Devoir non surveillé

Problème – Combinaisons d'un coffre-fort

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère un coffre-fort. Pour l'ouvrir (de manière légale), on doit pousser dans un certain ordre les n boutons de la serrure : chaque bouton n'est poussé qu'une seule fois, mais il est possible de pousser simultanément plusieurs boutons.

La modélisation est effectuée de la manière suivante : une n-combinaison est une famille $(P_1, \ldots, P_j)$ de parties de $[\![1, n]\!]$ (où $j \in [\![1, n]\!]$), ces parties étant deux à deux disjointes ($P_l \cap P_k = \emptyset$ dès que $l \neq k$), toutes non vides, et leur réunion est $[\![1, n]\!]$ (autrement dit, ces parties sont toutes non vides, et $[\![1, n]\!]$ en est la réunion disjointe).

On note a_n le cardinal de l'ensemble des n-combinaisons. On pose par convention $a_0 = 1$.

Par exemple, pour $n = 1$, l'unique n-combinaison est $(\{1\})$, et $a_1 = 1$.

Pour $n = 2$, les trois n-combinaisons sont $(\{1\}, \{2\})$, $(\{2\}, \{1\})$ et $(\{1, 2\})$: dans la première, on pousse le bouton 1 puis le bouton 2, dans la deuxième, on pousse le bouton 2 puis le bouton 1, et dans la troisième, on pousse les deux boutons simultanément.

I.1 Montrer que $a_n \geqslant n!$.

I.2 Exhiber les 3-combinaisons au cours desquelles on appuie simultanément sur au moins deux boutons. Donner la valeur de a_3.

I.3 Montrer que : $a_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a_k$.
Indication : on pourra écrire l'ensemble des n-combinaisons comme une union disjointe.

I.4 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = \frac{a_n}{n!}$. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, que

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_{n-k}}{k!}.$$

I.5

a Montrer que les suites (indexées par $\mathbb{N}^*$) de termes généraux $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\ln(2))^k}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{(\ln(2)^n)}{n!}$ sont adjacentes. On *admet* que leur limite commune est 2.

b Montrer que pour tout entier naturel non nul n : $b_n \leqslant \frac{1}{\ln(2)^n}$.

c Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer : $u_n - 2 \geqslant -2\frac{\ln(2)^{n+1}}{(n+1)!}$.

d Montrer que pour tout entier naturel non nul n : $b_n \geqslant \frac{1}{2\ln(2)^n}$.
Indication : on pourra procéder par récurrence, et, dans l'hérédité, isoler le terme d'indice $n+1$ dans la relation $b_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{b_{n+1-k}}{k!}$.