Corrigé de devoir non surveillé

Problème – Combinaisons d'un coffre-fort

I.1 Parmi les n-combinaisons, celles consistant à n'appuyer que sur un bouton à la fois forment un ensemble clairement équipotent à $\mathfrak{S}_n$, donc $a_n \geqslant n!$.

I.2 $(\{1,2,3\}), (\{1\},\{2,3\}), (\{2,3\},\{1\}), (\{2\},\{1,3\}), (\{1,3\},\{2\}), (\{3\},\{1,2\}), (\{1,2\},\{3\})$ sont les 3-combinaisons demandées.

On a donc $a_3 = 7 + 3! = 13$.

I.3 Soit $k \in [\![1,n]\!]$, Ω_k l'ensemble des n-combinaisons $(P_1,\dots,P_j)$ telles que P_1 soit de cardinal k. Pour un tel ensemble P_1 fixé, il existe a_{n-k} façons de le « compléter » en une n-combinaison, et il existe $\binom{n}{k}$ tels ensembles. Comme l'ensemble des n-combinaisons est la réunion disjointe de $(\Omega_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$, la première formule voulue est bien établie :

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k}.$$

La seconde formule résulte immédiatement du fait que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, et d'un changement d'incide $k \leftarrow n-k$ dans la somme ci-dessus.

I.4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{a_n}{n!} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n!}\binom{n}{k} a_{n-k} \text{ (d'après la question précédente)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} a_{n-k} \text{ (d'après l'expression factorielle des coefficients binomiaux)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{b_{n-k}}{k!}. \end{aligned}$$

I.5

a Il est clair que u est croissante, et que $v-u$ converge vers 0. Montrons la décroissance de v. Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{\ln(2)^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{\ln(2)^n}{n!} = 2\frac{\ln(2)^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{\ln(2)^n}{n!} = \frac{\ln(2)^n}{(n+1)!}\left(2\ln(2) - (n+1)\right) \leqslant 0.$$

La suite v est décroissante, et les deux suites u et v sont bien adjacentes.

b Montrons le résultat demandé par récurrence forte sur l'entier naturel non nul n. L'amorçage au rang 1 est évident. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$, supposons le résultat vrai jusqu'à ce rang, prouvons qu'il demeure au rang suivant :

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{b_{n+1-k}}{k!} \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!(\ln(2)^{n+1-k})} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{u_{n+1}-1}{\ln(2)^{n+1}} \\ &\leqslant \frac{1}{\ln(2)^{n+1}}, \end{aligned}$$

car u tend vers 2 en croissant.

L'hérédité est montrée, le résultat établi.

c On a : $2 \leqslant v_{n+1}$, donc $u_n - 2 \geqslant u_n - v_{n+1} = -2\frac{\ln(2)^{n+1}}{(n+1)!}$.

d On procède par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$, l'amorçage étant évident. Fixons un entier naturel non nul n, et supposons le résultat établi jusqu'à ce rang. On a :

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{b_{n+1-k}}{k!} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{b_{n+1-k}}{k!} \\
&\geqslant \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{2\ln(2)^{n+1}}(u_n - 1) \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{2\ln(2)^{n+1}}(u_n - 2) + \frac{1}{2\ln(2)^{n+1}} \\
&\geqslant \frac{1}{2\ln(2)^{n+1}},
\end{aligned}$$

grâce à la question précédente.

On a donc bien, pour tout entier naturel n : $b_n \geqslant \frac{1}{2\ln(2)^n}$.