\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)\mathrm{d}x\right) = \frac{\pi^2}{4} - 2.$$

$\boxed{I_0 = \frac{\pi^3}{24} \text{ et } I_1 = \frac{\pi^2}{4} - 2.}$

B.2 Pour tout entier naturel non nul n :

$$I_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(\cos(x))^{2n}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(1-\sin^2(x))(\cos(x))^{2n-2}\mathrm{d}x = I_{2n-2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2(x)\cos^{2n-2}(x)\mathrm{d}x$$

On effectue une intégration par parties en posant $u(x) = x^2\sin(x)$ et $v(x) = \frac{-1}{2n-1}\cos^{2n-1}(x)$, afin d'obtenir :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2(x)\cos^{2n-2}(x)\mathrm{d}x = [uv]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2\cos(x) + 2x\sin(x))\cos^{2n-1}(x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2n-1}\left(I_{2n} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\cos^{2n-1}(x)\mathrm{d}x\right)$$

Pour calculer cette dernière intégrale, on effectue une intégration par parties, en posant $u(x) = x$ et $v(x) = \frac{-1}{2n}\cos^{2n}(x)$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\cos^{2n-1}(x)\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2n}x\cos^{2n}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{u_{2n}}{2n} = +\frac{u_{2n}}{2n}.$$

Au final, on a :

$$I_{2n} = I_{2n-2} - \frac{1}{2n-1}\left(I_{2n} + 2\frac{u_{2n}}{2n}\right),$$

dont on déduit la formule cherchée : $\boxed{(2n-1)I_{2n-2} - 2nI_{2n} = \frac{1}{n}u_{2n}.}$

B.3 Par concavité de la fonction sinus sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a, pour tout point x de cet intervalle, $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\sin(x)$, et donc $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{\pi^2}{4}\int_0 \sin(x)^2\cos(x)^n\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4}(u_n - u_{n+2})$.

Puisque u_n est équivalent à u_{n+2} (voir leur lien en A.3), on a $\lim_n \frac{u_n - u_{n+2}}{u_n} = 0$, donc, d'après le principe des gendarmes, $\lim_n \frac{I_n}{u_n} = 0$: $\boxed{I_n = \mathrm{o}(u_n).}$

B.4 D'après la formule vue en B.2, et la relation A.3, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{I_{2k-2}}{u_{2k-2}} - \frac{I_{2k}}{u_{2k}} = \frac{(2k-1)I_{2k-2}}{2ku_{2k}} - \frac{I_{2k}}{u_{2k}} = \frac{1}{2k^2}$$

En sommant cette relation pour k allant de 1 à n ($n \in \mathbb{N}^*$ est fixé), on obtient, puisque la somme des termes de gauche est télescopique :

$$\frac{I_0}{u_0} - \frac{I_{2n}}{u_{2n}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k^2}$$

Sachant que $I_0 = \frac{\pi^3}{24}$ et $u_0 = \frac{\pi}{2}$, on obtient, en multipliant la relation par 2 :

$$\frac{\pi^2}{6} - \frac{2I_{2n}}{u_{2n}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2},$$

dont on déduit la relation voulue : $\boxed{\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{2I_{2n}}{u_{2n}}.}$

B.5 Puisque $I_n = \mathrm{o}(u_n)$, on a $\lim_n \frac{2I_{2n}}{u_{2n}} = 0$: $\boxed{\lim_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$