Corrigé de devoir non surveillé

Exercice 1 : Idéaux et sous-anneaux de $\mathbb{Z}^2$

1 $x\mathcal{A}$ est bien sûr une partie non vide de $\mathcal{A}$, et, pour tout $a, a' \in \mathcal{A}$:

$$xa - xa' = x(a - a') \in x\mathcal{A} \quad \text{et} \quad (xa)a' = x(aa') \in x\mathcal{A},$$

par structure d'anneau de $\mathcal{A}$.

$x\mathcal{A}$ est donc bien un idéal de $\mathcal{A}$.

2 Soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathbb{Z}$. C'est en particulier un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$, donc de la forme $x\mathbb{Z}$ pour un certain entier x (cf. le cours) : tout idéal de $\mathbb{Z}$ est principal.

3

a Soit $(x, y) \in \mathcal{I}_1 \times \mathcal{I}_2$. Les couples $(x, 0)$ et $(0, y)$ appartiennent à $\mathcal{I}$, donc leur somme (x, y) également : ceci montre $\mathcal{I}_1 \times \mathcal{I}_2 \subset \mathcal{I}$.

Réciproquement, soit $(x, y) \in \mathcal{I}$. En multipliant par $(1, 0) \in \mathcal{A}$, il vient $(x, 0) \in \mathcal{I}$, *i.e.* $x \in \mathcal{I}_1$, et, de même, $(0, y) \in \mathcal{I}$, *i.e.* $y \in \mathcal{I}_2$: ceci montre l'inclusion réciproque, puis l'égalité.

b $\mathcal{I}_1$ et $\mathcal{I}_2$ sont principaux : soit $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $\mathcal{I}_1 = n_1\mathbb{Z}$ et $\mathcal{I}_2 = n_2\mathbb{Z}$. On vérifie aisément que $\mathcal{I} = (n_1, n_2)\mathbb{Z}^2$: $\mathcal{I}$ est principal.

4

a $A_0 = \{(x, x), x \in \mathbb{Z}\}$ et $A_1 = \mathbb{Z}^2$ (car 1 divise tout entier, et 0 ne divise que lui-même).

b Soit $d \in \mathbb{N}$. A_d est une partie de $\mathbb{Z}^2$, comprenant $(1, 1)$, et, si (x, y) et (x', y') en sont des éléments, alors d divise $y - x$ et $y' - x'$, donc d divise $(y - y') - (x - x')$, *i.e.* $(x, y) - (x', y') \in A_d$ et d divise $yy' - xx'(= y(y' - x') + x'(y - x))$, *i.e.* $(x, y)(x', y') \in A_d$: A_d est bien un sous-anneau de $\mathbb{Z}^2$.

c Puisque $A \neq A_0$, on peut trouver des entiers distincts x et y tels que $(x, y) \in A_d$. Quitte à prendre l'opposé de (x, y) (également élément de A_d), on peut supposer $y > x$. Comme $(1, 1) \in A$, on a $(x, x) \in A$, puis en posant $n = y - x$ (entier naturel non nul), $(0, n) = (x, y) - (x, x) \in A$.

d A est un sous-anneau de $\mathbb{Z}^2$ comprenant $(0, d)$ et $(1, 1)$, donc contenant $\{(x, x + kd), (x, k) \in \mathbb{Z}\}$, *i.e.* $A_d \subset A$.

Réciproquement, si $(x, y) \in A$, alors $(x, y) \in A_d$ si $x = y$ (car d divise 0), et, si $x \neq y$ on a vu lors de la question précédente que $(0, |y - x|)$ appartenait à A. On effectue la division euclidienne de $|y - x|$ par $d(\in \mathbb{N}^*)$: $|y - x| = dq + r$. On a $(0, r) = (0, |y - x|) - q(0, d) \in A$, d'où $r = 0$ par minimalité de d (on rappelle que $0 \leqslant r < d$) : d divise $y - x$, $(x, y) \in A_d$.

Il vient bien : $A = A_d$.