CHAPITRE 1

Friandises (énoncés)

Aller aux corrigés 2

Exercice 1

Quel est le plus petit sous-anneau de $\mathbb{Q}$ contenant $1/5$?

Exercice 2

1 Montrer que $X^3 - 2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
On désigne par α une de ses racines complexes, et on pose

$$A = \{a + b\alpha + c\alpha^2, (a, b, c) \in \mathbb{Q}^3\}$$

2 Montrer que A est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Exercice 3

Montrer qu'il y a une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.

Exercice 4

Soit A un anneau fini. Montrer l'existence d'entiers distincts m et n tels que $x^m = x^n$ pour tout $x \in A$.

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $z_1, \dots, z_n$ les racines complexes de $X^n + 1$. Montrer : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], XP'(X) = \frac{n}{2}P(X) + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k P(z_k X)}{(z_k - 1)^2}$.

Exercice 6

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que AB et BA ont même polynôme caractéristique.

Exercice 7

Soit $f\ : [0,1[\to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer que f est bornée.

Exercice 8

On pose $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 4x - 5y + 2$.
1 Nature de $\{(x,y), f(x,y) = 0\}$?
2 On pose $H = \{(x,y), f(x,y) \leqslant 0\}$. Calculer de deux manières $\iint_H \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Exercice 9

Si p est un nombre premier, quel est le nombre de carrés de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

Exercice 10

Montrer l'existence et l'unicité de $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X], P(0) = \int_0^1 A(t)P(t)\mathrm{d}t.$$

Montrer que A est de degré n.

Exercice 11

1 Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $\sum_{g\in G} \mathrm{tr}(g) = 0$. Montrer que $\sum_{g\in G} g = 0$.
2 Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par tous les éléments de G. Montrer qu'il existe un supplémentaire de V stable par tous les éléments de G.

Exercice 12

Soit $G = \{x + \sqrt{2}y | x \in \mathbb{N}^*, y \in \mathbb{Z} \text{ et } x^2 - 2y^2 = 1\}$.
1 Montrer que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.
2 Montrer que G est monogène.

Exercice 13

Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que 7 divise $n^n - 3$.

Exercice 14

Calculer $\sum_{k=1}^{6} \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{13}\right)$.

Exercice 15

Si $n \in \mathbb{N}$, soit x_n la solution de $\tan x = x$ qui appartient à $[n\pi, n\pi + \pi/2[$. Donner un développement de x_n à la précision $1/n^2$.

Exercice 16

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = \prod_{i=0}^{n-1}(X - i)$. Quelle est la multiplicité maximale d'une racine de $P - c$ pour $c \in \mathbb{R}$.

Exercice 17

Soit P et Q dans $\mathbb{C}[X]$ non constants. On suppose que P et Q (resp. $P - 1$ et $Q - 1$) ont les mêmes racines. Montrer que $P = Q$.

Exercice 18

Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$, où E est un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que $\dim \operatorname{Ker} g \circ f \leqslant \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g$.

Exercice 19

Soit (u_n) la suite réelle définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n$ avec $a + b + c = 1$, u_0, u_1 et u_2 étant fixés. On suppose que (u_n) converge. Calculer sa limite.

Exercice 20

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$. Étudier la suite (u_n).

Exercice 21

Calculer $\frac{1}{1\times 2} - \frac{1}{3\times 4} + \frac{1}{5\times 6} + \dots$.

Exercice 22

Existe-t-il un segment de $]0, +\infty[$ non réduit à un point sur lequel ln coïncide avec une fraction rationnelle ?

Exercice 23

Trouver les f dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$.

Exercice 24

Existe-t-il un isomorphisme d'algèbres entre $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$?

Exercice 25

Soient $h \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}$. On suppose : $\forall t \in [0,1], h''(t) \leqslant b$. Montrer : $h(0) - 2h(1/2) + h(1) \leqslant b/4$.

Exercice 26

Soit F l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ vérifiant $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Calculer $\inf_{f\in F}\left(\int_0^1 |f' - f|\right)$.

Exercice 27

Montrer que la suite de terme général $\sin(\ln n)$ n'a pas de limite.

Exercice 28

Énoncer et établir la formule de Taylor avec reste intégral.

Exercice 29

Soit $f\ : [0,1] \to [0,1]$ donnée par $f(x) = 2x(1-x)$. Étudier la convergence de (u_n) donnée par $u_0 \in [0,1]$ et d'itératrice f.

Exercice 30

Soit f un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme croissant de $[0,1]$ sur $[0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'on peut trouver une suite $(x_{k,n})_{0\leqslant k\leqslant n}$ telle que :

$$\forall\, k \in [\![1,n]\!], \frac{k-1}{n} \leqslant x_{k,n} \leqslant \frac{k}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f'(x_{k,n})} = n.$$

Exercice 31

Résoudre sur $]0,\pi[$: $y'' + y = \operatorname{cotan} x$.

Exercice 32

Trouver l'image du cercle unité par $f\ : \mathbb{C} \setminus \{j, j^2\}, z \mapsto \frac{1}{1+z+z^2}$.

Exercice 33

Soit E un espace euclidien de dimension 3, r dans $SO(E)$ et s une symétrie orthogonale. Caractériser $s \circ r \circ s$.

Exercice 34

Soit a, b, c les racines de $X^3 - X + 1$. Résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x + y + z & = & 0 \\ ax + by + cz & = & 2 \\ a^2x + b^2y + c^2z & = & -3 \end{array} \right.$$

Exercice 35

Calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$$

Exercice 36

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $|a_{i,j}| \leqslant C$ pour tout couple (i, j). Montrer que $|\det A| \leqslant n!C^n$. En utilisant Gram-Schmidt, montrer que $|\det A| \leqslant n^{n/2}C^n$.

Exercice 37

Soit $f\ : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que f est k-lipschitzienne si et seulement si f^+ et f^- le sont.

Exercice 38

Soit $D = Diag(1, 2, \ldots, n)$. Dénombrer les matrices semblables à D et commutant à D.

Exercice 39

Montrer que $\{x + y\sqrt{3}/x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}, x^2 - 3y^2 = 1\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

Exercice 40

Montrer que tout sous-espace strict de $\mathbb{R}^n$ est intersection finie d'hyperplans.

Exercice 41

Montrer que toute M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est somme de deux matrices inversibles.

Exercice 42

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Existe-t-il $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = X^3$?

Exercice 43

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F et G des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que F et G ont un supplémentaire commun si et seulement si ils ont même dimension.

Exercice 44

Soit $a_0, \dots, a_n$ des réels non nuls distincts. Pour $i = 0, \dots, n$, on pose $\varphi_i : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}, P \mapsto \int_0^{a_i} P(t)\mathrm{d}t$. Montrer que $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]^*$.

Exercice 45

Montrer qu'une matrice de rang 1 est annulée par un polynôme de degré au plus deux.

Exercice 46

Montrer que tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie $d \geqslant 2$ admet un plan vectoriel stable.

Exercice 47

Soit la suite réelle (u_n) telle que $u_0 \in]0, \pi[$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$. Donner un développement asymptotique à deux termes de (u_n).

Exercice 48

On pose $\mathcal{A} = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

1 Soit $f \in \mathcal{A}$ non constante. Montrer que la famille $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre.

2 Quelles sont les sous-algèbres de dimension finie de $\mathcal{A}$?

3 Pour $c \in [a, b]$, on note $\mathcal{I}_c$ l'ensemble des $f \in \mathcal{A}$ telles que $f(c) = 0$. Montrer que $\mathcal{I}_c$ est un idéal de $\mathcal{A}$.
On dit d'un idéal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$ qu'il est *maximal* si $\mathcal{I}$ est un élément maximal au sens de l'inclusion parmi les idéaux de $\mathcal{A}$ distincts de $\mathcal{A}$.

4 Montrer que les idéaux maximaux de $\mathcal{A}$ sont les $\mathcal{I}_c$, où c parcourt $[a, b]$.

Exercice 49

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ Déterminer le rang de la matrice $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

Exercice 50

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $p, q \in \mathbb{C}$ pour que les trois racines a, b, c de $X^3 + pX + q$ vérifient $a^2 + b^2 = 1 + c^2$.

Exercice 51

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$. Que vaut alors le rang de f ?

Exercice 52

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}$. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 53

Soit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$.

1 Montrer que (u_n) converge et calculer sa limite l.

2 Trouver un équivalent simple de $u_n - l$.

CHAPITRE 2

Friandises (corrigés)

Aller aux énoncés 1

Corrigé de l'exercice 1 ()

Un tel sous-anneau doit contenir $\{\frac{m}{5^n}, (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\}$. Réciproquement, on verifie que cet ensemble est bien un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.

Corrigé de l'exercice 2 ()

1 Comme $X^3 - 2$ est de degré 3, il est irréductible sur $\mathbb{Q}$ si et seulement si il n'a pas de racine rationnelle, ce que l'on vérifie aisément.
Attention ! $(X^2+1)^2$ est sans racine réelle, mais n'est pas irréductible sur $\mathbb{R}$.
2 A est clairement une partie de $\mathbb{C}$, comprenant 1, stable par différence.
De plus, si P est un polynôme à coefficients rationnels, alors $P(\alpha) \in A$: en effet, il suffit pour l'observer d'effectuer la division euclidienne de P par $X^3 - 2$, puis d'évaluer la relation obtenue en α (on rappelle que le reste est également à coefficients rationnels). Cela permet de montrer que A est stable par produit.
Enfin, soit $(a,b,c) \in \mathbb{Q}^3$ tel que $a + b\alpha + c\alpha^2 \neq 0$. En particulier, $(a,b,c) \in \mathbb{Q}^3$. D'après la question précédente, $X^3 - 2$ et $a + bX + cX^2$ sont premiers entre eux. En évaluant une relation de Bézout entre ces polynômes en α, on constate que $a + b\alpha + c\alpha^2$ est inversible dans A.
A est bien un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Corrigé de l'exercice 3 ()

Fait en TD : on raisonne (par exemple) par l'absurde en supposant en avoir une énumération $\{p_1, \ldots, p_n\}$, et on aboutit à une contradiction en construisant un nombre admettant au moins un diviseur premier congru à 3 distinct de $p_1, \ldots, p_n$. On peut prendre (par exemple) $(p_1 \ldots p_n)^2 + 2$.

Corrigé de l'exercice 4 ()

Soit N le cardinal de A, et $a_1, \ldots, a_N$ ses éléments. L'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{N} & \to & A^N \\ & n & \mapsto & (a_1^n, \ldots, a_N^n) \end{array}$$

n'est pas injective ($\mathbb{N}$ est infini, pas A^N), d'où le résultat.

Corrigé de l'exercice 5 ()

Soit $Q(Y) = Y^n + 1 = (Y + z_1) \ldots (Y + z_n)$. On décompose en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)(Y)$ la fraction $P(XY)/Q(Y)$ (il fallait y penser) :

$$\frac{P(XY)}{Q(Y)} = T(X) - \sum_{k=1}^{n} \frac{zkP(z_k X)}{n(Y - z_k)}.$$

On dérive selon Y puis on évalue en 1 afin d'obtenir le résultat souhaité.

Corrigé de l'exercice 6 ()

Si l'une des matrices est inversible (par exemple A), alors AB et BA sont semblables (dans notre exemple, $AB = A^{-1}(AB)A$). Sinon, on utilise un argument de continuité : sur un voisinage de 0 $\det((A+tI_n)B - XI_n) - \det(B(A+tI_n) - XI_n) = 0$, sauf peut-être en 0 (car $A + tI_n$ est inversible, sauf pour un nombre fini de valeurs de t). Cette application étant en outre continue en la variable t, on obtient le résultat voulu en faisant tendre t vers 0.
Remarque : pour parler de continuité de cette application, il faut munir $\mathbb{R}_n[X]$ d'une norme (n'importe laquelle convient).

Corrigé de l'exercice 7 ()

On l'a vu en TD : fixer ε strictement positif arbitrairement, à 1 par exemple, prendre un module d'uniforme continuité associé η, puis $a \in [0, 1[$ tel que $|1 - a| \leqslant \eta$: f est bornée car continue sur le segment $[0, a]$, et majorée en valeur absolue par $|f(a)| + 1$ sur $[a, 1[$, donc bornée sur $[0, 1[$.
On peut même montrer que toute fonction uniformément est encadrée par des fonctions affines, et qu'en réalité, f admet une limite finie en 1 (vu en DM).

Corrigé de l'exercice 8 ()

1 L'ensemble $\mathcal{C}$ considéré est une conique (éventuellement dégénérée), de type ellipse. On trouve qu'elle admet $(-1, 2)$ pour centre. L'étude qui suit est standard.

2 On demande de calculer une aire délimitée par une ellipse. On sait que si a et b sont ses demi-axes, alors cette aire vaut πab. On peut également paramétrer l'ellipse et utiliser Green-Riemann.

Corrigé de l'exercice 9 ()

Le cas où $p = 2$ est trivial (et la réponse est alors 2).
Traitons le cas où p est impair. L'application carré est un morphisme du groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, de noyau $\{\pm 1\}$, il y a donc $\frac{p+1}{2}$ carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Corrigé de l'exercice 10 ()

L'existence et l'unicité est assurée par la structure euclidienne dont on munit $\mathbb{R}_n[X]$. Si $\deg A < n$, considérer $P = XA$ pour obtenir une absurdité.

Corrigé de l'exercice 11 ()

1 Notant S cette somme, et N l'ordre de G, $S^2 = NS$, donc NS est un projecteur, de trace nulle, donc nul.

2 L'astuce consiste à partir d'un projecteur p sur V, et à le « moyenner » grâce aux différents éléments de G. On pose :

$$p' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gpg^{-1}.$$

On vérifie facilement que p' est un projecteur (c'est un endomorphisme de E vérifiant $p'^2 = p'$), laissant fixe tout vecteur de V. Comme l'image de p' est incluse dans V (grâce au p dans chacun des termes de la somme), p' est donc un projecteur sur V parallèlement à un sous-espace vectoriel W. On vérifie que W convient : c'est bien un supplémentaire de V dans E, et si on note $q = \mathrm{Id} - p'$, q est un projecteur sur W commutant avec tout élément g de G :

$$q \circ g = g \circ q.$$

En égalant les images, on obtient $W = g(W)$, ce que l'on souhaitait.

Corrigé de l'exercice 12 ()

1 Par irrationnalité de $\sqrt{2}$, G est une partie de $\mathbb{R}^*$, évidemment non vide. On vérifie de plus que G est stable par produit et par passage à l'inverse pour conclure.
C'est facile pour l'inverse (avec des notations évidentes, celui de $x + \sqrt{2}y \in G$ est $x - \sqrt{2}y \in G$, ça l'est un peu moins pour le produit, car il faut prouver (avec des notations évidentes) que $xx' + 2yy' \in \mathbb{N}^*$: c'est un entier relatif par structure d'anneau de $\mathbb{Z}$, non nul (car impair, x et x' l'étant nécessairement).

2 G est en fait un sous-groupe de $\mathbb{R}_+^*$. On applique l'isomorphisme logarithme, afin de se ramener au cas connu des sous-groupes (additifs) de $\mathbb{R}$. Le sous-groupe $\ln(G)$ de $\mathbb{R}$ n'est pas dense, car ses éléments positifs sont ceux de la forme $\ln(x + \sqrt{2}y)$, où $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, et $x^2 - 2y^2 = 1$. $\ln(G)$ est donc monogène, et G également (il lui est isomorphe).

Corrigé de l'exercice 13 ()

Supposons disposer d'un tel n. Regardons d'abord sa congruence modulo 7 : à une certaine puissance, n doit être congru) 3 modulo 7, ce qui exclut les congruences $0, \pm 1, 2$ et 4 modulo 7.
Si $n \sim 3[7]$, alors les $k \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels $n^k \sim 3[7]$ sont ceux congrus à 1 modulo 6.
Si $n \sim 5[7]$, alors les $k \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels $n^k \sim 3[7]$ sont ceux congrus à 5 modulo 6.
Les n convenant sont donc ceux congrus à 5 (second cas) où à 31 (premier cas) modulo 7.

Corrigé de l'exercice 14 ()

Erreur d'énoncé ?

Corrigé de l'exercice 15 ()

On a $\tan(x_n - n\pi) = \tan(x_n) = x_n$, or $x_n - n\pi \in [0, \pi/2[$, donc

$$x_n - n\pi = \arctan(x_n) = \frac{\pi}{2} + \mathrm{o}(1).$$

Ainsi a-t-on : $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \mathrm{o}(1)$.
Pour aller plus, loin, on écrit, plus finement :

$$x_n - n\pi = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x_n}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right),$$

obtenant ainsi :

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Pour aller plus loin, on écrit :

$$\begin{aligned} x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} &= -\arctan\left(\frac{1}{x_n}\right) \\ &= -\arctan\left(\frac{1}{n\pi - \frac{\pi}{2} + \mathrm{o}(1/n)}\right) \\ &= -\frac{1}{n\pi - \frac{\pi}{2} + \mathrm{o}(1/n)} + \mathrm{o}(1/n^3) \\ &= -\frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + \mathrm{o}(1/n^2) \end{aligned}$$

Finalement,

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + \mathrm{o}(1/n^2).$$

Corrigé de l'exercice 16 ()

D'après le théorème de Rolle, P' est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. $P-c$, de polynôme dérivé P', ne peut donc avoir que des racines simples ou doubles.

Corrigé de l'exercice 17 ()

Notons $n = \max(\deg(P), \deg(Q))$, et supposons par exemple $\deg(P) = n$. Montrons que $P - Q$ a au moins $n + 1$ racines, comptées avec multiplicités. Pour ce faire, on observe que les racines communes à P et à Q d'une part, celles communes à $P - 1$ et $Q - 1$ d'autre part, sont racines de $P - Q$. Par ailleurs, ces deux ensembles de racines, de cardinaux respectifs N_0 et N_1, sont disjoints : $P - Q$ admet au moins $N_0 + N_1$ racines distinctes. P et P' (resp. $P - 1$ et P') possèdent $n - N_0$ (resp. $n - N_1$) racines communes, comptées avec multiplicités, donc P' possède au moins $n - N_0 + n - N_1$ racines, comptées avec multiplicités, ce qui conduit, en considérant les degrés, à $2n - N_0 - N_1 \leqslant n - 1$, puis à $n + 1 \leqslant N_0 + N_1$.
Le polynôme $P - Q$ a plus de racines que son degré, il est nul : $P = Q$.

Corrigé de l'exercice 18 ()

Appliquer proprement le théorème du rang à $g_{|\,\mathrm{Im}(f)}\ : \mathrm{Im}(f) \to E$, d'image $\mathrm{Im}(g \circ f)$, puis utiliser le théorème du rang pour g et $g \circ f$, et l'inégalité $\dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)) \leqslant \mathrm{rg}(f)$.

Corrigé de l'exercice 19 ()

Soit $P = X^3 - aX^2 - bX - c$. Par hypothèse, P admet 1 pour racine. Supposons que P admette deux autres racines r et r'. On sait qu'il existe alors des scalaires α, β, γ, tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \alpha + \beta r^n + \gamma r'^n.$$

Puisque (u_n) converge, il faut que βr^n et $\gamma r'^n$ tendent vers 0 lorsque n tend vers l'infini. La limite cherchée vaut donc α.
De plus, α est déterminé par la relation :

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & r & r' \\ 1 & r^2 & r'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

Un calcul simple donne, en inversant le système

$$\alpha = \frac{1}{(r-1)(r'-1)} \left(rr'u_0 - (r+r')u_1 + u_2 \right),$$

soit, en utilisant les relations coefficients-racines :

$$\alpha = \frac{1}{2-a+c}(cu_0 + (1-a)u_1 + u_2).$$

Nous n'avons traité qu'un cas, les autres (lorsque 1 est racine double de P, racine triple, ou que P admet une autre racine double) sont analogues.

Corrigé de l'exercice 20 ()

4.4TD17

Corrigé de l'exercice 21 ()

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+2)} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 x^{2k} \mathrm{d}x + \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \int_0^1 x^{2k+1} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (1-x) \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{(1-x)(1+(-x^2)^{n+1})}{1+x^2} \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

On trouve facilement à partir de cette réécriture $\pi/4 - \ln(2)/2$ comme limite.

Corrigé de l'exercice 22 ()

Non, car si $F(t) = \ln(t)$ sur un segment de $\mathbb{R}_+^*$ no réduit à un point, alors, en dérivant, $F'(t) = \frac{1}{t}$ sur ce segment, donc $F' = 1/X$ (pour passer d'une égalité de deux fonctions rationnelles sur un intervalle non réduit à un point à une égalité des fractions rationnelles correspondantes, multiplier par un dénominateur commun pour arriver à une égalité de polynômes). Or $\frac{1}{X}$ n'est pas la dérivée d'une fraction rationnelle (pour le constater, dériver une fraction rationnelle décomposée en éléments simples).

Corrigé de l'exercice 23 ()

Soit f une telle fonction. Si $f(0) = 0$, alors, en prenant $y = 0$ dans la relation fonctionnelle (désignée $\mathcal{E}$ dans la suite), on constate que f est identiquement nulle. Supposons désormais $f(0) \neq 0$. En prenant $x = y = 0$ dans $\mathcal{E}$, on obtient $f(0) = 1$. En prenant $x = 0$, on constate que f est paire.
Par continuité de f, il existe $c > 0$ tel que f ne s'annule pas sur $[0, c]$.
Supposons $f(c) < 1$. On écrit $f(c) = \cos(\theta)$, où $\theta \in]0, \pi/2[$ ($\theta = \arccos(f(c))$). Notons $\omega = \frac{\theta}{c}$, de sorte que $f(c) = \cos(\omega c)$. En prenant $x = y$ dans $\mathcal{E}$, on a, pour tout réel x :

$$f(2x) + 1 = 2f(x)^2.$$

En prenant $x = c/2$, et sachant que $f(c/2) > 0$ (par choix de c), on a

$$f(c/2) = \sqrt{f(c) + 1}/2 = \cos(\omega c/2).$$

Plus généralement, par une récurrence immédiate,

$$f(c/2^n) = \cos(\omega c/2^n).$$

Une nouvelle récurrence (et la parité de f) permet de montrer que

$$f(kc/2^n) = \cos(\omega kc/2^n),$$

pour tout $(k, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.
Par continuité de f, et densité de $\{kc/2^n, (k, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\}$ dans $\mathbb{R}$, on a, pour tout réel x :

$$f(x) = \cos(\omega x).$$

Dans le cas où $f(c) \geqslant 1$, on vérifie comme ci-dessus l'existence de $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout réel x, $f(x) = \mathrm{ch}(\omega x)$.
Réciproquement, ces fonctions conviennent.

Corrigé de l'exercice 24 ()

Non, car l'élément unité de $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ admet une racine carrée, pas celui de $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$.

Corrigé de l'exercice 25 ()

h était sans doute supposée de classe $\mathcal{C}^2$. On applique la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2, en 1/2, et on l'évalue en 1 et en 0, obtenant :

$$h(1) = h(1/2) + h'(1/2)/2 + \int_{1/2}^{1} h''(t)(1-t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad h(0) = h(1/2) - h'(1/2)/2 + \int_{1/2}^{0} h''(t)(-t)\mathrm{d}t,$$

ce qui, en sommant, nous permet de nous débarrasser du terme gênant en $h'(1/2)$:

$$h(0) + h(1) - 2h(1/2) = \int_{1/2}^{1} h''(t)(1-t)\mathrm{d}t + \int_{1/2}^{0} h''(t)(-t)\mathrm{d}t.$$

Une majoration banale donne alors immédiatement le résultat voulu.

Corrigé de l'exercice 26 ()

Soit $f \in F$. Cherchons à minorer finement $\int_0^1 |f'-f|$:

$$\int_0^1 |f'-f| \geqslant \int_0^1 |f'(t)-f(t)|e^{-t}\mathrm{d}t \geqslant \left|\int_0^1 (f'(t)-f(t))e^{-t}\mathrm{d}t\right| = \left|\left[f(t)e^{-t}\right]_0^1\right| = \frac{1}{e}.$$

La borne inférieure cherchée m est donc supérieure ou égale à $\frac{1}{e}$. Prouvons l'égalité. Pour ce faire, nous allons introduire des fonctions s'approchant du cas idéal. Le cas idéal serait celui où $\int_0^1 |f'-f| = 0$, donc celui où f est proportionnelle à l'exponentielle. Afin que $f(1) = 1$, on pense à prendre $\varphi \ : t \mapsto e^{t-1}$, qui, cependant, n'est pas nulle en 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit f_n, coïncidant avec φ sur $[1/n, 1]$, de la forme $t \mapsto P(t)e^{t-1}$ sur $[0, 1/n]$, où P est un polynôme, de sorte que $f_n(0) = 0$, $f_n(1/n) = \varphi(1/n) = e^{(1-n)/n}$, et $f_n'(1/n) = \varphi'(1/n) = e^{(1-n)/n}$ (afin d'avoir un raccord $\mathcal{C}^1$). On prend $P = n(2X - nX^2)$. On a bien $f_n \in F$. De plus,

$$\int_0^1 |f_n' - f_n| = \int_0^{1/n} 2ne^{x-1}(2-2nx)\mathrm{d}x = 2\frac{1}{e}\left(n^2e^{1/n} - n^2 - n\right).$$

Un calcul simple de développement limité montre que $\left(\int_0^1 |f_n' - f_n|\right)$ converge vers $1/e$, qui est donc bien la borne inférieure cherchée.
Remarque : dans ces exercices, il faut penser à introduire un « facteur intégrant » (*i.e.* on multiplie par un terme permettant d'intégrer, ici e^{-t}).

Corrigé de l'exercice 27 ()

Raisonnons par l'absurde, en supposant que cette suite (u_n) admette une limite l. l est un réel, car (u_n) est bornée. En considérant u_{2n}, on constate que $(\cos(\ln n))$ converge également, vers l'. De plus, $l^2 + l'^2 = 1$. En considérant (u_{n^2}), on obtient $l = 0$, puis $|l'| = 1$, ce qui conduit à une absurdité en revenant à (u_{2n}).

Corrigé de l'exercice 28 ()

Cours

Corrigé de l'exercice 29 ()

Si $u_0 \in \{0, 1\}$, alors la suite stationne en 0. Sinon, (u_n) converge vers le point fixe superattractif $1/2$.

Corrigé de l'exercice 30 ()

C'est une variante de 19TD15, où l'on travaille avec f^{-1} plutôt que f.

Corrigé de l'exercice 31 ()

Un peu compliqué sans la méthode de variation de la constante pour l'ordre 2, que vous verrez cette année.

Corrigé de l'exercice 32 ()

En utilisant la notation exponentielle (pratique pour paramétrer le cercle unité), on constate que l'image cherchée est le symétrique par l'axe des abscisses de l'hyperbole d'équation polaire $\rho = 1/(1 + 2\cos(\theta))$.

Corrigé de l'exercice 33 ()

r est une rotation d'axe Δ, orienté par $\vec{u}$, d'angle de mesure α. $s \circ r \circ s$ est la rotation d'axe $s(\Delta)$ orienté par $s(\vec{u})$, d'angle de mesure α (vérifier que $s(\Delta)$ est invariant point par point par s.

Corrigé de l'exercice 34 ()

Tout d'abord, ce système admet un unique triplet solution, car son déterminant, le Vandermonde de (a, b, c), est non nul. En effet, $X^3 - X + 1$ n'a pas de racine multiple, car il est premier avec son polynôme dérivé $3X^2 - 1$.
Plutôt que de se lancer dans les calculs, rappelons les relations coefficients-racines :

$$a + b + c = 0, ab + bc + ac = -1 \quad \text{et} \quad abc = -1.$$

La première ligne du tableau nous donner l'idée de tenter le triplet $(x, y, z) = (a, b, c)$. On a $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2-2(ab+bc+ac) = 2$, donc les deux premières équations sont satisfaites. Enfin, puisque $x^3 = x-1$ si $x \in \{a, b, c\}$, on a bien $a^3+b^3+c^3 = -3$: l'unique triplet solution est (a, b, c).

Corrigé de l'exercice 35 ()

Ce déterminant est nul, puisque $(a + b + c)L_1 = L_2 + L_3$.

Corrigé de l'exercice 36 ()

La première inégalité résulte immédiatement de l'inégalité triangulaire et de l'expression du déterminant comme somme indexée par $\mathcal{S}_n$.
Considérons les vecteurs colonnes de A : si l'un est nul, alors $\det(A) = 0$, et le résultat est évident. Supposons les colonnes toutes non nulles. En identifiant (classiquement) $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$, et en munissant ce dernier de sa structure euclidienne canonique,puis en normalisant chaque vecteur colonne (de norme au plus $\sqrt{n}C^n$), on est ramené à prouver $\det(A) \leqslant 1$ dans le cas où toutes les vecteurs sont normés. On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, sans normaliser les projetés orthogonaux, afin de ne pas modifier le déterminant. La matrice obtenue a des colonnes orthogonales $C_1, \ldots, C_n$, et de norme au plus 1. En normalisant ces vecteurs colonnes, on obtient une matrice orthogonale : elle est de déterminant ± 1. Comme $\|C_i\| \leqslant 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\det(A) = \|C_1\| \ldots \|C_n\| \leqslant 1$, le résultat est prouvé.

Corrigé de l'exercice 37 ()

Le sens direct est facile (pour x, y deux points fixés de I, distinguer selon les signes de $f(x)$ et de $f(y)$. Pour la réciproque, supposons f^+ et f^- k-lipschitziennes, et soit $x, y \in I$, $x < y$. Le seul cas intéressant est celui où $f(x)f(y) < 0$, par exemple $f(x) < 0 < f(y)$. Par continuité de l'application lipschitzienne f, il existe $z \in]x, y[$ tel que $f(z) = 0$. Par hypothèse, $\left|\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\right| \leqslant k$ et $\left|\frac{f(y)-f(z)}{y-z}\right| \leqslant k$ (car $f(z) = f^+(z) = f^-(z)$). On a donc $0 \leqslant (f(z) - f(x)) \leqslant k(z - x)$ et $0 \leqslant (f(y) - f(z)) \leqslant k(y - z)|$, d'où $0 \leqslant (f(y) - f(x)) \leqslant k(y - x)$ en sommant, puis le résultat.

Corrigé de l'exercice 38 ()

On a vu que le commutant d'une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont distincts deux à deux sont les matrices diagonales. Comme le polynôme caractéristique est un invariant de similitude, les matrices semblables à D et commutant avec D sont les matrices diagonales dont les coefficients diagonaux sont $1, \ldots, n$: il y en a $n!$.

Corrigé de l'exercice 39 ()

Notons G cet ensemble. Il est clairement non vide, puisqu'il comprend 1, et est une partie de $\mathbb{R}_+^*$, car si $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{Z}$ vérifient $x^2 - 3y^2 = 1$, alors $x + \sqrt{3}y$ ou $x - \sqrt{3}y$ est positif, donc les deux le sont, puisque leur produit vaut 1 (et ils sont non nuls). On montre comme dans l'exercice 2 que G est stable par produit et passage à l'inverse.

Corrigé de l'exercice 40 ()

Par récurrence sur la codimension du sous-espace.

Corrigé de l'exercice 41 ()

Il existe un réel non nul t pour lequel $M - tI_n$ est inversible ($\det(M - tI_n)$ est un polynôme de degré n en t). M est la somme des matrices inversibles $M - tI_n$ et tI_n.

Corrigé de l'exercice 42 ()

Pas toujours, comme en témoigne le cas où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si une telle matrice X existait, alors elle ne serait pas inversible ($X^6 = A^2 = 0$). Elle serait semblable à une matrice M de première colonne nulle. De même, le coefficient en position $(2, 2)$ de M devrait être nul. On aurait alors $M^2 = 0$, puis $X^2 = 0$, puis $A = 0$, ce qui est absurde.

Corrigé de l'exercice 43 ()

Le sens direct est évident. Pour le sens indirect, on peut encore raisonner par récurrence sur la codimension (commune) de F et G. Pour l'hérédité, si F et G sont deux sous-espaces vectoriels stricts de E, on choisit $x \in E \setminus (F \cup G)$, et on applique l'hypothèse de récurrence à $F + \mathbb{K}x$ et à $G + \mathbb{K}x$.

Corrigé de l'exercice 44 ()

Soit $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \varphi_k$ une combinaison linéaire à résultat nul de $(\varphi_0, \ldots, \varphi_n)$. En évaluant cette relation en $1, X, \ldots, X^n$, et en utilisant un déterminant de Vandermonde, on constate que cette combinaison linéaire est triviale : $(\varphi_0, \ldots, \varphi_n)$ est une famille libre de $n + 1 = (\dim(\mathbb{R}_n[X]^*))$ de vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]^*$: c'en est une base.

Corrigé de l'exercice 45 ()

Soit u un endomorphisme de rang 1 d'un espace vectoriel. Soit y un vecteur directeur de $\mathrm{Im}(u)$, $x \in E$ tel que $y = u(x)$. On sait que $\mathbb{K}x \oplus \mathrm{Ker}(u) = E$. De plus, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u^2(x) = \lambda y = \lambda u(x)$. On vérifie alors que $u^2 = \lambda u$.

Corrigé de l'exercice 46 ()

C'est difficile pour un Sup. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $d \geqslant 2$ ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$). L'ensemble $\mathcal{I}$ des polynômes annulateurs de f est un sous-groupe de $\mathbb{K}[X]$, stable par produit par un élément quelconque de $\mathbb{K}[X]$: c'est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, qui est principal. Cet idéal est non nul, car $(\mathrm{Id}\,, f, \dot{;} f^{d^2})$ est liée. Il existe donc un unique polynôme unitaire M tel que $CI = M\mathbb{K}[X]$ (c'est le *polynôme minimal* de f).
Si ce polynôme admet deux racines distinctes λ et μ dans $\mathbb{K}$, alors il existe deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E tels que $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$ et $f(\vec{v}) = \mu\vec{v}$. Comme $\lambda \neq \mu$, $(\vec{u}, \vec{v})$ est libre, d'où le résultat.
Si ce polynôme est de la forme $(X - \lambda)^n$, où $\lambda \in \mathbb{K}$ et $n \geqslant 2$, alors $g = f - \lambda\mathrm{Id}$ est nilpotent, et il existe $x \in E$ tel que $(x, g(x), \dots, g^{n-1}(x))$ soit libre. On vérifie alors que $\mathrm{Vect}(g^{n-2}(x), g^{n-1}(x))$ convient.
Si ce polynôme est de la forme $(X - \lambda)$, où $\lambda \in \mathbb{K}$, c'est évident (f laisse stable *tout* plan vectoriel).
Il reste à traiter le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et où f a une racine complexe non réelle. Dans ce cas, M admet un diviseur irréductible de la forme $X^2 + bX + c$, où $b^2 - 4ac < 0$ (et $b, c \in \mathbb{R}$). L'endomorphisme $f^2 + bf + c\mathrm{Id}$ n'est pas injectif (par définition de M), il existe $x \in E$ non nul tel que $f^2(x) = -bf(x) - cx$: le plan $\mathrm{Vect}(x, f(x))$ convient.

Corrigé de l'exercice 47 ()

On a vu en 12TD22 comment montrer que cette suite convergeait vers 0, et, plus précisément, $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$, en trouvant α tel que $\left(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha\right)$ converge vers un réel non nul (on trouve $\alpha = -2$). Pour aller plus loin, on va préciser le comportement de $\left(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha\right)$.
On a (je ne détaille pas les calculs) :

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} = \frac{1}{\sin(u_n)^2} = \frac{1}{u_n^2}\left(1 + \frac{u_n^2}{3} + \frac{u_n^4}{15} + \mathrm{o}(u_n^4)\right),$$

d'où

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{3} = \frac{u_n^2}{15} + \mathrm{o}(u_n^2) \sim \frac{u_n^2}{15} \sim \frac{1}{5n}.$$

En utilisant le résultat 1.b du DM13, on peut sommer les équivalents (attention, il faut que les termes soient de signe constant, au moins à partir d'un certain rang), ce qui conduit à :

$$\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} - \frac{n}{3} \sim \frac{\ln(n)}{5},$$

puis à

$$u_n = \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10}\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}\right).$$

Corrigé de l'exercice 48 ()

1 Soit $\sum_{k=0}^{N} \lambda_k f^k$ une combinaison linéaire à résultat nul de $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$. f étant continue et non constante, son image est infinie, donc $\sum_{k=0}^{N} \lambda_k X^k$ a une infinité de racines : ce polynôme est nul, ainsi que ses coefficients $\lambda_0, \dot{;} \lambda_N$: $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.

2 D'après la question précédente, la seule sous-algèbre unitaire de dimension finie de $\mathcal{C}(A)$ est celle constituée des fonctions constantes. Si on admet une sous-algèbre non unitaire, il faut rajouter $\{0\}$.

3 $\mathcal{I}_c$ est un sous-groupe de $\mathcal{A}$, stable par multiplication par un élément quelconque de $\mathcal{A}$: c'est un idéal de $\mathcal{A}$.

4 Un idéal de la forme $\mathcal{I}_c$ est bien maximal : en effet, si $\mathcal{I}$ est un idéal de $\mathcal{A}$ contenant strictement $\mathcal{I}_c$, alors il contient une certaine fonction f non nulle en c. Il contient également $g \ : x \mapsto |x-c|$. Il contient donc f^2+g^2, qui ne s'annule pas sur $[a,b]$, et qui est donc inversible : il comprend donc enfin $1_{\mathcal{A}}$, et vaut donc $\mathcal{A}$.
Réciproquement, soit $\mathcal{I}$ un idéal maximal de $\mathcal{A}$. Supposons qu'il ne soit pas de la forme précédente : en particulier, on peut trouver $f \in \mathcal{I}$, non nulle en a. On introduit :

$$\Omega = \{c \in]a,b], \exists g \in \mathcal{I}, g_{|[a,c]} \text{ ne s'annule pas}\}.$$

Ω est une partie non vide de $]a,b]$ (on a écarté le cas sans intérêt où $a=b$). Notons c sa borne supérieure, et supposons $c<b$: par hypothèse, on peut trouver $h \in \mathcal{I}$ tel que $h(c) \neq 0$. De plus, il existe $\varepsilon > 0$ tel que h ne s'annule pas sur $[c-\varepsilon, c+\varepsilon] \subset]a,b[$. Enfin, puisque $c-\varepsilon \in \Omega$ il existe $g \in \mathcal{I}$, ne s'annulant pas sur $[a, c-\varepsilon]$. La considération de g^2+h^2 conduit à une absurdité sur la définition de c. On a nécessairement $c=b$, $\mathcal{I}$ contient un élément inversible, et vaut donc $\mathcal{A}$, ce qui est absurde.
Remarque : la notion de *compacité* simplifiera la dernière partie de cette solution.

Corrigé de l'exercice 49 ()

$2\,\mathrm{rg}(A)$ (immédiat).

Corrigé de l'exercice 50 ()

Écartons le cas où $q=0$, qui conduit à $p=-1/2$, choix pour lequel la relation est satisfaite.
Analyse : supposons cette relation vérifiée. D'après les relations coefficients-racines, $abc=-q$, $a+b+c=0$, et $ab+bc+ca=p$. On a donc $(a+b)^2=c^2$, d'où $ab=-1/2$, puis $c=2q$, et enfin $8q^2=-1-2p$.
Synthèse : si l'on suppose que $8q^2=-1-2p$, on vérifie aisément que $c=2q$ est racine de X^3+pX+q, et que les deux autres racines a et b vérifient $ab=-1/2$ (on a divisé par $q\neq 0$) et $a+b=-2q$, donc que $a^2+b^2=4q^2+1=1+c^2$.

Corrigé de l'exercice 51 ()

Soit $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$. On vérifie classiquement que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E. En particulier, $(f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est libre, donc $\mathrm{rg}(f) \geqslant n-1$. Comme f est nilpotent, il n'est pas inversible : $\mathrm{rg}(f) = n-1$.

Corrigé de l'exercice 52 ()

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique (*i.e.* rendant la base canonique orthonormée). Soit J une matrice carré de taille n, dont tous les coefficients valent ± 1, et ont même signe que ceux de A (en même position). On a $(A|J) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|$, A est de norme $\sqrt{n}$, et J est de norme n : l'inégalité de Cauchy-Schwarz prouve l'inégalité souhaitée.
De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si A et J sont liées, *i.e.* A est une matrice (orthogonale) dont tous les coefficients ont même valeur absolue $1/\sqrt{n}$.

Corrigé de l'exercice 53 ()

12TD19

CHAPITRE 3

Nouvelles Friandises (énoncés)

Aller aux corrigés 4

Exercice 54

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall\, k \in [\![0, n]\!], P(k) = k/(k+1)$. Calculer $P(n+1)$.

Exercice 55

Soit, pour $k \in [\![1, n]\!]$, $f_k \ : x \mapsto \cos(kx)$ et $g_k \ : x \mapsto \sin(kx)$. Montrer que la famille $(f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n)$ est libre.

Exercice 56

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f)$ si et seulement si $E = \ker(f) + \mathrm{Im}(f)$. Que dire de plus si E est de dimension finie ?

Exercice 57

Soit $(a, b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ avec $a + b + c = \pi$. Rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & \cos(a) & \tan(a/2) \\ 1 & \cos(b) & \tan(b/2) \\ 1 & \cos(c) & \tan(c/2) \end{pmatrix}$.

Exercice 58

Soit $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & x \\ -1 & 0 & y \\ -1 & -1 & z \end{pmatrix}$ avec $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

1 Déterminer (x, y, z) pour que AB soit la matrice d'un projecteur.

2 Déterminer BA dans ce cas.

Exercice 59

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ pair, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA = -A$, $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Calculer $\det(A + tJ)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 60

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^2) = 0$. Montrer : $\det(A^2 + I_3) = 1 + \det(A)^2$.

Exercice 61

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non inversible. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que : $\forall\, p \in \mathbb{N}^*, (A + B)^p = A^p + B^p$.

Exercice 62

Soit $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace euclidien, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E et $(v_1, \ldots, v_n) \in E^n$ tel que $\|v_1\| + \cdots + \|v_n\| < 1$. On pose : $w_i = e_i + v_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Montrer que $(w_1, \ldots, w_n)$ est une base de E.

Exercice 63

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R}), f(0) = f'(0) = 0\}$. Si $f \in E$, on pose $N(f) = \|f + 2f' + f''\|_\infty$.

1 Montrer que N est une norme.

2 Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que : $\forall\, f \in E, \|f\|_\infty \leqslant cN(f)$.

Exercice 64

On munit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$. Soit T l'application qui à $f \in E$ associe $T(f)\ : x \mapsto f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)$.

1 Montrer que T est un endomorphisme continu de E. Déterminer sa norme subordonnée.

2 Soit $f \in E$ non nulle telle que $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe $x_0 \in]0, 1]$ tel que : $\forall\, x \in [0, x_0[, |f(x)| < |f(x_0)| = \|f\|_\infty$. En déduire que l'espace propre de T associé à la valeur propre 2 est de dimension 1.

Exercice 65

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique $a_n \in [0,1]$ tel que $a_n^n = \cos(a_n)$. Étudier la convergence de la suite (a_n) et déterminer sa limite éventuelle.

Exercice 66

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n^5 + nu_n = 1$. Étudier (u_n). Donner un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Exercice 67

Déterminer les primitives de $x \mapsto \left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^3$.

Exercice 68

Résoudre l'équation différentielle $xy' + y - \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} = 0$.

Exercice 69

Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et Φ l'application qui à $f \in E$ associe $\Phi(f) \ : x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.
Montrer que Φ est un endomorphisme de E ne stabilisant aucun sous-espace vectoriel de dimension finie non nulle.

Exercice 70

Déterminer les solutions maximales de $y' = (1+y^2)^{1/2}$.

Exercice 71

Soit $f \ : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ prolongée par continuité en $(0,0)$.
Étudier la différentiabilité en $(0,0)$ de f.

Exercice 72

Soit $f \ : (x, y) \mapsto xy \ln(x^2 + y^2)$.

1 Peut-on prolonger f par continuité en $(0, 0)$?

2 Déterminer les extrema de f.

Exercice 73

Soit A un anneau, a et b dans A tels que $1 + ab$ est inversible. Montrer que $1 + ba$ est inversible d'inverse $1 - b(1 + ab)^{-1}a$.

Exercice 74

Soit A un anneau non nul et $M = \{a \in A, a^2 = a\}$. On suppose que M est fini. Montrer que son cardinal est pair.

Exercice 75

Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z + |z|| = 2$.

Exercice 76

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ tel que $x + y + z = 0$. Montrer :

$$\frac{x^5 + y^5 + z^5}{5} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3}.$$

Exercice 77

Soit $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{C}[X]$. On suppose que toutes ses racines ont une partie imaginaire strictement négative. Montrer que le polynôme $Q(X) = \mathrm{Re}(a_0) + \mathrm{Re}(a_1)X + \cdots + \mathrm{Re}(a_n)X^n$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 78

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, f et g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que :

$$E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g) = \ker(f) + \ker(g).$$

1 Montrer que les deux sommes sont directes.

2 Donner un contre-exemple en dimension infinie.

Exercice 79

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, n]\!]$. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 s'écrit comme différence de deux matrices de rang p. En déduire qu'il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée de matrices de rang p.

Exercice 80

Soit $n \geqslant 3$ et H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que H contient une matrice nilpotente non nulle.

Exercice 81

Soit $f\ : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M + ({}^tM)$. Déterminer les valeurs propres de f. L'application est-elle diagonalisable ?

Exercice 82

Soit $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ et $\Phi\ : (f, g) \in E^2 \mapsto \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

1 Montrer que Φ définit un produit scalaire sur E.

2 Déterminer $\inf \left\{ \int_{-1}^{1} |e^x - P(x)|^2 \mathrm{d}x, P \in \mathbb{R}_2[X] \right\}$.

Exercice 83

Soit $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer : $2\,\mathrm{tr}(AB) \leqslant \mathrm{tr}(A^2) + \mathrm{tr}(B^2)$.

Exercice 84

Si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, montrer : $\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant n \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n^{3/2}$.

Exercice 85

Soit A une partie bornée et non vide de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il n'existe pas de $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f(A) \subset \mathbb{R} \setminus A$ et $f(\mathbb{R} \setminus A) \subset A$.

Exercice 86

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4u_n - u_n^2$. Montrer que (u_n) converge si et seulement si (u_n) est stationnaire.

Exercice 87

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f\ : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0$. Si $d \in \mathbb{R} \setminus [a,b]$, montrer qu'il existe une tangente à $\mathcal{C}_f$ passant par $(d,0)$.

Exercice 88

Soit $f, g \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}_+)$.

1 Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $\int_0^c f(t)\mathrm{d}t = \int_c^1 g(t)\mathrm{d}t$.

2 Montrer qu'il existe $d \in]0,1[$ tel que : $g(d)\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = f(d)\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 89

Calculer $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

Exercice 90

Pour $a \in \mathbb{R}$, soit S_a l'ensemble des solutions de $(1+x^2)y' - 2y = a$ sur $]-1,1[$.

1 Déterminer S_a, pour $a \in \mathbb{R}$. Est-ce un espace vectoriel ?

2 Soit $S = \bigcup_{a \in \mathbb{R}} S_a$. Est-ce un espace vectoriel ?

3 Montrer que l'application Φ qui à $f \in S$ associe le a tel que $f \in S_a$, est linéaire. Déterminer le noyau de Φ.

4 Déterminer la dimension de S. En donner une base.

Exercice 91

Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective et $A = \{n \in \mathbb{N}, \sigma(n) \geqslant n\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N}, \sigma(n) < n\}$.

1 Est-il possible que A soit infini et B fini ?

2 Est-il possible que A et B soient infinis ?

3 Est-il possible que A soit fini et B infini ?

Exercice 92

Soit G le sous-groupe de $\mathcal{S}_n$ formé des éléments qui fixent n. Montrer que G est maximal parmi les sous-groupes stricts de $\mathcal{S}_n$.

Exercice 93

Soit G et H deux groupes, avec G fini, f un morphisme de G dans H. Donner une relation entre $|G|$, $|\ker f|$ et $|\operatorname{Im} f|$.

Exercice 94

Déterminer les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ qui induisent une surjection de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 95

Déterminer les automorphismes de l'algèbre $\mathbb{C}(X)$.

Exercice 96

Soit f 1-lipschitzienne de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est un segment.

Exercice 97

Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que : $x_0 \in]0,1[$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n(1-x_n)$. Montrer que la suite de terme général nx_n est convergente et trouver sa limite.

Exercice 98

Soit $f\ : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2\cos(1/x)$. Étudier f au voisinage de 0.

Exercice 99

Soit f une fonction positive sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique fonction convexe $g \leqslant f$ telle que, pour toute fonction convexe $h \leqslant f$, on ait : $h \leqslant g$.

Exercice 100

Soit E un espace euclidien, $x_1, \ldots, x_p$ dans E et, pour $x \in E$, $f(x) = \sum_{i=1}^{p} \|x - x_i\|^2$. Montrer que f atteint son minimum sur R en un unique point que l'on précisera.

Exercice 101

Soit $(k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Déterminer $\max\left\{\prod_{i=1}^{k} x_i, (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=1}^{k} x_i = n\right\}$.

Exercice 102

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$. Montrer qu'il existe $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $f'(x_n) \to 0$.

Exercice 103

Soit X et Y deux ensembles finis. Dénombrer :

1 Les fonctions de X dans Y.

2 Les injections de X dans Y.

3 Les bijections de X sur Y.

4 Les surjections de X sur Y.

Exercice 104

Déterminer les groupes d'ordre 4 à isomorphisme près.

Exercice 105

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ non constant. Montrer que l'ensemble des nombres premiers p tels qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que p divise $P(n)$ est infini.

Exercice 106

Calculer $\prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - e^{2ik\pi/n}\right)$.

Exercice 107

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$ et $\omega = e^{2i\pi/n}$. Calculer $\prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1+\omega^k}{1-\omega^k}\right)$.

Exercice 108

Soit $(n, d) \in \mathbb{N}^2$ avec $0 \leqslant n < d$ et $z_0, \ldots, z_d$ les racines $(d+1)$-ièmes de l'unité. Soit $a_0, \ldots, a_n$ dans $\{z_0, \ldots, z_d\}$ deux à deux distincts et $P \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que : $\forall j \in [\![0, n]\!], |P(a_j)| \leqslant 2^{-d}$. Montrer : $\sup\{|P(z)|, |z| = 1\} < 1$.

Exercice 109

1 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Montrer que toute racine de P' est barycentre à coefficients positifs de racines de P.
2 Soit $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. Montrer que le polynôme $1 + X + aX^n$ possède au moins une racine de module inférieur ou égal à 2.

Exercice 110

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(0) \neq 0$. Montrer qu'il existe $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que P divise $R^3 - X$.

Exercice 111

Soit E l'ensemble des suites complexes périodiques. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. En donner une base.

Exercice 112

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 113

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ ayant sa diagonale nulle et des ± 1 en dehors de la diagonale. Montrer que A est inversible.

Exercice 114

Soit A une partie convexe et dense de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $A = \mathbb{R}^n$.

Exercice 115

Soit A une partie convexe fermée de $\mathbb{R}^2$ ne contenant pas 0. Montrer qu'il existe une droite vectorielle disjointe de A.

Exercice 116

1 Les groupes $(\mathbb{Z},+)$ et $(\mathbb{Q},+)$ sont-ils isomorphes ?
2 Les groupes $(\mathbb{R},+)$ et $(\mathbb{R}^*,\times)$ sont-ils isomorphes ?

Exercice 117

Soit $r \in \mathbb{Q}$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $r^n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $r \in \mathbb{Z}$.

Exercice 118

Soit $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $n \geqslant 2$. On suppose $a^n + b^n$ premier. Montrer que n est une puissance de 2.

Exercice 119

Soit a, b, c des complexes distincts tels que $|2a-b-c| = |2b-a-c| = |2c-a-b|$. Montrer que le triangle dont les sommets ont pour affixes a, b, c est équilatéral.

Exercice 120

Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Montrer qu'il existe un unique $b \in \mathbb{C}$ tel que : $b^2 = a$ et $\mathrm{Re}(b) > 0$. Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par : $u_0 \in \mathbb{C}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$ et $v_n = \frac{u_n - b}{u_n + b}$.
1 À quelle condition sur u_0 les suites (u_n) et (v_n) existent-elles ?
2 Montrer que $u_n \to b$ si et seulement si u_0 appartient à un demi-plan que l'on déterminera.

Exercice 121

Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système : $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 & = & 0 \\ x^3+y^3+z^3 & = & 0 \\ x^5+y^5+z^5 & = & 0 \end{cases}$

Exercice 122

Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X)P(X+1) = P(X^2)$.

Exercice 123

Soit $r \in \mathbb{R}$ et n un entier $\geqslant 2$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que : $\forall\, k \in [\![1, n]\!], P(k) = r^k$. Exprimer $P(n+1)$.

Exercice 124

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$ une racine multiple de P'. Montrer que a est racine de P. Le résultat est-il conservé si P n'est pas scindé ?

Exercice 125

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $\geqslant 2$. Si $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = P \circ \cdots \circ P$ (composée n fois). Montrer que $P(X) - X$ divise $P_n(X) - X$.

Exercice 126

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ et $k \in [\![2, n]\!]$ tels que $a_k a_{k-2} > 0$ et $a_{k-1} = 0$. Montrer que P admet au moins une racine complexe non réelle.

Exercice 127

Soit $\omega_1, \ldots, \omega_n$ les racines n-ièmes de l'unité. Simplifier, pour $p \in [\![0, n-1]\!]$:

$$S_p = \sum_{k=1}^{n} \frac{\omega_k^p}{X - \omega_k}.$$

Exercice 128

Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, 2\pi[$ distincts et, pour $k \in [\![1, n]\!]$, $f_k\ : x \mapsto e^{i\lambda_k x}$. Montrer que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre.

Exercice 129

Déterminer l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 130

Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Les matrices A et B sont-elles semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 131

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$ si et seulement si $u \circ u = 0$, $\dim(E)$ est paire et $\dim(E) = 2\,\mathrm{rg}(u)$.

Exercice 132

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit $\mathcal{H} = \{g \in \mathcal{L}(F,E), f \circ g \circ f = 0\}$.

1 Si f est un isomorphisme, montrer que $\mathcal{H} = \{0\}$.

2 Déterminer la dimension de $\mathcal{H}$.

Exercice 133

Déterminer le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par les matrices nilpotentes.

Exercice 134

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A^{-1} est un polynôme en A.

Exercice 135

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que A est semblable à $-A$ si et seulement si $\mathrm{tr}(A) = 0$.

Exercice 136

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose M semblable à $2M$. Montrer que M est nilpotente. Que dire de la réciproque ?

Exercice 137

Soit E un espace euclidien, $a, b \in E$ distincts de même norme. Montrer qu'il existe une unique réflexion s telle que $s(a) = b$.

Exercice 138

Soit $S^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. Existe-t-il $f\ : [0,1] \to S^1$ continue et bijective ?

Exercice 139

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Montrer que la restriction de f à un cercle n'est pas injective.

Exercice 140

Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} f(1/k)$. Déterminer la limite éventuelle de (u_n).

Exercice 141

Soit (a_n) et (b_n) définies par $a_0, b_0 \in]0,1[$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \int_0^1 \max\{x, b_n\} \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \int_0^1 \min\{x, a_n\} \mathrm{d}x.$$

1 Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant b_n \leqslant 1/2 \leqslant a_n \leqslant 1$.

2 Étudier la convergence de (a_n) et (b_n).

Exercice 142

Soit $a_0, b_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$. Montrer que (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite.

Exercice 143

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et bornée. Montrer que f est constante.

Exercice 144

Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Déterminer la limite de $\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$ quand $x \to 0^+$.

Exercice 145

Soit $(x,y) \in]0,1]^2$. Montrer : $\left(\frac{x+y}{2}\right)^{x+y} \leqslant x^x y^y$.

Exercice 146

Déterminer les $a \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, a^4 + ax + x^4 \geqslant 0$.

Exercice 147

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2, n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$ et $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^n + ax + b$. Montrer que f s'annule au plus trois fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 148

Déterminer les $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x+1) = f(x+\sqrt{3})$.

Exercice 149

Soit $a \in \mathbb{R}$ avec $|a| \neq 1$. Trouver les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 et telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - f(ax) = x$.

Exercice 150

Déterminer les $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(f(x)) = f(x)$.

Exercice 151

Trouver les couples de fonctions (f, g) où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x) - f(y) = (x - y) g\left(\frac{x + y}{2}\right).$$

Exercice 152

Déterminer les $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, (f'(x) - f(x)) f(x) = x$.

Exercice 153

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], [0, 1])$. On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$, que $f(0) = f(1)$ et que f est concave. Montrer que la longueur du graphe de f est inférieure à 3.

Exercice 154

Calculer $\sup \left\{ \int_0^1 f(x) x^{2010} \mathrm{d}x, f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}_+), \int_0^1 f(x)^2 \mathrm{d}x = 1 \right\}$.

Exercice 155

Donner le reste de la division euclidienne de 2010^{2010} par 13.

Exercice 156

Pour σ dans $\mathcal{S}_n$, soit $f(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} k\sigma(k)$. Déterminer les extrema de f et les points en lesquels ils sont atteints.

Exercice 157

Le cycle $(1, 2, \ldots, n)$ admet-il une racine carrée dans $\mathcal{S}_n$?

Exercice 158

Trouver les nombres complexes tels que $z^3 = \bar{z}$.

Exercice 159

Soit n un entier $\geqslant 2$. Calculer $\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{2ik\pi/n}\right)$.

Exercice 160

Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.

Exercice 161

Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $(X+4)P(X) = XP(X+1)$.

Exercice 162

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ simplement scindé sur $\mathbb{R}$. Pour $a \in \mathbb{C}$, que dire de la multiplicité des racines complexes de $P - a$?

Exercice 163

1 Montrer l'existence de $F \in \mathbb{R}(X)$ telle que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \operatorname{th}(5x) = F(\operatorname{th} x)$.

2 Décomposer F en éléments simples.

Exercice 164

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ distincts. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a_0, \ldots, a_n)$ pour que la famille $(P(\alpha_0 X), \ldots, P(\alpha_n X))$ soit une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 165

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(f) = 0$, $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer : $E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$.

Exercice 166

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Déterminer les endomorphismes de E ayant même matrice dans toute base.

Exercice 167

Soit $A = \operatorname{Diag}(1, 2, 1) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Pour $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose $u(M) = AM + MA$. Calculer $\det(u)$.

Exercice 168

Soit A, B deux matrices sembables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que leurs comatrices sont semblables.

Exercice 169

1 Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de matrices inversibles.
2 Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\mathrm{com}(AB) = \mathrm{com}(A)\,\mathrm{com}(B)$.
3 Donner le rang de $\mathrm{com}(A)$ en fonction de celui de A.

Exercice 170

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n = X^n + X^{n-1} + \cdots + X - 1$. Montrer que P_n admet une unique racine positive a_n. Donner la limite l de (a_n), puis un équivalent de $a_n - l$.

Exercice 171

Soit $F \ : x \mapsto \int_0^{(\sin x)^2} \arcsin(\sqrt{t})\mathrm{d}t + \int_0^{(\cos x)^2} \arccos(\sqrt{t})\mathrm{d}t$. Montrer que F est constante. En déduire la valeur de $\int_0^1 \arcsin(\sqrt{t})\mathrm{d}t$.

Exercice 172

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}$.

Exercice 173

Lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes orthogonales à une parabole.

Exercice 174

Étudier l'arc paramétré : $x(t) = 2\cos(t) + \cos(2t)$, $y(t) = 2\sin(t) - \sin(2t)$.

Exercice 175

Étudier la courbe d'équation polaire $\rho = \frac{1}{\cos(\theta/3)}$.

Exercice 176

Étudier la courbe d'équation polaire $\rho = \frac{1}{\cos(3\theta)}$.

Exercice 177

Étudier la courbe $\mathcal{C}$ d'équation polaire $\rho = a(a - 2\cos(\theta))$, où $a > 0$. Une droite $\mathcal{D}$ passant par l'origine coupe $\mathcal{C}$ en deux points P et Q. On note I le milieu de $[PQ]$. Déterminer le lieu de I lorsque $\mathcal{D}$ varie.

Exercice 178

Déterminer la courbure en tout point de $\Gamma\ : y = \ln x$ avec $x > 0$.

Exercice 179

Déterminer les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.

Exercice 180

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est inversible si et seulement si il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = 0$ et $P(0) = 1$.

Exercice 181

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $\geqslant 1$ tel que $P(0) = 1$. On suppose $P(A) = BA$. Montrer que A est inversible et que A et B commutent.

Exercice 182

Soit E un espace vectoriel de dimension n, f et g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que : $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g \leqslant n$ et $f + g = \operatorname{Id}$. Montrer que $\operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Im}(g) = E$, puis que f et g sont des projecteurs.

Exercice 183

Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $2u^3 + 5u^2 - 3u = 0$. Si $n \geqslant 3$, exprimer u^n en fonction de u et de u^2.

Exercice 184

Soit $D = \mathrm{Diag}(1, 2, \ldots, n)$. Déterminer le nombre de matrices commutant avec D et semblables à D.

Exercice 185

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $T\ : g \in \mathcal{L}(E) \mapsto f \circ g - g \circ f$. On suppose f nilpotent. Montrer que T est nilpotent.

Exercice 186

Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{rg}(AB - BA) = 1$. Calculer $(AB - BA)^2$.

Exercice 187

Soit Γ la courbe paramétrée $(x(t) = 3t^2, y(t) = 2t^3)$. Déterminer les droites qui sont à la fois normales et tangentes à cette courbe.

Exercice 188

Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathcal{C}$ un cercle de rayon $3R$ et $\mathcal{C}'$ un cercle de rayon R qui roule sans glisser dans $\mathcal{C}$. Déterminer la trajectoire d'un point A de $\mathcal{C}'$.

Exercice 189

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de rayon R passant par O. Si M est un point du cercle, soit H le projeté orthogonal de O sur la tangente en M à $\mathcal{C}$.

1 Déterminer la courbe décrite par H lorsque M parcourt $\mathcal{C}$.

2 Déterminer la longueur de cette courbe.

Exercice 190

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, (I, Γ) un arc birégulier du plan euclidien et O un point fixé du plan. Si $s \in I$, on note $K(s)$ le centre de courbure, $P(s)$ le projeté orthogonal de $K(s)$ sur la droite $(OM(s))$. Peut-on avoir : $\forall\, s \in I, OP(s) = OM(s)$?

Exercice 191

Déterminer une équation de la parabole tangente à (Ox) en $(1,0)$ et à (Oy) en $(0,2)$.

Exercice 192

Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x+3y-4=0$. Déterminer l'ensemble décrit par les foyers des ellipses passant par l'origine, tangentes à (Ox) et de directrice $\mathcal{D}$.

Exercice 193

Trouver les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n(n+1)$ soit un carré parfait, puis les n de $\mathbb{N}^*$ tels que $n(n+1)(n+2)$ soit un carré parfait.

Exercice 194

Soit $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ premiers entre eux en tant que polynômes de $\mathbb{Q}[X]$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$: $u_n = P(n) \wedge Q(n)$. Montrer que (u_n) est une suite périodique.

Exercice 195

Calculer $\prod_{k=1}^{n-1} \frac{1+e^{2ik\pi/n}}{1-e^{2ik\pi/n}}$.

Exercice 196

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^n \\ 0 & 1 & a & & a^{n-1} \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$. Calculer A^q pour $q \in \mathbb{Z}$.

Exercice 197

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, f un automorphisme de E et g un endomorphisme de rang 1. Montrer l'équivalence $f + g \in \mathrm{GL}(E) \Leftrightarrow \mathrm{tr}(g \circ f^{-1}) \neq -1$.

Exercice 198

Soit E un espace normé, x et x' dans E, r et r' dans $\mathbb{R}_+$, B (resp. B') la boule fermée de centre x (resp. x') et de rayon r (resp. r'). Caractériser à l'aide de x, x', r, r' l'inclusion $B \subset B'$.

Exercice 199

Limite de $u_n = \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}}$.

Exercice 200

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \frac{1+2u_n}{1+3u_n}$.

1 Étudier la convergence de (u_n).

2 Donner un équivalent de u_n.

Exercice 201

Trouver les $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(1-x)$.

Exercice 202

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $f^n = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 203

Soit $a \in \mathbb{R}$ avec $0 < |a| \leqslant 1$. Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^{ax} f.$$

Exercice 204

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(1) = 0$. Montrer que $\int_0^1 f^2 \leqslant \frac{1}{2} \int_0^1 (f')^2$.

Exercice 205

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, f et g dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

1 Montrer qu'il existe $\theta \in]a, b[$ tel que $f(\theta) \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = g(\theta) \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

2 Montrer qu'il existe $\theta \in]a, b[$ tel que $f(\theta) \int_\theta^b g(x)\mathrm{d}x = g(\theta) \int_a^\theta f(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 206

Toute matrice de trace nulle est-elle semblable à une matrice de diagonale nulle ?

Exercice 207

Soit Φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}[X], \quad \Phi(P) = (X^2 - 1)P'(X) - (4X + 1)P(X).$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ.

Exercice 208

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$. Montrer que $\det A = 1$.

Exercice 209

1 Montrer que sinus est concave sur $[0, \pi/2]$.
2 En déduire la nature de la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sin(k\pi/n)}$.

Exercice 210

Soit (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{u_n^3}(u_n - \ln(1 + u_n))$. Déterminer la limite de (u_n).

Exercice 211

Soit (u_n) définie par $u_0 = a \in]0, 1[$, et $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + u_n^2 \ln(u_n)$.
1 Montrer que (u_n) est bien définie et étudier sa convergence.
Soit $F\ : x \mapsto \int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2 \ln(t)}$.
2 Montrer que $F(u_{n+1}) - F(u_n) \to 1$. En déduire $F(u_n) \sim n$.
3 Montrer $F(x) \sim -\frac{1}{x \ln x}$ quand $x \to 0^+$.
4 En déduire un équivalent de u_n.

Exercice 212

Soit (u_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n^3 + n u_n = 1$.
1 Montrer que (u_n) est bien définie.
2 La suite (u_n) est-elle convergente ?
3 Donner un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Exercice 213

Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de $x(x^2 - 1)y' + 2y = x^4$.

Exercice 214

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Déterminer $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$.

Exercice 215

Montrer que $x \mapsto \frac{x-i}{x+i}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur le cercle unité privé de 1.

Exercice 216

Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x + y + z = 0$.

Exercice 217

Déterminer la matrice de la rotation R de $\mathbb{R}^3$ d'axe dirigé par $u = e_1 + e_2 + e_3$ et d'angle $2\pi/3$.

Exercice 218

On se place dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Soit $a > 0$, $A(a, 0)$ et $B(-a, 0)$. Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}_a$ des $M \in \mathbb{R}^2$ tels que : $MA \times MB = a^2$. Donner une représentation paramétrique de $\mathcal{C}_a$. Tracer la courbe.

Exercice 219

Soit $f\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = (x^2 - y^2)\ln(x^2 + y^2)$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Exercice 220

Soit $f\ : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{\sin(x^3 y)}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

1 La fonction f admet-elle des dérivées partielles du premier ordre en tout point de $\mathbb{R}^2$?

2 Étudier l'existence de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$.

Exercice 221

Déterminer le rayon de courbure en tout point de la courbe d'équation $y = x\ln(x)$.

Exercice 222

Soit $t \in \mathbb{R}$. Caractériser l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = (x\cos(t) + y\sin(t) + 1)^2\}$.

Exercice 223

Résoudre $y' - (\tan x)y = -\cos^2(x)$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

Exercice 224

Calculer $\int\int_D (1 + xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2, x + y \leqslant 1\}$.

Exercice 225

Tracer la courbe d'équation polaire $\rho = \tan(\theta)$.

Exercice 226

Déterminer l'ensemble des points M de $\mathbb{R}^3$ dont les projections orthogonales sur les plans d'équations $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ et $x + y + z = 1$ sont coplanaires.

Exercice 227

Déterminer le reste de la division de $X^n + 2X^m + 1$ par $(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)$.

Exercice 228

Soit f l'application $P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto \left(x \mapsto \int_x^{x+1} P(t)\mathrm{d}t\right)$.

1 Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2 Calculer le déterminant de f.

Exercice 229

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{rg}(A) = 1$. Montrer $A^2 = A$.

Exercice 230

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n et simplement scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ assez petit, le polynôme $P(X) + \varepsilon X^{n+1}$ est encore simplement scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 231

Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| = |z+1| = 1$.

Exercice 232

Soit $n \geqslant 2$ et p un projecteur de $\mathbb{R}^n$ de rang $r \in [\![1, n-1]\!]$. Déterminer la dimension du commutant de p.

Exercice 233

Soit $u\ : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(-4)X + P(6) \in \mathbb{R}_n[X]$. Déterminer le noyau, l'image, les valeurs propres et les vecteurs propres de u.

CHAPITRE 4

Nouvelles Friandises (corrigés)

Aller aux énoncés 3

Corrigé de l'exercice 54 ()

Corrigé de l'exercice 55 ()

Vect$(f_1, \ldots, f_n)$ et Vect$(g_1, \ldots, g_n)$ sont en somme directes, car sous-espaces vectoriels respectifs des espaces de fonctions paires et impaires. Il s'agit donc de prouver la liberté des deux familles $(f_1, \ldots, f_n)$ et $(g_1, \ldots, g_n)$. Pour ce faire, on peut utiliser la notion de valeur propre comme dans le DS7.

Corrigé de l'exercice 56 ()

Les inclusions $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f) + \mathrm{Im}(f) \subset E$ sont évidentes et toujours vérifiées.
Supposons $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f)$. Soit $x \in E$: $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$, donc il existe $y \in E$ tel que $f(x) = f^2(y)$. On a $x = x - f(y) + f(y)$, où $x - f(y) \in \ker(f)$ et $f(y) \in \mathrm{Im}(f)$, d'où une première implication.
Réciproquement, supposons $E = \ker(f) + \mathrm{Im}(f)$. Soit $x \in \mathrm{Im}(f)$: soit $y \in E$ tel que $x = f(y)$. Par hypothèse, il existe $(z, t) \in E \times \ker(f)$ tel que $y = f(z) + t$. On a donc par linéarité $f(x) = f(f(z) + t) = f^2(z) \in \mathrm{Im}(f^2)$, d'où l'implication réciproque.
Si ces hypothèses sont vérifiées, et que E est de plus de dimension finie, le théorème du rang permet d'affirmer que $\ker(f) = \ker(f^2)$ et que $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Corrigé de l'exercice 57 ()

En utilisant la formule $\cos(t) = 2\tan(t/2)/(1+\tan^2(t/2))$, valable si $t \in \{a, b, c\}$, on se ramène (par opérations laissant le rang invariant) à calculer le rang de

$$\begin{pmatrix} 1+\alpha^2 & \alpha & \alpha(1+\alpha^2) \\ 1+\beta^2 & \beta & \beta(1+\beta^2) \\ 1+\gamma^2 & \gamma & \gamma(1+\gamma^2) \end{pmatrix},$$

où $\alpha = \tan(a/2)$, $\beta = \tan(b/2)$ et $\gamma = \tan(c/2)$. En ôtant la deuxième colonne à la troisième, on est amené à calculer le rang de

$$\begin{pmatrix} 1+\alpha^2 & \alpha & \alpha^3 \\ 1+\beta^2 & \beta & \beta^3 \\ 1+\gamma^2 & \gamma & \gamma^3 \end{pmatrix},$$

Corrigé de l'exercice 58 ()

1 AB est la matrice d'un projecteur si et seulement si $(AB)^2 = AB$, ce qui conduit immédiatement à $(x, y, z) = (1, 1, 2)$ pour unique choix possible.
2 Comme $AB = (AB)^2 = A(BA)B$, $\mathrm{rg}(AB) \leqslant \mathrm{rg}(BA)$, or $\mathrm{rg}(AB) = 2$ (calcul immédiat, ou en se rappelant que rang et trace sont égaux pour un projecteur), et BA est de taille 2 : BA est donc inversible. En outre $(BA)^3 = B(AB)^2A = B(AB)A = (BA)^2$, d'où, en simplifiant par la matrice inversible $(BA)^2$, $BA = I_2$.

Corrigé de l'exercice 59 ()

Le déterminant étant invariant par transposition, et n-linéaire, $\det(A+tJ) = \det({}^t(A+tJ)) = \det(-A+tJ) = (-1)^n \det(A-tJ) = \det(A-tJ)$.
La fonction $t \mapsto \det(A+tJ)$ est donc paire, or elle est en outre polynomiale, de degré au plus 1 (retrancher la première colonne à toutes les autres) : elle est constante, de valeur $\det(A)$.
Pour tout réel t, $\det(A+tJ) = \det(A)$.

Corrigé de l'exercice 60 ()

Corrigé de l'exercice 61 ()

Corrigé de l'exercice 62 ()

Corrigé de l'exercice 63 ()

1 La positivité, l'inégalité triangulaire et l'homogénéité sont faciles à montrer. Pour l'axiome de séparation, il suffit de penser à l'unicité d'une solution à un problème de Cauchy.

2 Pour tout $t \in [0,1]$, on observe que :

$$f(t) = e^t \int_0^t \int_0^x (f(u) + 2f'(u) + f''(u))e^u \mathrm{d}x,$$

de sorte que

$$|f(t)| \leqslant e^t \int_0^t \int_0^x \|f + 2f' + f''\| \,\mathrm{d}x \leqslant \frac{e}{2} N(f).$$

Corrigé de l'exercice 64 ()

Corrigé de l'exercice 65 ()

Corrigé de l'exercice 66 ()

Corrigé de l'exercice 67 ()

Le terme en $\sqrt{x^2-1}$ incite à effectuer le changement de variable $x = \mathrm{ch}(t)$:

$$\begin{aligned}
\int \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^3 &= \int (e^t)^3 \,\mathrm{sh}(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{12}{\int} e^{4t} - e^{2t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{8}(e^{4t} - 4e^{2t}) + C \\
&= \frac{1}{8}\left((x+\sqrt{x^2-1})^2 - 4(x+\sqrt{x^2-1})\right) + C
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 68 ()

Notons $\mathcal{E}$ cette équation différentielle.
On se place d'abord sur $I \in \{\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_-^*\}$.
La solution générale de l'équation homogène associée est $x \mapsto \frac{C}{x}$, où C décrit $\mathbb{R}$.
On cherche une solution particulière à l'aide de la méthode de variation de la constante, *i.e.* sous la forme $f_0 \;: x \mapsto \frac{C(x)}{x}$, où C est une fonction dérivable qu'il reste à déterminer. La fonction f_0 est solution de $\mathcal{E}$ si et seulement si C est une primitive de $x \mapsto \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$. Or

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(x^2)}{\sqrt{1-x^4}} = \arcsin(x^2) + K.$$

La solution générale de $\mathcal{E}$ sur I est donc

$$x \mapsto \frac{\arcsin(x^2)+C}{x},$$

où C parcourt $\mathbb{R}$.
Résolution sur $\mathbb{R}$: le problème de raccord en 0 impose de prendre $C = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme sur $\mathbb{R}_-^*$, et réciproquement, la fonction $x \mapsto \frac{\arcsin(x^2)}{x}$ se prolonge bien par continuité en 0 en une application dérivable sur $\mathbb{R}$ (elle est dérivable en 0 car elle y admet un DL à l'ordre 1), solution de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice 69 ()

Le fait que Φ soit un endomorphisme résulte de la linéarité de l'intégrale. Supposons que F soit un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, et stable par Φ. L'endomorphisme Φ induit donc un endomorphisme ψ sur F. De plus, ψ est injectif, puisque si $\Phi(f) = 0$, alors, en dérivant, $f = 0$: ψ est un automorphisme de F.
Comme la dérivation est un inverse à gauche de ψ, c'est son inverse, donc F est stable par dérivation. De plus, soit $f \in F$: f est solution d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants, et nécessairement nulle en 0, ainsi que ses dérivées : elle est l'unique solution à un problème de Cauchy dont les conditions initiales sont toutes nulles : c'est la fonction identiquement nulle.

Corrigé de l'exercice 70 ()

Soit f une solution de cette équation différentielle sur un intervalle I. Comme $1 + f^2$ ne s'annule pas, on a :

$$\frac{f'}{(1+f^2)^{1/2}} = 1,$$

ce qui s'intègre en

$$\forall t \in I, \quad \operatorname{argsh}(f(t)) = t + C,$$

pour un certain réel t, puis

$$\forall t \in I, \quad f(t) = \operatorname{sh}(t + C).$$

Réciproquement, toute fonction de la forme $t \mapsto \operatorname{sh}(t + C)$ pour un certain réel C est solution sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle, et ce sont donc les solutions maximales (lorsqu'on les définit sur $\mathbb{R}$).

Corrigé de l'exercice 71 ()

Corrigé de l'exercice 72 ()

Corrigé de l'exercice 73 ()

On vérifie par simple calcul que l'élément proposé est bien inverse (à droite et à gauche) de $1 + ba$. Par exemple à droite :

$(1+ba)(1-b(1+ab)^{-1}a) = 1-b(1+ab)^{-1}a+ba+bab(1+ab)^{-1}a = 1+ba-b(1+ab)(1+ab)^{-1}a = 1.$

Remarque : pour trouver un tel inverse, on peut partir de la relation formelle (qui n'a pas de vrai sens)

$$(1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots,$$

l'appliquer pour $x = ab$ et $x = ba$, et on tombe sur la relation voulue. Ceci est à faire au brouillon, ou on précise que c'est un jeu purement formel, destiné à retrouver l'inverse.

Corrigé de l'exercice 74 ()

Par simple calcul, si $a \in M$, alors $1 - a \in M$. L'application $\varphi \ : a \mapsto 1 - a$ de M dans M est bijective, car involutive. Si elle n'a pas de point fixe, on peut apparier les éléments de M images l'un de l'autre par φ par paires, fournissant le résultat. Si elle a un point fixe, cela signifie que 2 a un inverse a_0 dans M, et on en déduit que 2 appartient aussi à M (en inversant la relation $a_0^2 = a_0$), donc que $4 = 2$, puis $2 = 0$, or 0 n'est jamais inversible dans un anneau non nul, c'est absurde.
Remarque : j'ai écrit 2 et 4 mais j'ai considéré rigoureusement $1_A + 1_A$ et $1_A + 1_A + 1_A + 1_A$ respectivement.

Corrigé de l'exercice 75 ()

0 n'appartient pas à cet ensemble $\mathcal{C}$. Soit $z = \rho e^{i\theta}$ un nombre complexe non nul mis sous forme trigonométrique. z appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si $\rho|e^{i\theta} + 1| = 2$, soit, grâce à l'astuce de l'angle moitié, $\cos(\theta/2) \neq 0$ et :

$$\rho = \frac{1}{|\cos(\theta/2)|}.$$

Par 2π-périodicité, on peut réduire l'étude à $]-\pi, \pi[$ (tout le support sera tracé), puis, par parité, se restreindre à $[0, \pi[$ (on adjoindra au support obtenu son symétrique par rapport à l'axe des abscisses).

Corrigé de l'exercice 76 ()

On utilise les relations coefficients racines : soit P le polynôme unitaire de degré 3 dont les racines sont x, y et z :

$$P = X^3 + \sigma_2 X - \sigma_3,$$

où $\sigma_2 = xy + xz + yz$ et $\sigma_3 = xyz$ (et $\sigma_1 = x + y + z = 0$). On a $x^2 + y^2 + z^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = -2\sigma_2$.
Pour exprimer $x^3 + y^3 + z^3$ et $x^5 + y^5 + z^5$ en fonction de σ_2 et σ_3, on calcule les restes de X^3 et X^5 par P. On trouve respectivement $-\sigma_2 X + \sigma_3$ et $\sigma_3 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_2\sigma_3$, d'où, en évaluant en x, y et z puis en sommant :

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3\sigma_3 \quad \text{et} \quad x^5 + y^5 + z^5 = -2\sigma_2\sigma_3 - 3\sigma_2\sigma_3 = -5\sigma_2\sigma_3,$$

d'où le résultat annoncé.

Corrigé de l'exercice 77 ()

Corrigé de l'exercice 78 ()

1 En prenant les dimensions,

$$\dim(E) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - \dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g)) \quad \text{et} \quad \dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\ker(g)) - \dim(\ker(f$$

d'où, en sommant, et compte tenu du théorème du rang, le premier résultat.
2 Prendre par exemple $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $f = 0$, et pour g le shift à gauche (surjectif non injectif).

Corrigé de l'exercice 79 ()

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1 :*
Si $A = J_1$, le résultat est évident (prendre des matrices diagonales par exemple) : $J_1 = M_1 - M_1'$, où M_1 et M_1' sont de rang p.
Revenons au cas général : A est équivalente à J_1. Soit $U, V \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = UJ_1V$. Les matrices $A_1 = UM_1V$ et $A_1' = UM_1'V$ conviennent.
La base canonique est constituées de matrices de rang 1 : d'après la question précédente, on peut trouver une famille génératrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, formée de matrices de rang p. De cette famille génératrice, on peut extraire une base, ce qui fournit le résultat.

Corrigé de l'exercice 80 ()

La dimension d'un hyperplan est « grosse » : il suffit de trouver un sous-espace vectoriel constitué de matrices nilpotentes « d'assez grosse dimension » pour montrer qu'elle ont un élément non nul en commun. On peut par exemple prendre le sous-espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures strictes, de dimension $n(n-1)/2 \geqslant 2$. Comme $n-1+n(n-1)/2 > n$ (car $n \geqslant 3$), le résultat est montré.
Remarque : pour $n \in \{1,2\}$, le résultat est faux. C'est évident pour $n=1$, et, pour $n=2$, on peut prendre $\mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}+E_{2,1})$: un élément nilpotent N de ce sous-espace vectoriel doit être de trace nulle, donc de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ pour certains réels a et b. Son déterminant doit également être nul, ce qui conduit à $N = 0_2$.

Corrigé de l'exercice 81 ()

$\frac{1}{2}f$ est le projecteur partie symétrique, dont qui est diagonalisable et dont les valeurs propres sont 0 et 1. f est donc diagonalisable, et ses valeurs propres sont 0 et 2.

Corrigé de l'exercice 82 ()

1 Standard.
2

Corrigé de l'exercice 83 ()

On introduit le produit scalaire canonique $(M,N) \mapsto < M, N >= \mathrm{tr}((t^M)N)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On a, puisque A et B sont symétriques

$$tr(A^2) + tr(B^2) - 2\,\mathrm{tr}(AB) = \|A\|^2 + \|B\|^2 - 2 < A, B >= \|A-B\|^2 \geqslant 0.$$

Corrigé de l'exercice 84 ()

Corrigé de l'exercice 85 ()

Supposons qu'une telle fonction f existe : comme A est bornée, on peut l'inclure dans un segment, donc son image par l'application continue f est également incluse dans un segment : $f(A)$ et $f(\mathbb{R}\setminus A)$ sont bornées, donc f est bornée : soit $[m, M]$ un segment contenant l'image de f. On a $f(m) \geqslant m$ et $f(M) \leqslant M$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires (appliqué à $f - \mathrm{Id}$), f admet un point fixe c. Supposer $c \in A$ conduit à $c = f(c) \in \mathbb{R}\setminus A$, ce qui est absurde. De même, supposer $c \notin A$ est absurde : il ne peut exister de telle fonction f.

Corrigé de l'exercice 86 ()

Le sens indirect est évident.
Réciproquement, les deux points fixes de l'itératrice $f\ : x \mapsto 4x - x^2$ sont 0 et 3, qui sont tous les deux répulsifs, d'où le résultat.

Corrigé de l'exercice 87 ()

Fait en TD.

Corrigé de l'exercice 88 ()

Corrigé de l'exercice 89 ()

Corrigé de l'exercice 90 ()

Corrigé de l'exercice 91 ()

Corrigé de l'exercice 92 ()

Corrigé de l'exercice 93 ()

Corrigé de l'exercice 94 ()

Corrigé de l'exercice 95 ()

Corrigé de l'exercice 96 ()

Corrigé de l'exercice 97 ()

Corrigé de l'exercice 98 ()

Corrigé de l'exercice 99 ()

Corrigé de l'exercice 100 ()

Corrigé de l'exercice 101 ()

Corrigé de l'exercice 102 ()

Corrigé de l'exercice 103 ()

Corrigé de l'exercice 104 ()

Corrigé de l'exercice 105 ()

Corrigé de l'exercice 106 ()

Corrigé de l'exercice 107 ()

Corrigé de l'exercice 108 ()

Corrigé de l'exercice 109 ()

Corrigé de l'exercice 110 ()

Corrigé de l'exercice 111 ()

Corrigé de l'exercice 112 ()

Fait en TD.

Corrigé de l'exercice 113 ()

Notons $p = 2n$.
Traitons d'abord le cas où A est la matrice A_0 dont tous les coefficients non diagonaux de A valent 1. On a $A + I_p = J_p$, où J_p est la matrice de taille p dont tous les coefficients valent 1. On a clairement $J_p^2 = pJ_p$, donc $A^2 + 2A + I_p = pA + pI_n$, puis $(p-1)I_p = A((p-2)I_p - A)$. En égalant les déterminant, et compte tenu du fait que les matrices soient à coefficients entiers, on observe que $\det(A)$ divise $(p-1)^p$, donc que $\det(A)$ est impair. En particulier, A est inversible.
Revenons au cas général : en réduisant modulo 2 dans la formule donnant $\det(A)$, on constate que $\det(A)$ et $\det(A_0)$ sont des entiers de même parité, donc que $\det(A)$ est impair, puis que A est inversible.

Corrigé de l'exercice 114 ()

Corrigé de l'exercice 115 ()

Corrigé de l'exercice 116 ()

Corrigé de l'exercice 117 ()

Corrigé de l'exercice 118 ()

Corrigé de l'exercice 119 ()

Soit A, B et C les points d'affixes respectives a, b, c.
En reformulant l'énoncé, on constate que A et B et C sont à même distance de leur isobarycentre G (car par exemple $2a - b - c = 3a - (a + b + c)$) : le centre de gravité de ABC est également le centre du cercle circonscrit à ce triangle, ce qui montre que médiane et médiatrices sont confondues, puis que ABC est équilatéral.

Corrigé de l'exercice 120 ()

Corrigé de l'exercice 121 ()

Corrigé de l'exercice 122 ()

Corrigé de l'exercice 123 ()

Corrigé de l'exercice 124 ()

Il suffit d'appliquer scrupuleusement le théorème de Rolle pour décrire précisément les racines de P' avec leurs multiplicité (fait en TD). Si on enlève la condition P scindé, le résultat est faux, considérer par exemple $X^3 - 1$.

Corrigé de l'exercice 125 ()

Fait en TD.

Corrigé de l'exercice 126 ()

Corrigé de l'exercice 127 ()

Corrigé de l'exercice 128 ()

Corrigé de l'exercice 129 ()

Corrigé de l'exercice 130 ()

Corrigé de l'exercice 131 ()

Corrigé de l'exercice 132 ()

Corrigé de l'exercice 133 ()

Corrigé de l'exercice 134 ()

On sait que $(A^k)_{k\in[\![0,n^2]\!]}$ est liée(car $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = n^2$). En prenant une relation de liaison pour cette famille, et en simplifiant éventuellement par une puissance de A, on trouve une relation de liaison de la forme

$$\sum_{k=0}^{N} \lambda_k A^k$$

pour des complexes $\lambda_0, \ldots, \lambda_N$ tels que $\lambda_0 \neq 0$. On a alors

$$A^{-1} = \frac{-1}{\lambda_0} \sum_{k=1}^{N} \lambda_k A^{k-1},$$

d'où le résultat.

Corrigé de l'exercice 135 ()

Corrigé de l'exercice 136 ()

Corrigé de l'exercice 137 ()

Corrigé de l'exercice 138 ()

Corrigé de l'exercice 139 ()

On ne nuit pas à la généralité du raisonnement en supposant le cercle étudié centré en $(0,0)$. Soit R son rayon. Considérons l'application

$$g\ :\theta\mapsto f(R\cos(\theta),R\sin(\theta))-f(-R\cos(\theta),-R\sin(\theta)).$$

$g(0)$ et $g(\pi)$ sont opposés, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule, ce qui montre que la restriction de f à ce cercle n'est pas injective (plus précisément, il existe deux points diamétralement ayant même image par f).

Corrigé de l'exercice 140 ()

Corrigé de l'exercice 141 ()

Corrigé de l'exercice 142 ()

Corrigé de l'exercice 143 ()

Fait en TD.

Corrigé de l'exercice 144 ()

Corrigé de l'exercice 145 ()

Corrigé de l'exercice 146 ()

Corrigé de l'exercice 147 ()

Si f s'annulait au moins quatre fois sur $\mathbb{R}$, alors sa dérivée seconde s'annulerait au moins deux fois, ce serait absurde.

Corrigé de l'exercice 148 ()

f est constante sur $\mathbb{Z}+\sqrt{3}\mathbb{Z}$. Or ce sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ n'est pas de la forme $a\mathbb{Z}$ pour un réel a (car $\sqrt{3}$ est irrationnel), donc il est dense dans $\mathbb{R}$: f est continue et constante sur une partie dense, elle est donc constante.

Corrigé de l'exercice 149 ()

Corrigé de l'exercice 150 ()

L'identité et les fonctions constantes conviennent.
Soit f une fonction non constante vérifiant cette propriété. Son image $J = f(\mathbb{R})$ est un intervalle (d'après le théorème des valeurs intermédiaires), non réduit à un point, et sur lequel f coïncide avec l'identité (d'après la relation qu'elle vérifie).
Supposons J majoré, et soit M sa borne supérieure. Par continuité à gauche de f en M, $f(M) = M$, et sa dérivée à gauche vaut 1. Or, M étant le maximum de f, sa dérivée à droite est négative ou nulle, ce qui contredit la dérivabilité de f en M : J n'est pas majoré, ni, de, même, minoré, donc $J = \mathbb{R}$, puis $f = \mathrm{Id}$.

Corrigé de l'exercice 151 ()

Corrigé de l'exercice 152 ()

Corrigé de l'exercice 153 ()

Corrigé de l'exercice 154 ()

Corrigé de l'exercice 155 ()

On a $2010 \Leftrightarrow -5[13]$, donc $2010^2 \Leftrightarrow -1[13]$. Comme $2010 \Leftrightarrow 2[4]$, il vient $2010^{2010} \Leftrightarrow -1[13]$, le reste cherché vaut 12.

Corrigé de l'exercice 156 ()

Corrigé de l'exercice 157 ()

Si ce cycle admet une racine carrée c, alors c est nécessairement un n-cycle, car il ne peut pas y avoir plusieurs orbites sous l'action de c. Si n est pair, alors on constate que le carré d'un n-cycle n'est pas un n-cycle, et donc que le cycle considéré c_0 n'admet pas de racine carrée.
Si n est impair on peut écrire $n = 2k+1$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Comme $c_0^n = \mathrm{Id}$, on constate que c_0 admet c_0^{-k} pour racine carrée.

Corrigé de l'exercice 158 ()

0 est évidemment solution.
Soit z une solution non nulle. En égalant les modules, z est de module 1, donc $\bar{z} = z^{-1}$, puis $z^4 = 1$, soit $z \in \{1, -1, i, -i\}$.
Réciproquement, si z est une racine quatrième de l'unité, alors il vérifie bien cette relation.
Les nombres vérifiant cette relation sont $0, i, -i, 1, -1$.

Corrigé de l'exercice 159 ()

Corrigé de l'exercice 160 ()

Corrigé de l'exercice 161 ()

Corrigé de l'exercice 162 ()

On sait que P' est également simplement scindé sur $\mathbb{R}$ (grâce au théorème de Rolle), donc $P - a$ ne peut pas admettre que des racines simples ou doubles, et que ces dernières sont nécessairement réelles.

Corrigé de l'exercice 163 ()

Corrigé de l'exercice 164 ()

Corrigé de l'exercice 165 ()

Corrigé de l'exercice 166 ()

Corrigé de l'exercice 167 ()

Corrigé de l'exercice 168 ()

Corrigé de l'exercice 169 ()

Corrigé de l'exercice 170 ()

Corrigé de l'exercice 171 ()

Corrigé de l'exercice 172 ()

Corrigé de l'exercice 173 ()

Corrigé de l'exercice 174 ()

Corrigé de l'exercice 175 ()

Corrigé de l'exercice 176 ()

Corrigé de l'exercice 177 ()

Corrigé de l'exercice 178 ()

Corrigé de l'exercice 179 ()

Corrigé de l'exercice 180 ()

Corrigé de l'exercice 181 ()

Corrigé de l'exercice 182 ()

Corrigé de l'exercice 183 ()

Corrigé de l'exercice 184 ()

Corrigé de l'exercice 185 ()

Corrigé de l'exercice 186 ()

Corrigé de l'exercice 187 ()

Corrigé de l'exercice 188 ()

Corrigé de l'exercice 189 ()

Corrigé de l'exercice 190 ()

Corrigé de l'exercice 191 ()

Corrigé de l'exercice 192 ()

Corrigé de l'exercice 193 ()

Corrigé de l'exercice 194 ()

Corrigé de l'exercice 195 ()

Corrigé de l'exercice 196 ()

Corrigé de l'exercice 197 ()

Corrigé de l'exercice 198 ()

Corrigé de l'exercice 199 ()

Corrigé de l'exercice 200 ()

Corrigé de l'exercice 201 ()

Corrigé de l'exercice 202 ()

Corrigé de l'exercice 203 ()

Corrigé de l'exercice 204 ()

Corrigé de l'exercice 205 ()

Corrigé de l'exercice 206 ()

Corrigé de l'exercice 207 ()

Corrigé de l'exercice 208 ()

Corrigé de l'exercice 209 ()

Corrigé de l'exercice 210 ()

Corrigé de l'exercice 211 ()

Corrigé de l'exercice 212 ()

Corrigé de l'exercice 213 ()

Corrigé de l'exercice 214 ()

Corrigé de l'exercice 215 ()

Corrigé de l'exercice 216 ()

Corrigé de l'exercice 217 ()

Corrigé de l'exercice 218 ()

Corrigé de l'exercice 219 ()

Corrigé de l'exercice 220 ()

Corrigé de l'exercice 221 ()

Corrigé de l'exercice 222 ()

Corrigé de l'exercice 223 ()

Corrigé de l'exercice 224 ()

Corrigé de l'exercice 225 ()

Corrigé de l'exercice 226 ()

Corrigé de l'exercice 227 ()

Corrigé de l'exercice 228 ()

Corrigé de l'exercice 229 ()

Corrigé de l'exercice 230 ()

Corrigé de l'exercice 231 ()

Corrigé de l'exercice 232 ()

Corrigé de l'exercice 233 ()

CHAPITRE 5

Friandises extra fraîches (énoncés)

Aller aux corrigés 6

Exercice 234

Soient σ une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$, $A = \{n \in \mathbb{N},\ \sigma(n) < n\},\ B = \{n \in \mathbb{N},\ \sigma(n) \geqslant n\}$. Est-il possible d'avoir A et B finis ? A fini et B infini ? A et B infinis ? A infini et B fini ?

Exercice 235

Soit n un entier impair $\geqslant 3$. Montrer que n n'est pas premier si et seulement s'il existe $d \geqslant 3$ et d entiers strictement positifs consécutifs de somme n.

Exercice 236

Quels sont les n de $\mathbb{N}^*$ tels que n divise $\sum_{k=0}^{[n/3]} \binom{n}{3k}$?

Exercice 237

Déterminer les morphismes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Q}^{+*}, \times)$.

Exercice 238

Soit p un nombre premier. Déterminer le nombre d'éléments d'ordre p du groupe symétrique $\mathcal{S}_{2p}$.

Exercice 239

Soit $n \geq 3$. On note G le sous-groupe de S_n formé des permutations qui fixent n. Montrer que G est maximal dans l'ensemble des sous-groupes stricts de S_n.

Exercice 240

Soit p un nombre premier impair. Dénombrer les $(x, y) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ tels que :

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Exercice 241

Soient A l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ et G l'ensemble des éléments inversibles de A.

1 Vérifier que G est un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{R}^*$.

2 Soit $x+y\sqrt{7} \in G$. Donner, au signe près, une formule pour $\left(x + y\sqrt{7}\right)^{-1}$. En déduire un élément non trivial de G.

3 Pour $x + y\sqrt{7} \in G$, on pose $\Phi(x + y\sqrt{7}) = (\ln|x + y\sqrt{7}|, \ln|x - y\sqrt{7}|)$.

- **a** Montrer que Φ est un morphisme de G dans $(\mathbb{R}^2, +)$ dont on précisera le noyau.
- **b** Montrer que $\mathrm{Im}(\Phi)$ est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^2$.

4 En déduire que $G = \{\pm(8 + 3\sqrt{7})^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Exercice 242

1 Déterminer $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Quelle est sa structure algébrique ?

2 À quel groupe est-il isomorphe ?

Exercice 243

Soit $n \geqslant 2$. Montrer que $X^n - X - 1$ a n racines complexes distinctes.

Exercice 244

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de degré n scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que si $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on a : $a_{k-1}a_{k+1} \leqslant a_k^2$.

Exercice 245

Soient P dans $\mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 1$ admettant n racines réelles distinctes $x_1, \ldots, x_n$. Calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)}$.

Exercice 246

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Montrer que A est semblable à une matrice triangulaire supérieure de diagonale nulle.

Exercice 247

Trouver les P de $\mathbb{R}[X]$ tels que, pour M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on ait l'implication : $P(M) = 0 \Rightarrow \det M > 0$.

Exercice 248

Soient E l'espace des suites complexes $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et T l'endomorphisme de E qui à $(u_n)_{n\geqslant 1}$ associe la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$.

1 Déterminer valeurs propres et espaces propres de T.

2 Si m est dans $\mathbb{N}^*$ et λ dans $\mathbb{C}$, déterminer le noyau de $(T - \lambda \mathrm{Id}\,)^m$.

3 Déterminer les sous-espaces de dimension finie stables par T.

Exercice 249

Une matrice antisymétrique réelle est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?

Exercice 250

On munit $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}),\ f(1) = 0\}$ de la norme donnée par : $\|f\| = \sup\limits_{[0,1]} |f'|$.

Soit $\Phi : f \in E \mapsto \int_0^1 f$. Montrer que Φ est continue et calculer $\|\Phi\|$.

Exercice 251

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une permutation φ de $\mathbb{N}$ telle que $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ soit monotone à partir d'un certain rang.

Exercice 252

Trouver les $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x)\,f(y) = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

Exercice 253

Soient p et q dans $]1,+\infty[$ avec $1/p + 1/q = 1$.
1 Montrer : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$.
2 En déduire, si $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ sont des éléments de $\mathbb{R}_+$, l'inégalité :
$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{1/q}$.

Exercice 254

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que si a est une racine multiple de P' alors a est également racine de P.

Exercice 255

Trouver les $n \in \mathbb{N}$ tels que $n^n - 3$ soit divisible par 7.

Exercice 256

Soient $u_0, u_1 \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+2} = u_{k+1} + u_k$. Étudier la périodicité de la suite (u_k).

Exercice 257

Les groupes $(\mathbb{R},+)$ et $(\mathbb{R}^*,\times)$ sont-ils isomorphes ?

Exercice 258

Soient $(p,q) \in \mathbb{C}^2$ et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les racines du polynôme $X^3 + pX + q$. Trouver un polynôme $P \in \mathbb{C}_3[X]$ unitaire dont les racines sont $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$, $\lambda_1^2 + \lambda_3^2$ et $\lambda_2^2 + \lambda_3^2$.

Exercice 259

Soit $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont nuls et dont chaque coefficient hors-diagonale appartient à $\{-1, 1\}$. Montrer que A est inversible.

Exercice 260

Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. Calculer le déterminant de $(\cos((j-1)\alpha_i))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Exercice 261

1 Soit $S = \{A_1, ..., A_k\}$ une partie de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ stable par produit, de cardinal k. Montrer : $\operatorname{tr} A_1 + \cdots + \operatorname{tr} A_k \equiv 0\ [k]$.

2 Soit $G = \{A_1, ..., A_r\}$ un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de cardinal r tel que $\operatorname{tr} A_1 + \cdots + \operatorname{tr} A_r = 0$. Montrer que $A_1 + \cdots + A_r = 0$.

Exercice 262

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose : $\forall k \in \{0, \ldots, 2n\}$, $A + kB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Calculer $\det A$ et $\det B$.

Exercice 263

Déterminer les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(A + M) = \det A + \det M$.

Exercice 264

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de même rang telles que $A^2 B = A$. Montrer que $B^2 A = B$.

Exercice 265

Soient $A \in \mathbb{C}[X]$ de degré n, $B \in \mathbb{C}[X]$ et $\psi \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_{n-1}[X])$ qui à P associe le reste de la division euclidienne de PB par A. Trouver le noyau, l'image et les éléments propres de ψ.

Exercice 266

Soient $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A^m est diagonalisable. Montrer que A^{m+1} est diagonalisable.

Exercice 267

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, $\lambda \in [-1, 1[$ et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs unitaires de E telle que $\forall (i, j) \in I^2,\ i \neq j \Rightarrow \langle a_i, a_j\rangle \leqslant \lambda$. Montrer que $(a_i)_{i\in I}$ est finie.

Exercice 268

Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), PA \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 269

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\{0, 1\}$ et J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. On suppose que $A\,{}^tA = sI_n + J$, où $s \in \mathbb{N}^*$.

1 Montrer que A est inversible.

2 Montrer que AJ et JA sont proportionnelles à J, puis que $AJ = JA$.

3 Montrer que A et ${}^tA$ commutent.

Exercice 270

Que dire d'une partie convexe et dense de $\mathbb{R}^n$?

Exercice 271

Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \frac{n}{2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{(k+n)^2}$.

Exercice 272

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle telle que $(2x_{n+1} - x_n)$ converge vers a. Montrer que (x_n) est convergente.

Exercice 273

Soit $(x_0, x_1) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$. On définit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ par la relation $x_{n+2} = \frac{2}{x_{n+1}+x_n}$. Étudier la convergence de la suite (x_n).

Exercice 274

Soit x_n l'unique solution de $e^x = n - x$. Donner un développement asymptotique à trois termes de x_n.

Exercice 275

Construire une suite réelle $(a_n)_{n\geqslant 0}$ bornée, non convergente et telle que : $\forall n \geqslant 1$, $|2a_n - a_{n+1} - a_{n-1}| \leqslant 1/n^2$.

Exercice 276

Soit (u_n) une suite réelle vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \exp(-u_n)$. En déterminer la limite puis un équivalent simple.

Exercice 277

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} {u_k}^2$. On suppose que $u_n S_n \to 1$. Trouver un équivalent de u_n.

Exercice 278

Soit x_n la solution positive de l'équation $x^n + nx = 1$.

1 Trouver un équivalent de x_n.

2 Montrer que la série de terme général $n!\,(x_n - 1/n)$ est convergente.

Exercice 279

Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ monotone. On suppose que $f(2x)/f(x) \to 1$ quand $x \to +\infty$. Soit $c > 0$. Déterminer la limite de $f(cx)/f(x)$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 280

La fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x \sin x)$ est-elle uniformément continue ?

Exercice 281

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que $f(x) + f'(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$. Que dire de f ?

Exercice 282

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, F un fermé de I et $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. On suppose que f est nulle sur F et dérivable en tout point de $I \setminus F$. Soit $x \in F$, non intérieur à F. On suppose $\lim\limits_{\substack{y \in I \setminus F \\ y \to x}} f'(y) = 0$. Montrer que f est dérivable en x et que $f'(x) = 0$.

Exercice 283

Soit H le groupe des bijections continues de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$. Si G est un sous-groupe fini de H, montrer que G est de cardinal 1 ou 2. Que dire des éléments de G ?

Exercice 284

Soit $f \in \mathcal{C}^3([-1, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$. Montrer :

$$\int_{-1}^{1} |f(x)| \mathrm{d}x \leq \frac{1}{12} \sup_{[-1,1]} |f'''|.$$

Exercice 285

Soit P dans $\mathbb{R}[X]$ non constant. Montrer que l'ensemble des réels x tels que $\int_0^x P(t)\sin t\mathrm{d}t = \int_0^x P(t)\cos t\mathrm{d}t = 0$ est fini.

Exercice 286

1 Soit $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que $g(0,0) \neq 0$. Montrer que $(0,0)$ est un extremum relatif strict de la fonction $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^2+y^2)\, g(x,y)$.

2 La fonction $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sqrt{1+x^2} + \mathrm{ch}(y) - 2$ vérifie-t-elle les hypothèses de **3** ?

Exercice 287

Soient $A_1, \ldots, A_n$ des points du cercle unité complexe U. Montrer qu'il existe $M \in U$ tel que $\prod_{k=1}^n MA_k = 1$.

Exercice 288

Tracer la courbe d'équation polaire $r(\theta) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}\cos(3k\theta)}{(3k+1)(3k-1)}$.

Exercice 289

On considère la courbe paramétrée du plan complexe $z : t \mapsto \int_0^t e^{is^2}\mathrm{d}s$.

1 Étudier les symétries de la courbe.

2 Déterminer la tangente en 0 ainsi que les points d'inflexion.

3 Montrer que z possède un point limite en $+\infty$.

4 Déterminer le signe des parties réelle et imaginaire de $z(t)$ pour $t > 0$.

5 Étudier les points multiples de la courbe.

Exercice 290

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien, S une sphère de centre O et de rayon 1 et ϕ une application affine telle que $\phi(S) = S$. Montrer que $\phi(O) = O$ et que ϕ est une isométrie de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}$.

Exercice 291

Soit $(a_n)_{n\geqslant 1} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}^*}$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{\cdots + \sqrt{a_n}}}}$. On note $\sqrt{a}$ cette suite.

1 Montrer que (u_n) est monotone.

2 On suppose, dans cette question, que la suite (a_n) est constante égale à $c \in \mathbb{R}^+$.

a Pour quelles valeurs de c la suite (u_n) est-elle constante ?

b On suppose que (u_n) converge vers un entier. Montrer que c est un entier pair.

c Montrer que la suite (u_n) est toujours convergente.

3 Montrer que la suite (u_n) converge si et seulement si la suite de terme général ${a_n}^{1/2^n}$ est bornée.

4 Soient $(a_n)_{n\geqslant 1}$ la suite constante égale à 2 et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $b_n = 7$ si n est pair, $b_n = 1$ si n est impair. Montrer que les suites $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ convergent vers la même limite.

Exercice 292

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f'(a)\, f'(b) < 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 293

1 Montrer qu'une fonction convexe sur un intervalle ouvert est continue sur cet intervalle.

2 Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ convexe et strictement croissante. Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) > \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} f\left(\frac{k}{n+1}\right) > \int_0^1 f.$$

Exercice 294

Soit (E) l'équation différentielle $2x(1-x)y' + (1-x)y = 1$.

1 Déterminer les primitives de $x \mapsto \frac{\sqrt{|x|}}{2x(1-x)}$ sur $]0, 1[$, sur $]1, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.

2 Déterminer les solutions de : $2x(1-x)y' + (1-x)y = 0$.

3 Déterminer les solutions maximales de (E).

Exercice 295

1 Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de diviseurs de 2^p.
2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de diviseurs de n.
3 Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ ayant un nombre impair de diviseurs.

Exercice 296

Soient (a, b) et (c, d) dans $\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Montrer qu'il existe $(p, q, r, s) \in \mathbb{Z}^4$ tel que $a + ib = (p + iq)(c + id) + (r + is)$ avec $r^2 + s^2 \leqslant c^2 + d^2$. A-t-on unicité ?

Exercice 297

Soit $\xi = e^{i\pi/10}$. Montrer que ξ est une racine de $X^8 - X^6 + X^4 - X^2 + 1$.

Exercice 298

Soit n un entier $\geqslant 2$.
1 Parmi les racines $2n$-ièmes de 1, combien sont racines de -1 ?
2 Soit ε une racine primitive n-ième de l'unité. Montrer que le polynôme $X^2 - \varepsilon$ a deux racines distinctes. Montrer que l'une d'elles est racine n-ième de -1.

Exercice 299

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, P_n(\sin^2 t) = \cos(2nt).$$

Déterminer le degré de P_n. Que vaut $P_n(-1)$?

Exercice 300

Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}\, u$ si et seulement si $\mathrm{Im}\, u \cap \ker v = \{0\}$.

Exercice 301

Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\Phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AMB$. Calculer la trace de Φ.

Exercice 302

1 Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotentes. La matrice $A + B$ est-elle nilpotente ?
2 Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A, B et $A+B$ sont nilpotentes. Montrer que $\operatorname{tr}(AB) = 0$.

Exercice 303

Soient E un espace vectoriel, p et q des projecteurs de E qui commutent. Montrer que $p \circ q$ et $p + q - p \circ q$ sont des projecteurs. Déterminer leurs images et leurs noyaux.

Exercice 304

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $(f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^n(x_0))$ est une base de E.
1 Montrer que f est un isomorphisme.
2 Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ f = f \circ g$. Montrer que g est polynomial en f.

Exercice 305

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Déterminer les $u \in \mathcal{L}(E)$ laissant stable tout hyperplan de E.

Exercice 306

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que tout supplémentaire de $\{0_E\} \times F$ dans $E \times F$ est de la forme : $\{(x, f(x)),\ x \in E\}$ avec $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Exercice 307

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On suppose que tous les coefficients de A et de A^{-1} sont dans $\mathbb{N}$. Montrer que A est une matrice de permutation.

Exercice 308

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ tel que : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ f(AB) = f(A)\,f(B)$. Montrer que f est soit injectif soit nul.

Exercice 309

Soient E un K-espace vectoriel de dimension n, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, F un K-espace vectoriel de dimension p, $(f_1, \ldots, f_p)$ une base de F.

1 Montrer que la famille $(e_2 - e_1, \ldots, e_n - e_1)$ est libre.

2 Donner une base de $E \times F$ ainsi que sa dimension.

3 Soit G le sous-espace de $E \times F$ engendré par les (e_i, f_j) pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, p]\!]$. Déterminer la dimension de G.

Exercice 310

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{tr} A = 0$. Montrer que A est nilpotente ou diagonalisable. Est-ce toujours le cas dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \geqslant 3$?

Exercice 311

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables telles que $M = A + B$.

Exercice 312

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable et $C(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ AB = BA\}$. Montrer que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer sa dimension.

Exercice 313

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\operatorname{tr} A$ et $\det A$ pour que la matrice A soit semblable à $-A$.

Exercice 314

Soient $k \in \mathbb{R}$ avec $k > 1$, $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, $n \geqslant 2$ et $v_1, \ldots, v_n$ des vecteurs de E tels que : $\forall i,\ \|v_i\| = 1$ et $\forall i \neq j,\ \langle v_i, v_j \rangle \leqslant -1/k$. Montrer que $k + 1 \geqslant n$.

Exercice 315

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire euclidien canonique noté $\langle\ ,\ \rangle$. Déterminer les A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $\forall X \in \mathbb{R}^n,\ \langle X, AX \rangle = 0$.

Exercice 316

Soit $n \geqslant 2$. Montrer qu'il n'existe pas de norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ invariante par similitude.

Exercice 317

Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \frac{n}{u_n}$. Quelles sont les limites possibles pour (u_n) ?

Exercice 318

Existence et calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}$.

Exercice 319

Déterminer les $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = 4\,f(x) + 3x + 1$.

Exercice 320

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f = 1/2$. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.

Exercice 321

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ convexe et non affine. Si $a \in \mathbb{R}$, montrer que $f(x)+f(a-x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 322

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ monotone. Montrer que f est continue si et seulement si $f(I)$ est un intervalle.

Exercice 323

Déterminer $\inf \left\{ \int_0^1 f^2,\ f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \text{ et } f(0) = f(1) = 1 \right\}$.

Exercice 324

Soient $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ et $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}),\ f(0) = \alpha \text{ et } f(1) = \beta\}$. Déterminer $\inf \left\{ \int_0^1 f'(t)^2 \mathrm{d}t,\ f \in E \right\}$.

Exercice 325

Déterminer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(|t| - a - b\cos t\right)^2 \mathrm{d}t$.

Exercice 326

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que f est majorée et qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $f'' \geqslant \lambda f$.

1 Montrer que f' a une limite en $+\infty$ que l'on déterminera.

2 Montrer que f a une limite en $+\infty$ que l'on déterminera.

3 Trouver des fonctions vérifiant ces conditions.

Exercice 327

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que $f(0) = 0$ et qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leqslant M|f(x)|$. Montrer que f est identiquement nulle.

Exercice 328

Soient I un intervalle ouvert, $a \in I$, f et g de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que g est dérivable en a, que $g(a) = g'(a) = 0$ et que $\forall x \in I$, $|f(x)| \leqslant |g(x)|$. Montrer que f est dérivable en a.

Exercice 329

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et surjective. Soit $y \in \mathbb{R}$. Montrer que y possède une infinité d'antécédents par f.

Exercice 330

Soit E l'intérieur de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Calculer $\iint_E x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Exercice 331

Quel est le dernier chiffre de l'écriture décimale de 3^{7^5} ?

Exercice 332

Trouver le reste de la division de 2011^{2011} par 9.

Exercice 333

Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$.
1 Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P - P' = Q$.
2 On suppose : $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) \geqslant 0$. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$.
3 Exprimer P en fonction de Q et de ses dérivées.

Exercice 334

Montrer que si P est un polynôme réel scindé sur $\mathbb{R}$, il en est de même de P'.

Exercice 335

Soit p dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que les racines de $pX^p - \sum_{k=0}^{p-1} X^k$ sont de module au plus 1 et que la seule racine de module 1 est 1.

Exercice 336

Trouver les P de $\mathbb{C}[X]$ tels que : $P(X^2) = P(X)\,P(X+1)$.

Exercice 337

Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$: $P = a(X-1)P' + b(X-1)^2$.

Exercice 338

Soient A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1, λ dans $\mathbb{R}$. La matrice $I_n + \lambda A$ est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

Exercice 339

Soit u et v deux endomorphismes d'un K-espace vectoriel de dimension finie. On suppose u nilpotent et $u \circ v = v \circ u$. Montrer que $u + v$ est inversible si et seulement si v est inversible.

Exercice 340

Montrer que deux matrices réelles semblables sur $\mathbb{C}$ sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 341

Soient $a, b_1, \dots, b_n$ dans $\mathbb{C}$, M la matrice dont les termes non diagonaux sont tous égaux à a et dont la diagonale est $(a + b_1, \dots, a + b_n)$. Étudier l'inversibilité de M ; le cas échéant, calculer M^{-1}.

Exercice 342

Soit G un sous-groupe fini de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \times)$. Soit $M = \sum_{A \in G} A$. Calculer M^2. En déduire que $\sum_{A \in G} \mathrm{tr}(A)$ est un multiple entier de $\mathrm{Card}\, G$.

Exercice 343

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1 On suppose A inversible et, pour tout réel t : $\det(A + tB) = \det A$. Montrer que $A^{-1}B$ est nilpotente.

2 On suppose (A, B) libre et, pour tout (t, s) de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $sA + tB$ inversible. Montrer que n est pair.

Exercice 344

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie n, $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que, pour toute base $\mathcal{B}$ de E, la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit égale à A. Que dire de f ?

Exercice 345

Soient E un K espace vectoriel de dimension n, $\lambda \in K$, $r \in \{0, \dots, n\}$, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = \lambda f$ et $\mathrm{rg}(f) = r$. Déterminer la trace de f.

Exercice 346

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$. On suppose que le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples.

1 Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $B = P(A)$.

2 Quelle condition imposer au degré de P pour avoir unicité ?

Exercice 347

Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si : $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Exercice 348

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. Déterminer les $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que : $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow \langle u(x), u(y)\rangle = 0$.

Exercice 349

Soit E un espace euclidien. Quels sont les endomorphismes de E dont la matrice dans toute base orthonormée est diagonale ?

Exercice 350

1 Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'équation $x = \operatorname{cotan} x$ possède une unique solution sur l'intervalle $]n\pi, n\pi + \pi[$. On note x_n cette solution.

2 Montrer que $x_n = n\pi + \arctan(1/x_n)$. Donner un équivalent de x_n.

3 Nature des séries de termes généraux : $x_n - n\pi$ et $(-1)^n(x_n - n\pi)$?

Exercice 351

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\sqrt{u_n}}$. Donner un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Exercice 352

Quelles sont les fonctions convexes et bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

Exercice 353

Soient f et g deux applications continues de $[0,1]$ dans $[0,1]$ telles que $f \circ g = g \circ f$. Soit A l'ensemble des points fixes de f.

1 Montrer que A contient un plus grand et un plus petit élément.

2 Montrer qu'il existe x dans $[0,1]$ tel que $f(x) = g(x)$.

Exercice 354

Montrer qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $3^x + 5^x = 7^x$.

Exercice 355

1 Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée et $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant. Montrer que l'ensemble des zéros de $f - P$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$.

2 Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que l'ensemble des zéros de $Q - \sin$ est infini. Que peut-on dire de Q ?

Exercice 356

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ de classe C^1. Montrer qu'il existe une suite (x_n) de réels telle que $(f'(x_n))$ tende vers 0.

Exercice 357

Soit f une fonction dérivable de l'intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $f'(I)$ est un intervalle.

Exercice 358

Montrer qu'il n'existe pas de primitive de $f : t \mapsto e^{t^2}$ de la forme $t \mapsto R(t)\, f(t)$ où R est une fraction rationnelle.

Exercice 359

Soit E un espace euclidien. Pour x dans $E \setminus \{0\}$, soit $i(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$. Montrer que i est de classe $\mathcal{C}^1$. Reconnaître sa différentielle en $x \in E \setminus \{0\}$.

Exercice 360

Soient A, B, C trois points distincts du plan d'affixes a, b, c.

1 Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

2 Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $|a + b - 2c| = |a - 2b + c| = | - 2a + b + c|$.

Exercice 361

Démontrer que deux droites non parallèles de $\mathbb{R}^3$ ont une unique perpendiculaire commune.

Exercice 362

1 Tracer la courbe paramétrée : $(x(t), y(t)) = (\sin^3(t), \cos^3(t))$.

2 Exprimer l'équation de la tangente en un point $M(t_0)$ de la courbe.

3 On note P et Q les intersections de cette tangente et des axes de coordonnées. Montrer que la longueur PQ ne dépend pas de t_0.

Exercice 363

1 Tracer la courbe d'équation polaire $r = 1 + \tan(\theta/2)$.

2 Trouver l'angle polaire du point double.

3 Trouver l'angle entre les deux tangentes en ce point double.

4 Calculer l'aire de la boucle.

Exercice 364

Étude, tracé et courbure de la courbe d'équation polaire : $\rho = a\,\frac{1-\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$ où $a > 0$.

Exercice 365

Soit P la parabole d'équation $y^2 = 2px$.

1 Déterminer le foyer, la directrice et le sommet de P.

2 Montrer que quatre points distincts de P, d'ordonnées y_1, y_2, y_3 et y_4, sont cocycliques si et seulement si $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0$.

Exercice 366

Soit $(\mathcal{E})$ l'ellipse de foyers F et F'. Montrer que le produit des distances de F et F' à une tangente de $\mathcal{E}$ est indépendant de la tangente considérée.

Exercice 367

Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $xy = 1$. Montrer que l'orthocentre de trois points distincts de $\mathcal{H}$ est sur $\mathcal{H}$.

Exercice 368

Soient $A = (1, 1, -1)$, $\vec{v} = (2, 3, -1)$, D la droite passant par A et dirigée par $\vec{v}$, P le plan d'équation $3x + 2y + z = 1$. Déterminer l'expression analytique de la projection de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D, puis la matrice canonique de la partie linéaire de cette projection.

Exercice 369

Déterminer les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)\,P(X-1)$.

Exercice 370

Soient $(p, q) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$, $P = X^3 + pX + q$ et x_1, x_2, x_3 les racines de P. On pose $y_1 = 1/x_1$, $y_2 = 1/x_2$ et $y_3 = 1/x_3$.

1 Trouver un polynôme $Q \in \mathbb{C}_3[X]$ de racines y_1, y_2, y_3.

2 Calculer ${y_1}^6 + {y_2}^6 + {y_3}^6$ et $(1 - y_1)^4 + (1 - y_2)^4 + (1 - y_3)^4$.

Exercice 371

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. Étudier le système $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = 2 \\ a^3x + b^3y + c^3z = 1 \end{cases}$ où a, b, c sont les racines de $X^3 + \lambda X + 1 - \mu$.

Exercice 372

Soient $a_0, \ldots, a_n$ distincts dans $\mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n. Montrer que $(P(X + a_0), P(X + a_1), \ldots, P(X + a_n))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 373

Soient E et F deux espaces vectoriels isomorphes. Montrer que $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ et $(\mathrm{GL}(F), \circ)$ sont isomorphes.

Exercice 374

Soit $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $Q^2 = Q$ et $\operatorname{rg} Q = r$. Déterminer la trace de $\Phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto QM + MQ$.

Exercice 375

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Si $t \in \mathbb{R}$, montrer : $\det(A + tJ) \det(A - tJ) \leqslant \det A^2$.

Exercice 376

Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $A = \mathrm{com}(A)$.

Exercice 377

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 378

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \quad \langle A, B\rangle = \mathrm{tr}({}^t AB)$$

et on note $\| \ \|$ la norme associée. Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Déterminer $\inf \{\|M - aI_n - bJ\|^2, \ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

Exercice 379

1 Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $x^n - nx + 1 = 0$ possède une unique solution u_n dans $]0,1[$.

2 Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

3 Donner un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Exercice 380

Déterminer les primitives de $x \mapsto \frac{1}{\sin x \sqrt{1 - \cos x}}$.

Exercice 381

Calculer $\int_0^{\ln 2} \frac{(\mathrm{sh}\, x)^2}{(\mathrm{ch}\, x)^5} \mathrm{d}x$.

Exercice 382

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ dérivable telle que : $f' \geqslant 1$. Montrer : $\int_0^1 f^3 \geqslant \left(\int_0^1 f\right)^2$.

Exercice 383

Étudier les extrema locaux et globaux de $f : (x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2 \mapsto a/x + b/y + xy$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 384

Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$. Déterminer les extrema de

$$f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 + (a-x)^2 + (b-y)^2.$$

Exercice 385

Soit $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$. On pose $f(0,0) = 0$. Étudier la continuité, l'existence de dérivées partielles et la différentiabilité de f en $(0,0)$.

Exercice 386

Déterminer les $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telles que : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Exercice 387

Tracer la courbe $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \cos t \, e^{i(t - \tan t)}$.

Exercice 388

Étudier $(x(t) = \tan(t/3)\ ,\ y(t) = \sin t)$.

Exercice 389

Calculer $\arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8$.

Exercice 390

Déterminer les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_n^{n+1} P(t)\mathrm{d}t = n^2 + 1$.

Exercice 391

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples. Montrer que P ne peut avoir deux coefficients consécutifs nuls.

Exercice 392

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont les coefficients diagonaux sont égaux à a, les autres égaux à b. Donner une condition sur (a, b) pour que M soit inversible.

Exercice 393

Soit $n \geqslant 2$. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, soit $\Phi(P) \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi(P)(x) = \int_x^{x+1} P(t)\mathrm{d}t$. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Calculer son déterminant.

Exercice 394

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer les $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $M + (\operatorname{tr} M)\, A = B$.

Exercice 395

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Déterminer les $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotents tels que tout sous-espace stable par u admette un supplémentaire stable par u.

Exercice 396

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, u et v dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $\ker u \subset \ker v$. Montrer qu'il existe $a \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $v = a \circ u$.

Exercice 397

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{rg}(u) = 1$.

1 Montrer que u n'est pas diagonalisable si et seulement si $\operatorname{Im} u \subset \ker u$.

2 Montrer que $\operatorname{Im} u \oplus \ker u = E$ si et seulement si $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} u^2$.

Exercice 398

Déterminer les $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + \int_0^x t\, f(x-t)\mathrm{d}t$.

Exercice 399

1 Déterminer les $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dérivables en 0 et telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = 2f(x)$.

2 Déterminer les $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x) - f(y) = \int_{x+2y}^{y+2x} f(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 400

Déterminer les droites à la fois tangente et normale à l'arc : $x(t) = 3t^2$, $y(t) = 2t^3$.

Exercice 401

Montrer que l'arc : $x(t) = \frac{1}{1+t+t^2}$, $y(t) = \frac{t}{1+t+t^2}$ est inclus dans une conique que l'on précisera.

Exercice 402

Étudier la courbe d'équation polaire $\rho = \frac{1}{\sqrt{1+\sin(2\theta)}+\sqrt{1-\sin(2\theta)}}$.

Exercice 403

Soit E une ellipse de foyers F et F'. Si $M \in E$, montrer que la normale à l'ellipse en M est la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MF'})$.

Exercice 404

Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $x^2y^4 + x^4y^2 = 2$. Déterminer une équation de la tangente au point $(1, 1)$.

Exercice 405

Résoudre dans $\mathbb{N}^2$: $n(n+1)(n+2) = m^2$.

Exercice 406

Soit G un groupe fini de cardinal impair. Montrer que tout élément de G est un carré.

Exercice 407

Soient G un groupe fini, H un sous-groupe de G. Montrer que $|H|$ divise $|G|$.

Exercice 408

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.
1 Montrer que si $f(x) \in \mathrm{Vect}(x)$ pour tout $x \in E$ alors f est une homothétie.
On suppose désormais que, pour tout $x \in E$, on a $f^2(x) \in \mathrm{Vect}(x, f(x))$.
2 On suppose que x_1, x_2, x_3 sont trois vecteurs propres associés à trois valeurs propres distinctes et on pose $x = x_1 + x_2 + x_3$. Montrer que $(x, f(x), f^2(x))$ est libre. Qu'en déduire ?
3 On suppose que f admet exactement deux valeurs propres. Montrer que f est diagonalisable. En déduire que $f^2 \in \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}, f)$.

Exercice 409

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire euclidien canonique. Quel est l'orthogonal de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 410

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente telle que ${}^tAA = A^tA$. Montrer que A est nulle.

Exercice 411

Soit $f : x \mapsto \int_0^\pi \ln(1 - 2x\cos t + x^2)\mathrm{d}t$.

1 Quel est l'ensemble de définition de f ?

2 Exprimer $f(-x), f(x^2)$ et $f(1/x)$ en fonction de $f(x)$.

3 Trouver $f(x)$.

Exercice 412

Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ divisibles par leur dérivée.

Exercice 413

Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ avec $a \neq b$ et, pour $k \in \{0, \dots, n\}$, $P_k = (X - a)^k(X - b)^{n-k}$. Montrer que $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Exercice 414

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces de E de même dimension. Montrer que F et G ont un supplémentaire commun.

Exercice 415

Déterminer l'ensemble des $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que : $\forall M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $AM = MA$.

Exercice 416

Soit D l'opérateur de dérivation sur $\mathbb{R}[X]$. Montrer que D n'a pas de racine carrée c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'endomorphisme T tel que $T^2 = D$. Est-ce que $\mathrm{Id} + D$ admet une racine carrée ?

Exercice 417

On munit $\mathbb{R}^5$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0\}$. Déterminer les matrices des projections orthogonales sur F et sur $F^{\perp}$.

Exercice 418

Montrer que : $\{\sqrt{n} - \sqrt{m},\ (n, m) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 419

Montrer qu'une suite réelle monotone admettant une sous-suite convergente est convergente.

Exercice 420

Montrer : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2$.

Exercice 421

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\int_0^1 f = f(1)$.

1 Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.

2 Donner un exemple de $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dérivable et non constante telle que $\int_0^1 f = f(1)$.

Exercice 422

Tracer l'arc paramétré défini par $x(t) = \frac{t^2}{2} + t$ et $y(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}$. Préciser les branches paraboliques, la nature des points de rebroussement. Existe-t-il des droites à la fois normales et tangentes à la courbe ?

Exercice 423

Étudier la courbe en polaire : $\rho(\theta) = 1 + \tan(\theta/2)$.

Exercice 424

Décomposer en éléments simples $\frac{X^{n-1}}{X^n-1}$.

CHAPITRE 6

Friandises extra fraîches (corrigés)

Aller aux énoncés 5

Corrigé de l’exercice 234 ()

Corrigé de l’exercice 235 ()

Corrigé de l’exercice 236 ()

Corrigé de l’exercice 237 ()

Corrigé de l’exercice 238 ()

Corrigé de l’exercice 239 ()

Corrigé de l’exercice 240 ()

Corrigé de l'exercice 241 ()

Corrigé de l'exercice 242 ()

Corrigé de l'exercice 243 ()

Corrigé de l'exercice 244 ()

Corrigé de l'exercice 245 ()

Corrigé de l'exercice 246 ()

Corrigé de l'exercice 247 ()

Corrigé de l'exercice 248 ()

Corrigé de l'exercice 249 ()

Corrigé de l'exercice 250 ()

Corrigé de l'exercice 251 ()

Corrigé de l'exercice 252 ()

Corrigé de l'exercice 253 ()

Corrigé de l'exercice 254 ()

Corrigé de l'exercice 255 ()

Corrigé de l'exercice 256 ()

Corrigé de l'exercice 257 ()

Corrigé de l'exercice 258 ()

Corrigé de l'exercice 259 ()

Corrigé de l'exercice 260 ()

Corrigé de l'exercice 261 ()

Corrigé de l'exercice 262 ()

Corrigé de l'exercice 263 ()

Corrigé de l'exercice 264 ()

Corrigé de l'exercice 265 ()

Corrigé de l'exercice 266 ()

Corrigé de l'exercice 267 ()

Corrigé de l'exercice 268 ()

Corrigé de l'exercice 269 ()

Corrigé de l'exercice 270 ()

Corrigé de l'exercice 271 ()

Corrigé de l'exercice 272 ()

Corrigé de l'exercice 273 ()

Corrigé de l'exercice 274 ()

Corrigé de l'exercice 275 ()

Corrigé de l'exercice 276 ()

Corrigé de l'exercice 277 ()

Corrigé de l'exercice 278 ()

Corrigé de l'exercice 279 ()

Corrigé de l'exercice 280 ()

Corrigé de l'exercice 281 ()

Corrigé de l'exercice 282 ()

Corrigé de l'exercice 283 ()

Corrigé de l'exercice 284 ()

Corrigé de l'exercice 285 ()

Corrigé de l'exercice 286 ()

Corrigé de l'exercice 287 ()

Corrigé de l'exercice 288 ()

Corrigé de l'exercice 289 ()

Corrigé de l'exercice 290 ()

Corrigé de l'exercice 291 ()

Corrigé de l'exercice 292 ()

Corrigé de l'exercice 293 ()

Corrigé de l'exercice 294 ()

Corrigé de l'exercice 295 ()

Corrigé de l'exercice 296 ()

Corrigé de l'exercice 297 ()

Corrigé de l'exercice 298 ()

Corrigé de l'exercice 299 ()

Corrigé de l'exercice 300 ()

Corrigé de l'exercice 301 ()

Corrigé de l'exercice 302 ()

Corrigé de l'exercice 303 ()

Corrigé de l'exercice 304 ()

Corrigé de l'exercice 305 ()

Corrigé de l'exercice 306 ()

Corrigé de l'exercice 307 ()

Corrigé de l'exercice 308 ()

Corrigé de l'exercice 309 ()

Corrigé de l'exercice 310 ()

Corrigé de l'exercice 311 ()

Corrigé de l'exercice 312 ()

Corrigé de l'exercice 313 ()

Corrigé de l'exercice 314 ()

Corrigé de l'exercice 315 ()

Corrigé de l'exercice 316 ()

Corrigé de l'exercice 317 ()

Corrigé de l'exercice 318 ()

Corrigé de l'exercice 319 ()

Corrigé de l'exercice 320 ()

Corrigé de l'exercice 321 ()

Corrigé de l'exercice 322 ()

Corrigé de l'exercice 323 ()

Corrigé de l'exercice 324 ()

Corrigé de l'exercice 325 ()

Corrigé de l'exercice 326 ()

Corrigé de l'exercice 327 ()

Corrigé de l'exercice 328 ()

Corrigé de l'exercice 329 ()

Corrigé de l'exercice 330 ()

Corrigé de l'exercice 331 ()

Corrigé de l'exercice 332 ()

Corrigé de l'exercice 333 ()

Corrigé de l'exercice 334 ()

Corrigé de l'exercice 335 ()

Corrigé de l'exercice 336 ()

Corrigé de l'exercice 337 ()

Corrigé de l'exercice 338 ()

Corrigé de l'exercice 339 ()

Corrigé de l'exercice 340 ()

Corrigé de l'exercice 341 ()

Corrigé de l'exercice 342 ()

Corrigé de l'exercice 343 ()

Corrigé de l'exercice 344 ()

Corrigé de l'exercice 345 ()

Corrigé de l'exercice 346 ()

Corrigé de l'exercice 347 ()

Corrigé de l'exercice 348 ()

Corrigé de l'exercice 349 ()

Corrigé de l'exercice 350 ()

Corrigé de l'exercice 351 ()

Corrigé de l'exercice 352 ()

Corrigé de l'exercice 353 ()

Corrigé de l'exercice 354 ()

Corrigé de l'exercice 355 ()

Corrigé de l'exercice 356 ()

Corrigé de l'exercice 357 ()

Corrigé de l'exercice 358 ()

Corrigé de l'exercice 359 ()

Corrigé de l'exercice 360 ()

Corrigé de l'exercice 361 ()

Corrigé de l'exercice 362 ()

Corrigé de l'exercice 363 ()

Corrigé de l'exercice 364 ()

Corrigé de l'exercice 365 ()

Corrigé de l'exercice 366 ()

Corrigé de l'exercice 367 ()

Corrigé de l'exercice 368 ()

Corrigé de l'exercice 369 ()

Corrigé de l'exercice 370 ()

Corrigé de l'exercice 371 ()

Corrigé de l'exercice 372 ()

Corrigé de l'exercice 373 ()

Corrigé de l'exercice 374 ()

Corrigé de l'exercice 375 ()

Corrigé de l'exercice 376 ()

Corrigé de l'exercice 377 ()

Corrigé de l'exercice 378 ()

Corrigé de l'exercice 379 ()

Corrigé de l'exercice 380 ()

Corrigé de l'exercice 381 ()

Corrigé de l'exercice 382 ()

Corrigé de l'exercice 383 ()

Corrigé de l'exercice 384 ()

Corrigé de l'exercice 385 ()

Corrigé de l'exercice 386 ()

Corrigé de l'exercice 387 ()

Corrigé de l'exercice 388 ()

Corrigé de l'exercice 389 ()

Corrigé de l'exercice 390 ()

Corrigé de l'exercice 391 ()

Corrigé de l'exercice 392 ()

Corrigé de l'exercice 393 ()

Corrigé de l'exercice 394 ()

Corrigé de l'exercice 395 ()

Corrigé de l'exercice 396 ()

Corrigé de l'exercice 397 ()

Corrigé de l'exercice 398 ()

Corrigé de l'exercice 399 ()

Corrigé de l'exercice 400 ()

Corrigé de l'exercice 401 ()

Corrigé de l'exercice 402 ()

Corrigé de l’exercice 403 ()

Corrigé de l’exercice 404 ()

Corrigé de l’exercice 405 ()

Corrigé de l’exercice 406 ()

Corrigé de l’exercice 407 ()

Corrigé de l’exercice 408 ()

Corrigé de l’exercice 409 ()

Corrigé de l’exercice 410 ()

Corrigé de l’exercice 411 ()

Corrigé de l'exercice 412 ()

Corrigé de l'exercice 413 ()

Corrigé de l'exercice 414 ()

Corrigé de l'exercice 415 ()

Corrigé de l'exercice 416 ()

Corrigé de l'exercice 417 ()

Corrigé de l'exercice 418 ()

Corrigé de l'exercice 419 ()

Corrigé de l'exercice 420 ()

Corrigé de l’exercice 421 ()

Corrigé de l’exercice 422 ()

Corrigé de l’exercice 423 ()

Corrigé de l’exercice 424 ()