Table des matières

CHAPITRE 1

TD 1 : révisions (énoncés)

Aller aux corrigés 2

1. Applications

Les lettres E, F, G désignent des ensembles.

Exercice 1

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1 Montrer que si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective.

2 Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.

Exercice 2

On dit qu'une application $f : E \to F$ est inversible à gauche (resp. inversible à droite) s'il existe une fonction $g : F \to E$ (resp. $h : F \to E$) telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ (resp. $f \circ h = \mathrm{Id}_F$). On dit que f est inversible si elle est inversible à gauche et à droite.

1 Montrer que si f est inversible à gauche d'inverse g et inversible à droite d'inverse h, alors $g = h$.

2 Montrer que f est bijective si et seulement si elle est inversible.

3 Montrer que si $f : E \to E$ est une involution (*i.e.* $f \circ f = \mathrm{Id}_E$), alors elle est bijective, et donner sa bijection réciproque.

4 Montrer plus généralement que si $f : E \to E$ vérifie $f^n = \mathrm{Id}_E$ (f composée n fois) pour un certain entier naturel $n \geqslant 2$, alors f est bijective, et donner sa bijection réciproque.

5 Donner un exemple d'application admettant un inverse à droite mais pas à gauche (resp. un inverse à gauche mais pas à droite).

2. Relations d'ordre

Exercice 3

1 Donner une relation d'ordre total sur $\mathbb{C}$.

2 Montrer que $\mathbb{C}$ n'admet pas de *structure de corps totalement ordonné*, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de relation d'ordre total sur $\mathbb{C}$ compatible avec les opérations du corps des nombres complexes.

3 Donner un ordre partiel sur $\mathbb{C}$ compatible avec les opérations sur $\mathbb{C}$.

Exercice 4

Soit E un ensemble, $F = \mathbb{R}^E$. On introduit une relation $\preccurlyeq$ sur F par

$$\forall (f,g) \in F^2, \quad (f \preccurlyeq g) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leqslant g(x)) .$$

1 Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre.

2 L'ordre défini est-il total ?

3 Soit $f \in F$. Les assertions « f est majorée » et « $\{f\}$ est majorée » sont-elles équivalentes ?

4 Soit $f, g \in F$. L'ensemble $\{f, g\}$ admet-il un plus grand élément ? une borne supérieure ?

5 Montrer que toute partie non vide et majorée de F admet une borne supérieure.

3. Entiers naturels, symboles de somme et de produit

Exercice 5

1 Montrer qu'il existe une unique suite (u_n) de nombres réels telle que $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{-1}{1+u_n}.$$

2 Même question pour les conditions $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = 1 + \ln(v_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3 Même question pour les conditions $w_0 = 0$ et $w_{n+1} = \sqrt{2 - w_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6

Montrer, pour tout $(n,t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$: $|\sin(nt)| \leqslant n|\sin(t)|$.

Exercice 7

1 Établir une formule pour $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$ valable pour chaque entier $n \geqslant 2$.
2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $1\,1! + 2\,2! + \cdots + n\,n! = (n+1)! - 1$.
3 Évaluer, pour tout entier naturel n, la somme

$$S_n = \sum_{\{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}, p+q\leqslant n\}} (p+q).$$

4 Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Trouver une formule pour $\prod_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{i}\right)$.
5 De même pour $\prod_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right)$.
6 Soit n un entier naturel. Calculer $\displaystyle\sum_{i+j=n} \min(\{i,j\})$, $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \min(\{i,j\})$ et $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \min(\{i,j\})$.
7 Soit n un entier naturel. Calculer $\displaystyle\sum_{i+j=n} ij$.

Exercice 8

1 Montrer de deux manières que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
2 Montrer de deux manières que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3 Trouver une formule analogue pour $\sum_{k=0}^{n} k^3$. Quel est le lien entre cette somme et $\sum_{k=0}^{n} k$? Retrouver ce lien par un dessin.

Exercice 9

Montrer de deux manières différentes que, pour tout entier pair $\geqslant 2$, on a :

$$2^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \binom{n+2}{3}$$

Montrer que pour tout entier naturel impair n, on a

$$1^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \binom{n+2}{3}.$$

4. Complexes

Exercice 10

Déterminer l'ensemble $\left\{n \in \mathbb{N}, \left(\frac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}\right)^n \in \mathbb{R}_+\right\}$.

Exercice 11

Linéariser les expressions suivantes, dépendant de la variable réelle x : $\cos(x)^4$, $\sin(x)^5$, $\cos(x)^3\sin^2(x)$.

Exercice 12

Exprimer comme un polynôme de la fonction cosinus la fonction f définie par $f(2k\pi) = 6$ et $f((2k+1)\pi) = -6$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et, pour tout réel $x \notin \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, par

$$f(x) = \frac{\sin 6x}{\sin x}.$$

Exercice 13

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Déterminer un réel $A > 0$ et un réel θ_0 de sorte que :

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad a\cos\theta + b\sin\theta = A\cos\left(\theta - \theta_0\right).$$

Exercice 14

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout réel x, calculer :

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) \quad \text{et} \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx).$$

Exercice 15

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$ et $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$.

Exercice 16

Déterminer les racines cubiques de $\sqrt{3} - i$ et de $\frac{i+\sqrt{3}}{i-\sqrt{3}}$.

Exercice 17

1 Résoudre l'équation $z^2 - (4+2i)z + (11+10i) = 0$.
2 Résoudre l'équation $(1+i)z^2 - 4iz + 26 - 2i = 0$.

Exercice 18

1 Résoudre l'équation
$$(1-i)z^3 + (-4+8i)z^2 + (3-25i)z + 30i = 0,$$
sachant qu'elle admet une solution réelle.
2 Résoudre l'équation
$$z^3 - (5+3i)z^2 + (7+16i)z + 3 - 21i = 0,$$
sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure.
3 Résoudre l'équation
$$z^6 + (2i-1)z^3 - 1 - i = 0.$$

5. Calculs sur les fonctions numériques

Exercice 19

Calculer, pour tout entier naturel n, la dérivée d'ordre n de
1 $x \mapsto (x^3 + 2x - 7)e^x$.
2 $\cos^3$.
3 $x \mapsto 1/(x^2-1)$.

Exercice 20

Calculer
1 $\int_0^\pi \cos(x)^3 \sin(x)\mathrm{d}x$.
2 $\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\mathrm{d}u$.
3 $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+2}\mathrm{d}x$.
4 $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)}$. $(t = \tan(x/2))$
5 $\int_0^{\pi/6} \frac{\mathrm{d}x}{\cos(x)}$.
6 $\int_{1/2}^{3/4} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}}$. $(t = \sin(u)^2)$
7 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$. ($u = e^x$ puis $t = \sqrt{1+u^2}$)

Exercice 21

À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive de la fonction logarithme (sur $\mathbb{R}_+^*$).

Exercice 22

Calculer

1 $\int_0^{2\pi} \sin px \sin qx \mathrm{d}x$, $\int_0^{2\pi} \sin px \cos qx \mathrm{d}x$, $\int_0^{2\pi} \cos px \cos qx \mathrm{d}x$, où $(p,q) \in \mathbb{N}^2$

2 $\int \cos^2 x \sin^2 x \mathrm{d}x$.

3 $\int \cos^2 x \sin^3 x \mathrm{d}x$.

4 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^3 x} \mathrm{d}x$.

5 $\int_{\sqrt{2}}^{\pi+\sqrt{2}} \frac{(\cos(2t))^3}{2+\sin^2 t \cos^2 t} \mathrm{d}t$.

6 $\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+3\sin^2 x}$.

7 $\int \frac{\sin(x)\mathrm{d}x}{\sin^3(x)+\cos^3(x)}$.

8 $\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$.

9 $\int \frac{\sin(2x)}{1+\cos^2(x)} \mathrm{d}x$.

Exercice 23

Calculer

1 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x(1+\operatorname{sh} x)}$.

2 $\int \frac{\mathrm{d}x}{5\operatorname{ch} x+3\operatorname{sh} x+4}$.

Exercice 24

Trouver les primitives de f, où f est successivement donnée par

1 $x \mapsto x \arctan(x)^2$.

2 $x \mapsto \frac{1}{x+x\ln(x)^2}$.

3 $x \mapsto \frac{1}{x}\ln(\ln(x))$.

4 $x \mapsto \arctan\sqrt{1-x^2}$.

Exercice 25

Vérifier :

1 $\lim\limits_{x\to\pi/4} \frac{\frac{1}{\cos^2(x)}-2\tan(x)}{1+\cos(4x)} = \frac{1}{2}$.

2 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^x-x}{1-x+\ln(x)} = -2$.

3 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\arctan^3(x)}\left(\ln(\ln(e+x)) - \frac{x}{e+x}\right) = \frac{1}{6e^3}$.

4 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\arctan x - \frac{\pi x+1}{2x+1}\right) = \frac{\pi-6}{4}$.

5 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x}\right)\right)^x = e^2$.

6 $\lim\limits_{x\to 1/2} (2x^2-3x+1)\tan(\pi x) = \frac{1}{\pi}$.

6. Divers

Exercice 26

Soit I un intervalle centré en 0, f une application de I dans $\mathbb{R}$.

1 Montrer que f s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire f_p et d'une fonction impaire f_i, appelées respectivement partie paire et partie impaire de f.

2 Que dire des applications partie paire et partie impaire ainsi définies de $\mathbb{R}^I$ dans lui-même ?

Exercice 27

On considère la suite de terme général

$$u_n = \int_1^n \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t.$$

Montrer que cette suite est bornée.

Exercice 28

Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ de la fraction rationnelle F donnée par :

1 $\frac{X^5}{(X-1)^4}$.

2 $\frac{X^3+X^2-X+1}{(X^2+1)(X^2+4)}$.

3 $\frac{X^2-4}{X^2-3}$.

4 $\frac{1}{X^3(X^2-1)}$.

5 $\frac{2X^4+X^3+3X^2-6X+1}{2X^3-X^2}$.

6 $\frac{2X^5-8X^3+8X^2-4X+1}{X^3(X-1)^2}$.

Exercice 29

1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $B = A - I_3$. Calculer B^n, puis A^n, pour tout entier naturel n.

2 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour tout entier n, calculer A^n.

3 Soit $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $(A(\theta))^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

4 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

5 Calculer les puissances de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Faire le lien avec la suite de Fibonacci.

CHAPITRE 2

TD 1 : révisions (corrigés)

Aller aux énoncés 1

1. Applications

Les lettres E, F, G désignent des ensembles.

Corrigé 1 (Composition, injectivité, surjectivité)

1 Supposons $g \circ f$ injective et f surjective. Soit $y, y' \in F$ tels que $g(y) = g(y')$. Comme f est surjective, il existe $x, x' \in E$ tels que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$, de sorte que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$, puis $x = x'$ par injectivité de $g \circ f$. Dès lors, $y = y'$ en appliquant f : g est injective.

2 Supposons $g \circ f$ surjective et g injective. Comme $g \circ f$ est surjective, g l'est également (cf. le cours). g est donc bijective, puis, comme $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$, f est surjective comme composée de telles fonctions.

Corrigé 2 (Inverse à droite, inverse à gauche)

1 Dans un tel cas, on a en effet d'une part

$$g \circ f \circ h = (g \circ f) \circ h = \mathrm{Id}_E \circ h = h,$$

et, d'autre part,

$$g \circ f \circ h = g \circ (f \circ h) = g \circ \mathrm{Id}_F = g,$$

donc $g = h$.

2 Si f est bijective, alors f^{-1} (qui existe bien), est inverse à gauche et à droite de f.

Réciproquement, si f est inversible à gauche et à droite, d'inverse g, alors $g \circ f$ est injective (c'est Id_E), donc f l'est aussi, et $f \circ g$ est surjective (c'est Id_F), donc f l'est également. En conclusion, f est bijective.

3 Dans un tel cas, f s'admet elle-même pour inverse, donc f^{-1} existe et vaut f.

4 Dans un tel cas, f admet f^{n-1} pour inverse, donc f^{-1} existe et vaut f^{n-1}.

5 À trouver soi-même.

2. Relations d'ordre

Corrigé 3 (Structure de corps ordonné et nombres complexes)

1 On peut par exemple proposer l'ordre lexicographique (en ayant identifié $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$).

2 Supposons disposer d'un tel ordre. Le produit de deux nombres positifs serait positif, donc tout carré z^2 serait positif (car $z \geqslant 0$ ou $-z \geqslant 0$), puis tout complexe serait positif. En particulier, $0 \leqslant -1$, donc $1 \leqslant 0$ en ajoutant 1, et, par ailleurs, $0 \leqslant 1$, d'où l'absurdité $0 = 1$.

3 On peut proposer l'ordre produit sur $\mathbb{C}$ (identifié à $\mathbb{R}^2$), ou l'égalité.

Corrigé 4 (Une relation d'ordre sur un ensemble de fonctions)

1 Facile (provient des mêmes propriétés pour l'ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$.

2 Pour $E = \mathbb{R}$, $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, la première propriété est vérifiée (elle l'est pout toute fonction $f \in F$), la seconde ne l'est pas.
Remarque : si E est fini, les deux assertions sont équivalentes, puisqu'elles sont vraies.

3 f et g ne sont pas nécessairement comparables (considérer des fonctions caractéristiques d'ensembles non comparables pour l'inclusion), donc $\{f, g\}$ n'a pas toujours de plus grand élément. En revanche, $\{f, g\}$ admet $x \mapsto \max(f(x), g(x))$ pour borne supérieure.

4 Cela résulte essentiellement de la même propriété pour $\mathbb{R}$.

3. Entiers naturels, symboles de somme et de produit

Corrigé 5 (Suite récurrente bien définie)

1 On peut choisir $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ (plus grande partie stable convenable), ou $\{1, -1/2, -2\}$ (plus petite partie stable convenable).

2 Prendre par exemple l'intervalle $[1, +\infty[$.

3 L'intervalle $[0, 2]$ comprend $w_0 (= 0)$ et est stable par la fonction de récurrence $x \mapsto \sqrt{2-x}$: il existe donc bien une unique telle suite (w_n).

Corrigé 6 (Inégalités entre sinus)

Corrigé 7 (Symboles de somme et de produit)

1 Pour tout $k \in [\![2, n]\!]$,

$$\frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2(k-1)} - \frac{1}{2(k+1)},$$

donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} &= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{3}{4} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)}.
\end{aligned}$$

2 $1\,1! + 2\,2! + \cdots + n\,n! = \sum_{k=1}^{n} k(k!) = \sum_{k=1}^{n}((k+1)! - k!) = (n+1)! - 1$.

3 On peut sommer par tranches verticales (ou horizontales), mais aussi par tranches diagonales (à $p+q$ constant) :

$$S_n = \sum_{s=0}^{n} (s+1)s = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1+3) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

4 $\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i}\right)=\prod_{i=2}^{n}\frac{i-1}{i}=\frac{1}{n}$.

5 $\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\prod_{i=2}^{n}\frac{(i-1)(i+1)}{i^2}=\prod_{i=2}^{n}\frac{i-1}{i}\prod_{i=2}^{n}\frac{i+1}{i}=\frac{n+1}{2n}$.

6 $\displaystyle\sum_{i+j=n}\min(\{i,j\}),\ \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\min(\{i,j\})$ et

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n}\min(\{i,j\}) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}j+\sum_{j=i+1}^{n}i\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{i(i+1)}{2}+(n-i)i\\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{2n+1}{2}i-\frac{i^2}{2}\\ &= \frac{2n+1}{2}\frac{n(n+1)}{2}-\frac{1}{12}n(n+1)(2n+1)\\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\end{aligned}$$

Remarque : on trouve donc $\sum_{k=1}^{n}k^2$, ce qui n'est pas un hasard (essayez de voir cette somme comme un calcul de nombre de briques d'une pyramide !)

7 $\sum_{i+j=n}ij=\sum_{i=0}^{n}i(n-i)=n\frac{n(n+1)}{2}-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)$.

Corrigé 8 (Sommes de puissances)

1 On peut le faire par récurrence (puisque la formule nous est donnée). On peut aussi exploiter un chanement d'indice

$$\sum_{k=0}^{n}k=\sum_{k=0}^{n}(n-k)$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n}k=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}k+\sum_{k=0}^{n}(n-k)\right)=\frac{1}{2}n(n+1)$$

On peut aussi utiliser la somme télescopique $\sum_{k=0}^{n}((k+1)^2-k^2)$.

2 On peut le faire par récurrence, ou en considérant la somme télescopique $\sum_{k=0}^{n}((k+1)^3-k^3)$.

3 On trouve $\sum_{k=0}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Corrigé 9 (Somme de carrés de nombres de même parité)

On peut le faire par récurrence, ou en factorisant par 4.
La seconde formule résulte de la première.

4. Complexes

Corrigé 10 (Ensemble d'entiers déterminé par une condition complexe)

La forme trigonométrique s'impose clairement pour traiter ce type d'exercice. On a

$$1-i\sqrt{3}=2e^{-i\pi/3}\quad\text{et}\quad 1-i=\sqrt{2}e^{-i\pi/4},$$

donc,

$$\frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^5}{(1-i)^3} = \frac{2^5 e^{-5i\pi/3}}{\sqrt{2}^3 e^{-3i\pi/4}} = \sqrt{2}^7 e^{-11i\pi/12}$$

Ainsi,

$$\frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^5}{(1-i)^3} = 8\sqrt{2}e^{-11i\pi/12},$$

donc

$$\arg\left(\frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^5}{(1-i)^3}\right)^n \equiv -\frac{11n\pi}{12}\ [2\pi],$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Rappelons qu'un nombre complexe z est réel strictement positif si et seulement si $\arg z \equiv 0\ [2\pi]$.

L'ensemble cherché est donc $\boxed{24\,\mathbb{N} = \{24k,\ k \in \mathbb{N}\}.}$

Corrigé 11 (Exemples de linéarisation)

Utiliser les formules d'Euler.

Corrigé 12 (Polynôme de la fonction cosinus)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Après calculs,

$$\begin{array}{rcl} \sin(6x) & = & \operatorname{Im}((e^{ix})^6) \\ & = & (\cos(x) + i\sin(x))^6 \\ & = & 2\cos(x)(-1+2\cos(2x))(1+2\cos(2x))sin(x) \end{array}$$

de sorte que le choix

$$f(x) = 2\cos(x)(-1+2\cos(2x))(1+2\cos(2x)),$$

convienne si $x \notin \pi\mathbb{Z}$.

On observe que ce choix convient aussi dans le cas où $x \in \pi\mathbb{Z}$.

Corrigé 13 (Changement d'écriture d'une combinaison de cosinus et sinus)

Soit $A, \theta_0 \in \mathbb{R}$.

On a, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$A\cos(\theta - \theta_0) = (A\cos(\theta_0))\cos(\theta) + (A\sin(\theta_0))\sin(\theta).$$

Il suffit donc de trouver $(A, \theta_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que

$$\left\{\begin{array}{rcl} A\cos(\theta_0) & = & a \\ A\sin(\theta_0) & = & b \end{array}\right.$$

i.e. $Ae^{i\theta_0} = a+ib$: la forme exponentielle de $a+ib$ nous donne donc le résultat : $A = \sqrt{a^2+b^2}(= |a+ib|)$ et θ_0 est l'un des arguments de $a+ib$.

Remarque : en pratique, retenir qu'il faut factoriser par $\sqrt{a^2+b^2}$.

Corrigé 14 (Calculs de sommes trigonométrique)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

Dans le cas où $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, on a bien sûr $C_n(x) = n+1$ et $S_n(x) = 0$.

Dans le cas où $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned}
C_n(x) + iS_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} (e^{ix})^k \\
&= \frac{(e^{ix})^{n+1} - 1}{e^{ix} - 1} \\
&= \frac{e^{i\frac{(n+1)x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}} \cdot \frac{e^{i\frac{(n+1)x}{2}} - e^{-i\frac{(n+1)x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} \\
&= e^{i\frac{nx}{2}} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin(x/2)}
\end{aligned}$$

En prenant les parties réelles, on trouve donc

$$C_n(x) = \cos(nx/2)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin(x/2)}$$

et, en prenant les parties imaginaires :

$$S_n(x) = \sin(nx/2)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin(x/2)}$$

Corrigé 15 (Sommes trigonométriques à coefficients binomiaux)

$$\begin{aligned}
A_n + iB_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^{ix})^k \\
&= (1 + e^{ix})^n \\
&= \left(e^{ix/2}(2\cos(x/2))\right)^n \\
&= 2^n \cos(x/2)^n e^{inx/2}
\end{aligned}$$

En prenant les parties réelles, on trouve donc

$$A_n = 2^n \cos(x/2)\cos(nx/2)$$

et, en prenant les parties imaginaires :

$$B_n(x) = 2^n \cos(x/2)\sin(nx/2)$$

Corrigé 16 (Calculs de racines cubiques)

Comme $\sqrt{3} - i = 2e^{-i\pi/6}$, ses racines cubiques sont $2^{1/3}e^{-i\pi/18}$, $2^{1/3}e^{-i\pi/18}e^{2i\pi/3} = 2^{1/3}e^{11i\pi/18}$ et $2^{1/3}e^{-i\pi/18}e^{-2i\pi/3} = 2^{1/3}e^{-13i\pi/18}$.

Corrigé 17 (Équations algébriques complexes)

1

2 Remarquons d'abord que

$$\frac{-4i}{1+i} = -2 - 2i \quad \text{et} \quad \frac{26 - 2i}{1+i} = 12 - 14i.$$

Nous cherchons donc les racines du polynôme $X^2 - (2+2i)X + 12 - 14i$.

Le discriminant de ce polynôme est

$$\Delta = (-(2+2i))^2 - 4(12-14i) = 16(-3+4i) = (4(1+2i))^2,$$

donc ses racines sont

$$\frac{2+2i+4(1+2i)}{2} = 3+5i \quad \text{et} \quad \frac{2+2i-4(1+2i)}{2} = -1-3i$$

Les solutions de l'équation donnée sont $\boxed{3+5i \text{ et } -1-3i.}$

Corrigé 18 (Équations algébriques complexes plus compliquées)

1

2 Un nombre imaginaire pur ib ($b \in \mathbb{R}$) est solution de $\mathcal{E}$ si et seulement si :

$$-ib^3 + (5+3i)b^2 + i(7+16i)b + 3 - 21i = 0,$$

soit :

$$\begin{cases} 5b^2 - 16b + 3 = 0 \\ -b^3 + 3b^2 + 7b - 21 = 0 \end{cases}.$$

Le polynôme $5X^2 - 16X + 3$ admet 3 et $1/5$ pour racines. On vérifie aisément que 3 est également racine de $-X^3 + 3X^2 + 7X - 21$. Ainsi, $3i$ est solution de $\mathcal{E}$.

Il existe donc des nombres complexes a, b, c tels que :

$$X^3 - (5+3i)X^2 + (7+16i)X + 3 - 21i = (X-3i)(aX^2 + bX + c)$$

Après identification, on trouve $a = 1$, $c = 7+i$, puis $b = -5$. Les deux autres solutions de $\mathcal{E}$ sont les racines de :

$$X^2 - 5X + 7 + i$$

Le discriminant de ce polynôme est : $\Delta = (-5)^2 - 4(7+i) = -3 - 4i$.

On cherche une racine carrée $\delta = x + iy$ de Δ ($x, y \in \mathbb{R}$). En suivant la méthode vue en première année, on obtient d'abord $x^2 - y^2 = -3$, puis $x^2 + y^2 = 5$. Ainsi, $x = \pm 1$, $y = \pm 2$. Comme $2xy = -4 < 0$, on peut prendre $\delta = 1 - 2i$.

Finalement, les deux autres solutions de $\mathcal{E}$ sont $\frac{5-(1-2i)}{2} = 2+i$ et $\frac{5+(1-2i)}{2} = 3-i$.

$\boxed{\text{Les solutions de } \mathcal{E} \text{ sont } 3i,\ 2+i \text{ et } 3-i.}$

3 On change d'abord d'indéterminée, en posant $y = z^3$.

On cherche donc dans un premier temps les racines du polynôme

$$X^2 + (2i-1)X - 1 - i.$$

Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = (2i-1)^2 + 4(1+i) = 1$, donc ses racines sont $-i$ et $1-i$.

Il nous reste à déterminer les racines cubiques de $-i$ et $1-i$ qui, par « chance », s'expriment facilement sous forme trigonométrique : $-i = e^{-i\pi/2}$ et $1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$. Pour obtenir les racines cubiques de ces nombres complexes, on en trouve une, et on la multiplie par les différentes racines cubiques de l'unité $1, j, j^2$ (où $j = e^{2i\pi/3}$).

Les solutions de l'équation considérée sont

$$e^{-i\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, je^{-i\pi/6} = e^{i\pi/2} = i, j^2e^{-i\pi/6} = e^{-5i\pi/6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

et

$$2^{\frac{1}{6}}e^{-i\frac{\pi}{12}}, 2^{\frac{1}{6}}e^{7i\frac{\pi}{12}}, 2^{\frac{1}{6}}e^{-3i\frac{\pi}{4}}.$$

En remarquant que $-\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}$ et que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$, on peut donner les solutions de $\mathcal{E}$ sous forme algébrique :

$$\boxed{i, \frac{\sqrt{3}-i}{2}, -\frac{\sqrt{3}+i}{2}, -2^{-\frac{1}{3}}(1+i),}$$

et

$$\boxed{\frac{2^{1/6}}{4}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}+i(\sqrt{2}-\sqrt{6})\right), \frac{2^{1/6}}{4}\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}+i(\sqrt{6}+\sqrt{2})\right)}$$

5. Calculs sur les fonctions numériques

Corrigé 19 (Dérivées successives)

1 Formule de Leibniz.

2 Linéarisation.

3 Décomposition en éléments simples.

Corrigé 20 (Changements de variables)

1 $\int_0^\pi \cos(x)^3 \sin(x)\mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos(x)^4}{4}\right]_0^\pi = 0.$

2 $\pi/4$

3 $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+2}\mathrm{d}x = [\ln(x^2+x+2)]_0^1 = \ln(2).$

4 Les bornes deviennent $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et 1, dx devient $\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$, et $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$ de sorte que l'intégrale cherchée est égale à

$$\int_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = [\ln(t)]_{1/\sqrt{3}}^1 = \frac{\ln(3)}{2}$$

5 On peut se ramener à l'intégrale précédente en effectuant le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - x$.

6 Les bornes deviennent $\pi/4$ et $\pi/3$, dt devient $2\sin(u)\cos(u)\mathrm{d}u$, de sorte que l'intégrale cherchée est égale à

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} 2\mathrm{d}u = 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Remarque : le changement de variable $t = \sin(u)^2$ n'en est pas vraiment un, puisque la variable initiale est t, et que cette relation ne permet pas d'écrire u en fonction de t. Il faut donc effectuer un changement de variable précis, comme $u = \arcsin(\sqrt{t})$ (afin de bien avoir $t = \sin(u)^2$), ou « remonter » les calculs (afin que la variable initiale soit bien u).

Remarque : certains se sont embrouillés car ils ont remarqué que $\sin(u)^2 = \frac{1}{2}$ était vrai lorsque $u = -\pi/4$ par exemple, et ne savaient pas très bien comment changer les bornes (ceci doit se comprendre à la lumière de la remarque précédente).

7 Les bornes devient 1 et e, dx devient $\frac{\mathrm{d}u}{u}$, de sorte que l'intégrale est égale à

$$\int_1^e \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}$$

Les bornes deviennent $\sqrt{2}$ et $\sqrt{1+e^2}$, $t^2 = 1+u^2$ donc $2t\mathrm{d}t = 2u\mathrm{d}u$, puis $\mathrm{d}u = \frac{t\mathrm{d}t}{u}$, de sorte que l'intégrale cherchée est égale à

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}},$$

soit enfin

$$\frac{1}{2}\left(\ln\frac{\sqrt{1+e^2}-1}{\sqrt{1+e^2}+1}-\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)$$

Corrigé 21 (Primitive du logarithme)

$x \mapsto x\ln(x) - x$.

Corrigé 22 (Fonctions trigonométriques circulaires)

1 $\int_0^{2\pi}\sin px\sin qx\mathrm{d}x$, $\int_0^{2\pi}\sin px\cos qx\mathrm{d}x$, $\int_0^{2\pi}\cos px\cos qx\mathrm{d}x$, où $(p,q)\in\mathbb{N}^2$

2 $\int\cos^2 x\sin^2 x\mathrm{d}x$.

3 $\int\cos^2 x\sin^3 x\mathrm{d}x$.

4 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin^3 x}\mathrm{d}x$.

5 $\int_{\sqrt{2}}^{\pi+\sqrt{2}}\frac{(\cos(2t))^3}{2+\sin^2 t\cos^2 t}\mathrm{d}t$.

6 $\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+3\sin^2 x}$.

7 Réponse : (en posant $u=\tan(x)$) $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{-1+2\tan x}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{6}\ln\left(\tan^2 x-\tan x+1\right)-\frac{1}{3}\ln|1+\tan x|+C$.

8 Réponse : (en posant $u=\tan(x/2)$) $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)+C$.

9 $\int\frac{\sin(2x)}{1+\cos^2(x)}\mathrm{d}x$.

Corrigé 23 (Fonctions trigonométriques hyperboliques)

1 Réponse : $x\mapsto\frac{1}{2}\ln|1+\operatorname{sh}x|-\frac{1}{2}\ln(\operatorname{ch}x)+\frac{1}{2}\arctan(\operatorname{sh}x)+C$.

2 Réponse : $x\mapsto-\frac{1}{2(2e^x+1)}+C$.

Corrigé 24 (Primitives diverses)

1

$$\begin{aligned}
\int x\arctan(x)^2\mathrm{d}x &= \frac{x^2}{2}\arctan(x)^2-\int\frac{x^2}{1+x^2}\arctan(x)\mathrm{d}x\\
&= \frac{x^2}{2}\arctan(x)^2-\int\arctan(x)\mathrm{d}x+\int\frac{1}{1+x^2}\arctan(x)\mathrm{d}x\\
&= \frac{x^2}{2}\arctan(x)^2-\left(x\arctan(x)-\int\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x\right)+\frac{1}{2}\arctan(x)^2\\
&= \frac{x^2}{2}\arctan(x)^2-x\arctan(x)+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\arctan(x)^2+C
\end{aligned}$$

2 $\int\frac{1}{x+x\ln(x)^2}=\int\frac{1}{x}\frac{1}{1+\ln(x)^2}\mathrm{d}x=\arctan(\ln(x))+C$.

3 Si on connaît les primitives de ln :

$$\int\frac{1}{x}\ln(\ln(x))\mathrm{d}x=[u\ln(u)-u]_{u=\ln(x)}=\ln(x)\ln(\ln(x))-\ln(x)+C.$$

Autre méthode (en faisant une IPP) :

$$\int\frac{1}{x}\ln(\ln(x))\mathrm{d}x=\ln(x)\ln(\ln(x))-\int\ln(x)\frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x=\ln(\ln(x))-\ln(x)+C.$$

4 $x \mapsto \arctan\sqrt{1-x^2}$.

Corrigé 25 (Calculs de limites)

6. Divers

Corrigé 26 (Parties paire et impaire d'une fonction)

1 Faire un raisonnement par analyse-synthèse.

2 Ces applications sont de somme l'identité (sur $\mathbb{R}^I$), et sont idempotentes (*i.e.* égales à leur composée deux fois).

Corrigé 27 (Une suite bornée)

Corrigé 28 (Décompositions élémentaires en éléments simples)

1 **Réponse :** $(F = X + 4 + \frac{10}{X-1} + \frac{10}{(X-1)^2} + \frac{5}{(X-1)^3} + \frac{1}{(X-1)^4})$

2

3

4 **Réponse :** $F = -\frac{1}{X^3} - \frac{1}{X} + \frac{1}{2(X-1)} + \frac{1}{2(X+1)}$.

5 **Réponse :** $X + 1 - \frac{1}{X^2} + \frac{4}{X} - \frac{2}{X-\frac{1}{2}}$.

6 **Réponse :** $2 + \frac{1}{X^3} - \frac{2}{X^2} + \frac{3}{X} - \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{1}{X-1}$.

Corrigé 29 (Puissances de matrices)

CHAPITRE 3

Oraux 1 : révisions (énoncés)

Aller aux corrigés 4

Exercice 30

1 Donner un développement à la précision $\frac{1}{x^3}$ de la fonction arctangente en $+\infty$.

2 Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'équation $x + \ln(x) = a$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$ possède une unique solution, notée $f(a)$. Donner un développement asymptotique à deux termes de f en $+\infty$.

3 Montrer que pour tout $\alpha > e$, l'équation $e^x = \alpha x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ admet exactement deux solutions, que nous noterons $f(\alpha)$ et $g(\alpha)$, avec $f(\alpha) < g(\alpha)$. Donner des développements asymptotiques à deux termes de f et g en $+\infty$.

Exercice 31

Calculer

1 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+1}$.

2 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^4-1)}$.

3 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)^2}$.

4 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+ix}$.

5 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}$.

6 *(X MP 08)* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-x^2}{1-x^2+x^4}\mathrm{d}x$.

7 *(X MP 08)* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $(a, b \in \mathbb{R}_+^*)$.

Exercice 32

Calculer

1 $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x+1}\mathrm{d}x$.

2 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}}$.

3 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$.

4 *(X MP 08)* $\int_a^b \sqrt{(b-x)(x-a)}\mathrm{d}x$.

5 *(X MP 08)* $\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\sin t}\mathrm{d}t$.

6 $\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x-1}}$.

7 $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x+1}}\mathrm{d}x$.

Exercice 33

1 *(X PC 08)* Soit $P = X^3 + 2X^2 + X + 1$. Déterminer le nombre de racines réelles de P. On note x_1, x_2, x_3 les racines de P. Déterminer : $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$, $\frac{1}{x_1-2} + \frac{1}{x_2-2} + \frac{1}{x_3-2}$

2 On note $w_1, \ldots, w_{n-1}$ les racines de $X^n - 1$ différentes de 1. Calculer : $\prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1-w_i}$, $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1-w_i}$.

CHAPITRE 4

Oraux 1 : révisions (corrigés)

Aller aux énoncés 3

Corrigé 30 (Développements asymptotiques de fonctions)

Corrigé 31 (Fractions rationnelles)

Corrigé 32 (Racines)

Corrigé 33 (Polynômes, fractions rationnelles)

CHAPITRE 5

TD 2 : algèbre linéaire (énoncés)

Aller aux corrigés 6

1. Révisions d'algèbre linéaire

Exercice 34

1 Montrer que si (u_1, u_2, u_3) est un triplet de vecteurs tous non nuls de $\mathbb{R}^3$, orthogonaux deux à deux, alors (u_1, u_2, u_3) est libre.

2 La famille $(f_a : x \mapsto \cos(x+a))_{a\in\mathbb{R}}$ est-elle libre ? Quelles sont ses sous-familles libres ?

3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $a_1, \dots, a_n$ des réels distincts deux à deux. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on introduit $P_i : x \mapsto \prod_{j=1, j\neq i}^n (x - a_j)$. Montrer que $(P_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est libre.

4 *(Mines MP 08, Mines MP 09)* Montrer que la famille des fonctions réelles de la variable réelle $t \mapsto |t-a|$, lorsque a décrit $\mathbb{R}$, est libre.

5 Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit $g_a : x \mapsto e^{ax} \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Montrer que $(g_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre.

6 Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E. On suppose que $f^p(x) = 0$ et $f^{p-1}(x) \neq 0$ pour un certain vecteur x de E et où $p \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre.

7 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $h_n : x \mapsto x^n \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Montrer que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.

8 Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose $u^m = (\sin(1/n^m))_{n\in\mathbb{N}^*}$. Montrer que $(u^m)_{m\in\mathbb{N}}$ est libre.

9 *(X MP 08)* Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x^n)$. Montrer que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.

10 *(X MP 08)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La famille de fonctions

$$(x \mapsto \sin(nx), x \mapsto \sin((n-1)x)\cos(x), \dots, x \mapsto \sin(x)\cos((n-1)x))$$

est-elle libre ?

11 *(X MP 08)* Soit $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \ln(1+x)$. Montrer que $(f, f\circ f, f\circ f\circ f)$ est un système libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Exercice 35

Soit E et F deux espaces vectoriels, E étant de dimension finie. Soit $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$.

1 Montrer que si f est nulle sur une famille génératrice de E, alors f est identiquement nulle.

2 Montrer que si f, g coïncident sur une famille génératrice de E, alors $f = g$.

3 Montrer que si (dans le cas où $E = F$), pour tout $x \in E$, $(x, f(x))$ est liée, alors f est une homothétie.

Exercice 36

1 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, vérifiant $f^3 + 2f + 5\mathrm{Id}_E = 0$. Montrer que f est un automorphisme de E.

2 Soit f un endomorphisme de E, vérifiant l'identité $f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E = 0$. Établir $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id}_E)$, $\mathrm{Im}(f + 2\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$, $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id}_E)$.

3 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^3 = f^2 + f$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$. Généraliser cet exemple

Exercice 37

Soit u un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E. Montrer que $\varphi \ : v \mapsto uv - vu$ est un endomorphisme nilpotent de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 38

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E = 0$. On a vu $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id}_E)$. Montrer que le projecteur p sur $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id}_E)$ appartient à $\mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, f)$. On pose $q = \mathrm{Id}_E - p$. Expliquer en quoi p et q permettent de calculer les puissances de f.

Exercice 39

1 Soit $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$ deux morphismes entre espaces vectoriels de dimensions finies. Montrer :

$$|\,\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leqslant \mathrm{rg}(u + v) \leqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v).$$

2 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, et u, v deux éléments de $\mathcal{L}(E)$. Montrer :

$$\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) - n \leqslant \mathrm{rg}(u \circ v) \leqslant \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v))$$

Exercice 40

1 Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang 1 si et seulement si il existe deux vecteurs colonne $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nuls tels que $A = X^tY$.

2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1. Montrer que $A^2 = \mathrm{tr}(A)A$.

Exercice 41

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, E)$ telles que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$. Montrer que $\mathrm{Im}(g)$ et $\ker(f)$ sont supplémentaires dans E, puis que $f, g, g \circ f, f \circ g$ ont le même rang.

Exercice 42

1 Trouver les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2 Trouver les matrices $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commutant avec toute matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 43

On considère un entier $n \geqslant 1$ et $n+1$ scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$. Calculer :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \ldots & \alpha_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

Exercice 44

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ $(p, q \geqslant 1)$.
1 Calculer

$$\begin{vmatrix} A & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & B \end{vmatrix}.$$

2 Étendre ce résultat à $\begin{vmatrix} A & C \\ 0_{q,p} & B \end{vmatrix}$, où $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Exercice 45

Soit a, b, c trois réels, et Δ_n le déterminant de taille n $(n \geqslant 2)$ suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & & 0 \\ c & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ 0 & & c & a \end{vmatrix}$$

On pose $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = a$.
1 Montrer que pour tout entier naturel n :

$$\Delta_{n+2} = a\Delta_{n+1} - bc\Delta_n.$$

2 En déduire une méthode de calcul de Δ_n pour tout entier naturel n.
3 Donner une formule explicite pour Δ_n dans le cas où $a^2 = 4bc$.

Exercice 46

(Centrale PC 09) Soit a, b, c trois réels, $b \neq c$. Calculer :

$$\begin{vmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ c & a & \ddots & \mathbf{b} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \mathbf{c} & \ddots & \ddots & b \\ c & \dots & \dots & c & a \end{vmatrix}.$$

2. Hyperplans, dualité

Exercice 47

Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($n \geqslant 2$).

1 Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $H = \{M, \mathrm{tr}(AM) = 0\}$.

2 En déduire que H contient une matrice inversible.

Exercice 48

Soit E un espace vectoriel. On note E^* son dual.

1 Montrer que si f et g sont deux formes linéaires sur E de même noyau, alors f et g sont colinéaires.

2 On suppose ici que $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\begin{array}{rccc} \Phi_n & : & E & \to & \mathbb{R} \\ & & f & \mapsto & f^{(n)}(0) \end{array}.$$

Montrer que $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.

3 Ici, E est de dimension 3, et u est un endomorphisme de E tel que $u^2 = 0$. Montrer l'existence de $(a, f) \in E \times E^*$ tel que, pour tout $x \in E$:

$$u(x) = f(x)a.$$

Exercice 49

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ des formes linéaires sur E ($k \in \mathbb{N}^*$). Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

(1) $(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ est libre dans $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

(2) Pour tous scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, il existe un vecteur x de E tel que, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on ait : $\varphi_i(x) = \lambda_i$.

Exercice 50

E est supposé de dimension finie non nulle n.

1 Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccl} \nabla : & E & \to & E^{**} \\ & x & \mapsto & (f \mapsto f(x)) \end{array}$$

est un isomorphisme de E sur son *bidual* E^{**}. On l'appelle *isomorphisme canonique* entre E et son bidual.

2 Soit L une base de E^*. Montrer qu'il existe une unique base B de E telle que $L = B^*$: c'est la *base antéduale* de L.

3 Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (f_0, \ldots, f_n)$ est une base de E^* et donner la base anteduale lorsque :

a $f_i(P) = P(x_i)$ où $x_0, \ldots, x_n$ sont des scalaires distincts.

b $f_i(P) = P^{(i)}(a)$, où $a \in \mathbb{K}$.

4 Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension p, l'ensemble des formes linéaires s'annulant sur F est un sous-espace vectoriel de E^* de dimension $n - p$.

5 Soit $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_q)$ une famille libre de formes linéaires sur E. Soit F l'intersection des noyaux respectifs H_i des formes linéaires φ_i.

a Montrer que toute forme linéaire ψ s'annulant sur F est combinaison linéaire de $\varphi_1, \ldots, \varphi_q$.

Indication : on pourra introduire l'application

$$\begin{array}{rccl} \Delta : & E & \to & \mathbb{K}^{q+1} \\ & x & \mapsto & (\psi, \varphi_1, \ldots, \varphi_q) \end{array}$$

et considérer une équation d'un l'hyperplan contenant son image.

b Montrer que F est de dimension $n - q$.

CHAPITRE 6

TD 2 : algèbre linéaire (corrigés)

Aller aux énoncés 5

1. Révisions d'algèbre linéaire

Corrigé 34 (Liberté de familles)

1 Utiliser la propriété « être orthogonal à u_i ».

2 Utiliser les formules de trigonométries. Les sous-familles libres (non vides) sont celles réduites à un vecteur, et les couples (f_a, f_b) tels que $b - a \notin \pi\mathbb{Z}$.

3 Utiliser la propriété « être nul en a_i. »

4 Utiliser la propriété « être dérivable en a ».b

5 Échelonner les g_a par leur comportement asymptotique, en $+\infty$ par exemple.

6 Utiliser l'appartenance (ou pas) aux sous-espaces de la forme $\ker(f^i)$.

7 Parmi les nombreuses possibilités, on peut échelonner les h_n par leur comportement asymptotique, en $+\infty$ par exemple.

8 Échelonner par l'équivalent $u_n^m \sim \frac{1}{n^m}$ en $+\infty$.

9 Pour hiérarchiser les f_n, on peut considérer le comportement de leurs dérivées en 0 : si $n \neq 0$, $f_n'(x) \sim_{x\to 0} nx^{2n-1}$. Il ne reste qu'à préciser que f_0 n'est pas la fonction nulle pour conclure.

10 Le premier vecteur est la somme du deuxième et du dernier ...

11 Encore une fois, le comportement asymptotique en $+\infty$ permet de conclure.

Corrigé 35 (Propagation des propriétés par linéarité)

1 Facile.

2 Appliquer la première question à $f - g$.

3 Fixer une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E. Soit λ tel que $f(e_1) = \lambda\, e_1$. Vérifier que $f(e_i) = \lambda\, e_i$ pour tout $i \in [\![2, n]\!]$ en considérant $f(e_1 + e_i)$, puis conclure à l'aide de la question précédente.

Corrigé 36 (Polynôme annulateur)

1 Expliciter g, polynôme en f, tel que $fg = gf = \mathrm{Id}_E$.

2 $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(g)$ signifie $g \circ f = 0$. Pour la supplémentarité, il suffit de vérifier que la somme est directe, et que

$$E = \mathrm{Im}(f + 2\mathrm{Id}_E) + \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$$

Corrigé 37 (La nilpotence passe au crochet de Lie)

La somme de deux endomorphismes nilpotents qui commutent est nilpotente. Reste à appliquer ceci aux bons endomorphismes.

Corrigé 38 (Projecteurs et puissances d'un endomorphisme)

Partir de $f = p - 2q$, et du fait que $pq = qp = 0$.

Corrigé 39 (Inégalités et rang)

1 L'inégalité de gauche se déduit de celle de droite, un peu comme la seconde inégalité triangulaire se déduit de la première.

L'inégalité de droite se déduit de $\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}(u)+\mathrm{Im}(v)$ et de la formule de Grassmann.

2 L'inégalité de droite a été vue en cours.

Celle de gauche, difficile, peut s'obtenir en appliquant la fomrule du rang à la restriction de u (au départ) à $\mathrm{Im}(v)$ (idée à retenir).

Corrigé 40 (Matrices de rang 1)

1 X doit être un vecteur directeur de la droite engendrée par les colonnes de A, par exemple toute colonne non nulle de A convient. Choisir alors Y à partir du choix de X.

2 On peut utiliser la question précédente, en observant que ${}^tYX$ est une matrice de taille 1, c'est-à-dire un scalaire.

Corrigé 41 (Égalité de rangs)

Pour la supplémentarité, on peut revenir à la définition et utiliser les hypothèses.

Pour l'égalité des rangs de f et g, on peut utiliser le théorème du rang.

En fait, on peut facilement l'égalité de tous ces rangs grâce à la remarque **??** page **??**.

Corrigé 42 (Matrices commutant avec un ensemble de matrices)

1 On doit trouver les matrices scalaires. On peut utiliser une approche matricielle, en prenant par exemples des matrices élémentaires, mais on peut aussi raisonner plus géométriquement (*i.e.* en termes d'espaces vectoriels et d'applications linéaires), afin de se ramener à la dernière question de l'exercice 1 ci-dessus.

2 C'est plus technique : on peut d'abord montrer que si A commute avec toutes les matrices diagonales, alors elle est diagonale.

Corrigé 43 (Déterminant de Vandermonde)

Une façon efficace de procéder est de voir ce déterminant comme un polynôme en α_{n+1}, et d'utiliser les propriétés des polynômes pour deviner une formule, que l'on démontre ensuite par récurrence.

On trouve

$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1} (\alpha_j - \alpha_i)$$

Corrigé 44 (Déterminant par blocs)

On trouve dans les deux cas $\det(A)\det(B)$. Pour montrer le résultat efficacement, on pourra utiliser le produit matriciel par blocs, en faisant notamment apparaître des blocs I_p et I_q.

Corrigé 45 (Un déterminant tridiagonal)

1 Simple développement selon une ligne ou une colonne.

2 Rappeler le cours sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

3 C'est le cas le moins évident (celui où l'équation caractéristique admet une unique solution).

Corrigé 46 (Calcul astucieux de déterminant)

Astuce : ajouter l'indéterminée X à chaque coefficient, puis étudier ce polynôme (trouver son expression par interpolation de Lagrange).

2. Hyperplans, dualité

Corrigé 47 (Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$)

1 On peut utiliser la notion d'équation d'un hyperplan, mais aussi montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K})' \\ & A & \mapsto & (M \mapsto \mathrm{tr}(AM)) \end{array}$$

est un isomorphisme entre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et son dual.

Corrigé 48 (Sur le dual)

1 Le cas où l'une des formes est nulle est évident, on l'écarte.

Si $H = \ker(f) = \ker(g)$, considérer $x \in E \setminus H$, de sorte que $\mathbb{K}\, x \oplus H = E$. Trouver λ tel que $f(x) = \lambda g(x)$, puis vérifier que $f = \lambda g$.

2 On pourra échelonner la famille de Φ_n en considérant leurs évaluations en certains éléments de E.

3 Expliquer pourquoi $\mathrm{rg}(u) \leqslant 1$, puis s'inspirer de la première question.

Corrigé 49 (Liberté d'une famille de formes linéaires)

Corrigé 50 (Base antéduale et bidual)

CHAPITRE 7

Oraux 2 : algèbre linéaire (énoncés)

Aller aux corrigés 8

Exercice 51

Soit $f_1 : (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mapsto 2x_1 - x_2 + x_3$, $f_2 : (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x_2 - x_3$, $f_3 : (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mapsto -x_1 + 4x_2 + 2x_3$. Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ et déterminer la base antéduale.

Exercice 52

Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & -b & c \\ b & a-2c & -b \\ c & b & a+b \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ; préciser sa dimension. L'ensemble E est-il un sous-anneau de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Exercice 53

Soient $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ et $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ tels que $u \circ v$ soit un projecteur de rang 2 de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\operatorname{Im}(u \circ v) = \operatorname{Im} u$ puis que $v \circ u = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

Exercice 54

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$. Exprimer le rang de B en fonction de celui de A.

Exercice 55

1 (TPE) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Trouver un polynôme annulateur de A de degré 2. En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2 (Centrale) Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer M^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 56

Soient $n \geqslant 2$ et $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M + {}^tM = 2\operatorname{tr}(M) I_n\}$. Montrer que E est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer sa dimension.

Exercice 57

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $\ker u = \ker u^2$;

(2) $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$;

(3) $E = \ker u \oplus \operatorname{Im} u$.

Que subsiste-t-il en dimension infinie ?

Exercice 58

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!], |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$$

(on dit que A est à *diagonale dominante*).
Montrer que A est inversible.

Exercice 59

1 (CCP MP) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{rg} A = 1$ et $\operatorname{tr} A = 1$. Montrer que $A^2 = A$.

2 (ENSAM) Soient $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in K^{2n}$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $a_{i,j} = x_i y_j$. à quelle condition la matrice A est-elle diagonalisable ? Exprimer le déterminant de $I_n + A$ en fonction de la trace de A.

3 (X MP) Soient A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1, λ dans $\mathbb{R}$. La matrice $B \overset{def}{=} I_n + \lambda A$ est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

4 (Mines MP) Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1. Montrer que f est nilpotent ou diagonalisable (*i.e.* il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale).

Exercice 60

Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose $I_n - AB$ inversible. Montrer que $I_n - BA$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 61

1 *(Mines MP 09)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique $(c_1, \dots, c_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que, pour tout P de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$:

$$\int_{-1}^{1} P(t)\mathrm{d}t = 2P(0) + \sum_{k=1}^{n} c_k(P(k) + P(-k) - 2P(0)).$$

2 *(Centrale MP 07)* Soit $A = \{P \in \mathbb{R}_n[X], \sum_{k=1}^{n} P^{(k)}(1) = 0\}$. Quelle est la dimension de A ? Donner une base de A.

3 *(X MP 09)* Déterminer les $a \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ tels qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_4[X], \quad P'(a) = \alpha P(-2) + \beta P'(-2) + \gamma P(-1) + \delta P(1/2).$$

Exercice 62

(CCP) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^2 = I_n$. Montrer que $(\mathrm{com}(A))^2 = I_n$.

Exercice 63

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1 Soit p un projecteur de E. Prouver que $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

2 On rappelle que $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$ pour $n \in \{2, 3, 6\}$. Soient p, q et r trois projecteurs de E. À quelle condition $p + \frac{1}{\sqrt{2}}q + \frac{1}{\sqrt{3}}r$ est-il un projecteur ?

Exercice 64

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On suppose que $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$. Montrer que $P \in \mathbb{Q}[X]$.

Exercice 65

Soient E un espace vectoriel de dimension n, $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces de E tels que : $\dim F_1 + \dim F_2 + \cdots + \dim F_p > n(p-1)$. Montrer : $F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_p \neq \{0\}$.

Exercice 66

1 *(X MP 09)* Soit n un entier pair, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique, J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Montrer que, pour tout réel t, $\det(A + tJ) = \det(A)$.

2 *(X PC 09, Petites Mines 12)* Déterminer les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que : $\forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \det(A + M) = \det(A) + \det(M)$.

Exercice 67

Soit A et H dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\operatorname{rg}(H) = 1$. Montrer : $\det(A+H)\det(A-H) \leqslant \det A^2$.

Exercice 68

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose $\ker(f)$ de dimension finie. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ker(f^n)$ est de dimension finie.

Exercice 69

On note G l'ensemble des endomorphismes u de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tels que $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2, \operatorname{tr}(u(A)\,u(B)) = \operatorname{tr}(AB)$.

1 Montrer que tout élément de G est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2 Montrer que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$.

3 Expliciter les éléments u de G vérifiant $u(I_2) = I_2$.

CHAPITRE 8

Oraux 2 : algèbre linéaire (corrigés)

Aller aux énoncés 7

Corrigé 51 (Détermination d'une base antéduale (CCP 12))

Corrigé 52 (Étude algébrique d'une partie de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (CCP))

E s'exprime directement comme sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par une partie de cardinal 3.

Corrigé 53 (Applications linéaires dont la composée est un projecteur de rang 2 (CCP))

Puisque $\mathrm{Im}(u \circ v) \subset \mathrm{Im}\, u$, il suffit de montrer que ces sous-espaces vectoriels ont même dimension, *i.e.* que $\mathrm{rg}(u \circ v) = \mathrm{rg}(u)$. Pour ce faire, on peut utiliser la remarque **??** page **??**.

Corrigé 54 (Rang d'une matrice par blocs (Centrale))

On trouve bien sûr $\mathrm{rg}(B) = 2\,\mathrm{rg}(A)$. À vrai dire, je me demande quel est le degré de détail attendu dans la rédaction.

Corrigé 55 (Puissances d'une matrice)

1 On trouve que $A^2 = 2A$, et donc que le polynôme $X^2 - 2X$ est annulateur de A.

2 On calcule le reste R_n de la division euclidienne de X^n par X^2-2X (grâce à des évaluations en 0 et 2), puis on observe que $A^n = R_n(A)$.

Corrigé 56 (Dimension d'un sous-espace matriciel (CCP 12))

L'application $\varphi\ : M \mapsto M + {}^tM - 2\,\mathrm{tr}(M)I_n$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (essentiellement parce que la transposition et la trace sont linéaires), donc E, qui en est le noyau, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

En considérant la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on constate que l'image de φ est l'ensemble des matrices symétriques de diagonale nulle. Le théorème du rang permet alors de trouver la dimension de E (à savoir $\frac{n(n+1)}{2}$).

Corrigé 57 (Caractérisation de la supplémentarité du noyau et de l'image (INT 08))

Avant d'établir ces équivalences, intéressons-nous aux informations pertinentes de ces propriétés (la question ouverte en fin d'exercice nous y incite).

Comme l'inclusion $\ker(u) \subset \ker(u^2)$ est toujours vérifiée, la première propriété se reformule en $\ker(u^2) \subset \ker(u)$.

Comme l'inclusion $\mathrm{Im}(u^2) \subset \mathrm{Im}(u)$ est toujours vérifiée, la deuxième propriété se reformule en $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Im}(u^2)$.

La troisième propriété signifie que $\ker(u) + \mathrm{Im}(u) = E$ *et* $\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$. Or $\dim\ker(u) + \dim\mathrm{Im}(u) = \dim(E)$ d'après le théorème du rang (valable en dimension finie) : La troisième propriété est donc équivalente à $\ker(u) + \mathrm{Im}(u) = E$ *ou* $\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$.

Supposons la première propriété vérifiée, soit encore $\ker(u^2) \subset \ker(u)$. Soit $x \in E$. Si $u^2(x) = 0$, alors $u(x) = 0$. En posant $y = u(x)$, on obtient que si $y \in \ker(u)$, alors $y = 0$. Or y décrit précisément $\mathrm{Im}(u)$ lorsque x décrit E, donc $\mathrm{Im}(u) \cap \ker(u) = \{0\}$, puis **3**.

Réciproquement, supposons **3** : on a $\mathrm{Im}(u) \cap \ker(u) = \{0\}$, donc si $x \in \ker(u^2)$, alors $u(x) \in \ker(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$. On en déduit bien **1**.

Supposons la deuxième propriété vérifiée, soit en core $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Im}(u^2)$. Soit $x \in E$. Comme $u(x) \in \mathrm{Im}(u)$, il existe $y \in E$ tel que $u(x) = u^2(y)$, *i.e.* $x - u(y) \in \ker(u)$.

Ainsi, $x = x-u(y)+u(y) \in \ker(u)+\mathrm{Im}(u) : E \subset \ker(u)+\mathrm{Im}(u) = E$ puis $E = \ker(u)+\mathrm{Im}(u)$ (l'inclusion réciproque étant évidente). On en déduit **3**.

Réciproquement, supposons **3** : On a $E = \ker(u) + \mathrm{Im}(u)$. Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$: il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Il existe $x_1 \in \ker(u)$ et $x_2 \in \mathrm{Im}(u)$ tels que $x = x_1 + x_2$, et on a alors

$$y = u(x) = u(x_1) + u(x_2) = u(x_2) \in \mathrm{Im}(u^2) car x_2 \in \mathrm{Im}(u)$$

Ainsi, $y \in \mathrm{Im}(u^2) : \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Im}(u^2)$, d'où **2**.

Cela montre bien, en dimension finie, l'équivalence entre ces trois propriétés. En dimension infinie, il manque le théorème du rang pour effectuer le lien entre $\ker(u) + \mathrm{Im}(u) = E$ et $\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$.

Cependant, **1** équivaut à $\ker(u)\cap\mathrm{Im}(u) = \{0\}$, tandis que **2** équivaut à $\ker(u)+\mathrm{Im}(u) = E$.

L'équivalence est bien perdue dans certains cas, comme le montre l'exemple de la dérivation dans $\mathbb{K}[X]$.

Corrigé 58 (Matrice à diagonale dominante (X MP 09, X PSI 09))

Nous allons montrer que A est inversible en montrant que ses colonnes sont linéairement indépendantes.

Par hypothèse, le coefficient de chaque ligne est, en module, strictement supérieur à la somme des modules des autres coefficients de la ligne.

Par conséquent, la somme des colonnes $C_1, \ldots, C_n$ de A n'est pas la colonne nulle (et ses coefficients sont même tous non nuls). Plus généralement, si les λ_i sont des nombres complexes de même module non nul, alors $\sum_{j=1}^n \lambda_j C_j$ est à coefficients tous non nuls.

Considérons maintenant des scalaires non tous nuls $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, et supposons que $\sum_{j=1}^n \lambda_j C_j = 0$. L'idée consiste à adapter la remarque ci-dessus, en se concentrant sur la ligne dont l'indice correspond au plus grand module pour les scalaires : soit $i \in [\![1, n]\!]$ tel que, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$

$$|\lambda_j| \leqslant |\lambda_i|$$

On a donc

$$-\lambda_i C_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \lambda_j C_j$$

et donc, en position i

$$-\lambda_i a_{i,i} = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \lambda_j a_{i,j}$$

puis, par inégalité triangulaire

$$|\lambda_i||a_{i,i}| \leqslant \sum_{j\neq i} |\lambda_j||a_{i,j}| \leqslant |\lambda_i| \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$$

et enfin l'absurdité

$$|a_{i,i}| \leqslant \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$$

puisque $|\lambda_i| > 0$.

A est donc bien inversible.

Remarque : une autre démonstration consiste à se ramener au cas où les $a_{i,i}$ valent 1, puis à utiliser le fait que, dans une $\mathbb{K}$-algèbre normée de dimension finie, si $\|u\| < 1$, alors $1 - u$ est inversible.

Corrigé 59 (Matrices de rang 1)

On rappelle que lorsque A est (carrée) de rang 1, $A^2 = \operatorname{tr}(A)A$ (voir l'exercice 1).

1 Immédiat.

2 Si $\operatorname{tr}(A) = 0$, alors $A^2 = 0$, donc A est nilpotente : elle est diagonalisable si et seulement si elle est nulle.

Si $\operatorname{tr}(A) \neq 0$, $X^2 - \operatorname{tr}(A)X$ est simplement scindé.

Pour le calcul de déterminant, comme les colonnes sont de « légères pertubations » de la colonne des y_j, on peut exploiter le caractère multilinéaire alterné du déterminant.

3 Le cas $n = 1$ est évident. On suppose $n \geqslant 2$. Les valeurs propres de A sont 0 et $\operatorname{tr}(A)$, ce qui permet de tester l'inversibilité de B.

Comme $A^2 = \operatorname{tr}(A)A$, on trouve facilement un polynôme annulateur de B, puis son inverse.

Corrigé 60 (Inverse d'une matrice (X MP 09))

Pour avoir une idée de l'inverse, on peut se placer dans le cas où $\|A\| < 1$ et $\|B\| < 1$ pour une norme d'algèbre, puis exprimer $(I_n - BA)^{-1}$ en fonction de A, de B, et de l'inverse de $I_n - AB$. Il ne reste plus qu'à montrer que l'inverse trouvé convient même sans supposer $\|A\| < 1$ et $\|B\| < 1$.

Corrigé 61 (Formes linéaires sur des espaces de polynômes)

1 Il s'agit d'un problème de dualité, et il semble naturel ici de travailler dans la base $(\varphi_k : P \mapsto P(k))_{k \in [\![-n,n]\!]}$ du dual de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$.

Reste ensuite à établir les propriétés des coordonnées de $P \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)\mathrm{d}t$ dans cette base.

2 On voit A comme le noyau d'une forme linéaire non nulle, et donc comme un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$. Comme l'évaluation en 1 joue un rôle prépondérant, on peut travailler dans la base $((X-1)^k)_{k \in [\![0,n]\!]}$.

3 Il faut que a soit racine de Q', où $Q = (X+2)^2(X+1)(X-1/2)$. La réciproque est difficile, éclairée par la question 5.a de l'exercice 2 mais on peut s'en sortir « à la main ».

Corrigé 62 (Si A est une involution, sa comatrice aussi)

Il suffit d'utiliser la relation $A\,{}^t\operatorname{com}(A) = \det(A)I_n$.

On peut aussi utiliser le fait, surprenant et assez peu connu, que $\operatorname{com}(A)\operatorname{com}(B) = \operatorname{com}(AB)$ pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (ici, il suffit de le vérifier pour des matrices inversibles, mais un argument de densité et de continuité permet d'étendre la formule à tout $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).

Corrigé 63 (Combinaison de projecteurs avec des coefficients irrationnels donnés (CCP))

1 Grand classique à savoir faire (en travaillant dans une base de E adaptée à p).

2 Cela devient un exercice d'arithmétique. On prend la trace. La $\mathbb{Q}$-liberté de $(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, impose alors $q = r = 0$.

Corrigé 64 (Polynôme complexe laissant stable l'ensemble des rationnels *(Mines PSI 08)*)

Spoiler : interpolation de Lagrange.

Corrigé 65 (Sous-espaces d'intersection non triviale (CCP))

Comme souvent, il y a une application pour ça.
Introduire l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & F_1 \times \cdots \times F_p & \to & E^{p-1} \\ & (x_1, \ldots, x_p) & \mapsto & (x_2 - x_1, \ldots, x_p - x_1) \end{array}$$

Cette application n'est pas injective par un argument dimensionnel, son noyau n'est donc pas trivial.

Corrigé 66 (Perturbation matricielle sans effet sur le déterminant)

1 Vérifier que la fonction polynomiale $t \mapsto \det(A + tJ)$ est paire et de degré au plus 1.

2 On suppose bien sûr $n \geqslant 2$. On peut s'intéresser à la stabilité de la propriété : si A la vérifie, alors toute matrice qui lui est équivalente la vérifie aussi. En prenant un bon représentant de la classe d'équivalence de A, on constate que seul le choix $A = 0$ convient.

Corrigé 67 (Une inégalité avec du déterminant *X 07, Mines MP 08*)

H étant de rang 1, elle est équivalente à $J_r(1)$. Soit $U, V \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $H = UJ_1(n)V$.
Soit $B = U^{-1}AV^{-1} = (b_{i,j})$, de sorte que $A = UBV$.
On a $\det(A + H)\det(A - H) = \det(U)^2 \det(V)^2 \det(B - J_1(n)) \det(B + J_1(n))$.
En utilisant la linéarité du déterminant par rapport à la première colonne, on observe que

$$\det(B + J_1(n)) = \det(B) + \begin{vmatrix} 1 & b_{1,2} & \ldots & b_{1,n} \\ 0 & b_{2,2} & \ldots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{n,2} & \ldots & b_{n,n} \end{vmatrix},$$

soit encore $\det(B + J_1(n)) = \det(B) + \Delta$, où Δ est le mineur du coefficient en position $(1, 1)$ de B. De même, $\det(B - J_1(n)) = \det(B) - \Delta$, puis

$$\det(A+H)\det(A-H) = \det(U)^2 \det(V)^2 (\det(B)^2 - \Delta^2) = \det(U)^2 \det(V)^2 \det(B)^2 = \det(A)^2.$$

Corrigé 68 (Noyaux des itérés de dimension finie (X MP 10))

C'est vraiment difficile : on se ramène au cas où $n = 2$. Il s'agit alors de montrer que $f^{-1}(\ker(f))$ est de dimension finie.

En fait, plus généralement, si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, alors $f^{-1}(F)$ est de dimension finie. En effet, $F \cap \mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie, et si $(y_1, \ldots, y_p) = (f(x_1), \ldots, f(x_p))$ en est une base, on montre que

$$f^{-1}(F) = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_p) + \ker(f)$$

.

Corrigé 69 (Endomorphismes conservant la trace d'un produit (ENS MP))

1 Si $u \in G$, et si $A \in \ker(u)$ alors $\mathrm{tr}(AB) = 0$ pour tout $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc $A = 0$ (par le produit scalaire canonique, éventuellement en prenant $B = A^T$, ou en considérant les matrices élémentaires. Par conséquent, u est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension finie, c'est donc un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2 G est une partie de $\mathrm{GL}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ d'après la question précédente. On montre aisément qu'il est stable par composition et par passage à la réciproque. Comme il possède $\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$, c'est bien un sous-groupe de $\mathrm{GL}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$.

3 Question de recherche.

CHAPITRE 9

TD 3 : fonctions numériques (énoncés)

Aller aux corrigés 10

1. Révisions et compléments sur les fonctions numériques

Exercice 70

Caractériser les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodiques admettant une limite en $+\infty$.

Exercice 71

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Montrer que $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ sont continues.

Exercice 72

1 Montrer que si $f : [0, 1] \to [0, 1]$ est continue, alors f admet un point fixe.
2 Montrer que si $f : [0, 1] \to [0, 1]$ est croissante, alors f admet un point fixe.
3 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue décroissante. Montrer que f admet un unique point fixe.
4 Soit I un segment et f une application continue telle que $f(I) \subset I$. Montrer que f admet au moins un point fixe.
5 Même question, en supposant cette fois $I \subset f(I)$.

Exercice 73

1 Trouver toutes les fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues telles que :
$$\forall\, x \in [0,1], \quad f(x^2) = f(x).$$

2 Déterminer les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant
$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

3 Déterminer les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant
$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

4 Trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ admettant pour périodes 1 et $\sqrt{2}$.

5 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante et involutive ($i.e.$ $\forall\, x \in \mathbb{R}, f \circ f(x) = x$). Montrer que f est l'application identique sur $\mathbb{R}$.

6 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(ax+b) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, où a est fixé différent de 1 et -1, et $b \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

7 Déterminer les applications $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telles que $\lim\limits_{0} f = +\infty$, $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ et : $\forall\, x, y > 0, \quad f(xf(y)) = yf(x)$.

Indication : étudier les points fixes de f.

Exercice 74

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable périodique. Montrer que f' est périodique, de même groupe des périodes que f.

Exercice 75

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, périodique, continue et non constante.

1 Montrer que f admet une plus petite période T (strictement positive).

2 Montrer que ce résultat tombe en défaut si on ne suppose plus f continue.

3 Montrer que f est bornée, et qu'il existe $u \in \mathbb{R}$ tel que $f(\mathbb{R}) = f([u, u+T/2])$.

Exercice 76

1 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application uniformément continue. Montrer que si (x_n) et (y_n) sont des suites d'éléments de I telles que $\lim\limits_{n}(y_n - x_n) = 0$, alors $\lim\limits_{n}(f(y_n) - f(x_n)) = 0$.

2 Réciproquement, cette propriété séquentielle entraîne-t-elle l'uniforme continuité de f ?

3 Montrer que $t \mapsto \sin(t^2)$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 77

1 Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ continue, $b \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que f admet une limite finie en b. Montrer que f est uniformément continue sur $[a, b[$.

2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue admettant des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 78

1 Dériver, en tout point où cela est possible, $x \mapsto \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{x}}}$.

2 La fonction $x \mapsto \cos \sqrt{x}$ est-elle dérivable en 0 ?

3 Montrer que

$$\begin{array}{cccc} g : & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \sin \frac{1}{x} \end{array}$$

est prolongeable par continuité en 0, et que ce prolongement $\tilde{g}$ est dérivable en 0, mais non de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 79

1 Soit f continue sur $[a, +\infty[$ (pour un certain $a \in \mathbb{R}$), et dérivable sur $]a, +\infty[$. On suppose que $f(a) = \lim_{x \to +\infty} f(x)$. Montrer qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

2 Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$, admettant une même limite finie en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f' s'annule.

3 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable, telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que pour tout $d \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$, il existe une tangente au graphe Γ de f passant par le point $(d, 0)$.

Exercice 80

n désigne un entier naturel non nul.

1 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que si f s'annule en $n+1$ points distincts, alors f' s'annule en n points distincts sur $[a,b]$

2 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable. Montrer que si f s'annule en $n+1$ points distincts, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

3 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable. Si $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = f(b) = 0$, montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$

4 Montrer que si un polynôme réel P possède (au moins) n racines réelles distinctes ($n \geqslant 2$), alors son polynôme dérivé P' possède (au moins) $n-1$ racines réelles distinctes.

5 Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, tous réels a et b, le polynôme $X^n + aX + b$ admet au plus trois racines réelles distinctes.

6 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$, T-périodique ($T > 0$), s'annulant au moins n fois sur $[0,T[$. Montrer que f' s'annule au moins n fois sur $[0,T[$.

7 Que dire d'une fonction polynomiale coïncidant avec la fonction sinus en une infinité de points ?

Exercice 81

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Montrer que $f'(I)$ est un intervalle.

Exercice 82

Montrer que la fonction

$$\begin{array}{rccl} f : &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{\ln(1+x)}{x} \end{array}$$

est prolongeable par continuité en 0. Soit F ce prolongement. Montrer que F est dérivable en 0.

Exercice 83

Soit $f : x \mapsto \frac{x^3}{1+x^6}$. Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 84

1 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x$.

2 En déduire que

$$\lim_{n \to \infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) = \sqrt{e}.$$

2. Convexité

Exercice 85

Que dire d'une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et périodique ?

Exercice 86

1 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ convexe et bornée. Montrer que f est décroissante.
2 Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et bornée. Montrer que g est constante.

Exercice 87

1 On se donne $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs.
– La *moyenne arithmétique* de ces réels est $a = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$
– La *moyenne géométrique* de ces réels est $g = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}$
– La *moyenne harmonique* de ces réels est $h = n\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right)^{-1}$
Montrer que $h \leqslant g \leqslant a$.
Indication : on pourra utiliser la concavité du logarithme pour prouver $g \leqslant a$, et utiliser ce résultat pour prouver $h \leqslant g$.
2 Soit $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs ($n \geqslant 2$). Montrer que : $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n}{x_1} \geqslant n$.
3 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

Exercice 88

Soit f, g convexes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f + g$ soit affine. Montrer que f et g sont affines.

Exercice 89

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, $g\ : x \mapsto xf(1/x)$. Montrer que f est convexe si et seulement si g est convexe.

Exercice 90

Soit f convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
1 Montrer que $g\ : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ admet une limite, finie ou égale à $+\infty$, en $+\infty$.
2 Montrer que si cette limite α est réelle, alors $h\ : x \mapsto f(x) - \alpha x$ admet une limite, finie ou égale à $-\infty$, en $+\infty$.

CHAPITRE 10

TD 3 : fonctions numériques (corrigés)

Aller aux énoncés 9

1. Révisions et compléments sur les fonctions numériques

Corrigé 70 (Fonctions périodiques et limite en l'infini)

Soit f une telle fonction, l sa limite en $+\infty$, et $T > 0$ une de ses période.

Soit $x, y \in \mathbb{R}$: les suites $(x + nT)$ et $(y + nT)$ tendent vers $+\infty$, donc les suites images par f tendent vers l. Par ailleurs, ces suites $(f(x + nT))$ et $(f(y + nT))$ sont constantes de valeurs respectives $f(x)$ et $f(y)$. par unicité de la limite, $f(x) = l = f(y)$: f est constante.

Réciproquement, les fonctions constantes vérifient clairement ces propriétés.

Corrigé 71 (Continuité du max et du min)

Remarquer que $\sup(f, g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2}$ et $\inf(f, g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}$

Corrigé 72 (Points fixes)

1 TVI à $g\ : x \in [0, 1] \mapsto f(x) - x$.

2 La fonction $g\ : x \mapsto x - f(x)$ est strictement croissante, tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers $-\infty$ en $-\infty$.

3 Considérer $\sup\{x \in [0, 1], f(x) \geqslant x\}$.

4 Généralisation de la première question.

5 Se placer en des points où f prend respectivement son maximum et son minimum.

Corrigé 73 (Équations fonctionnelles)

1 Soit f une telle fonction. Soit $x_0 \in [0, 1[$. On vérifie que la suite $(f(x_0^{2^n}))$ est d'une part constante de valeur $f(x_0)$, et tend d'autre part vers $f(0)$ par continuité de f en 0.

f est donc constante sur $[0, 1[$, puis sur $[0, 1]$ par continuité en 1.

Réciproquement, les fonctions constantes conviennent clairement.

2 Soit f une telle fonction. Posons $\alpha = f(1)$. On sait que pour tout rationnel x, $f(x) = \alpha x$. Les fonctions f et $x \mapsto \alpha x$ coïncident donc sur $\mathbb{Q}$, qui est dense dans $\mathbb{R}$. Étant en outre continues sur $\mathbb{R}$, elles sont égales, donc f est linéaire.

Réciproquement, les fonctions linéaires conviennent évidemment.

3 Déterminer les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad f\left(\frac{x + y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

4 Trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ admettant pour périodes 1 et $\sqrt{2}$.

5 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante et involutive (*i.e.* $\forall x \in \mathbb{R}, f \circ f(x) = x$). Montrer que f est l'application identique sur $\mathbb{R}$.

6 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(ax+b) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, où a est fixé différent de 1 et -1, et $b \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

7 Déterminer les applications $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telles que $\lim\limits_{0} f = +\infty$, $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ et : $\quad \forall x, y > 0, \quad f(xf(y)) = yf(x)$.
Indication : étudier les points fixes de f.

Corrigé 74 (Groupe des périodes de la dérivée)

Soit $T \in \mathbb{R}$.
Bien sûr, si f est T-périodique, alors sa dérivée l'est également.
Réciproquement, soit T une période de f'. La fonction $\varphi \ : x \mapsto f(x+T) - f(x)$ est de dérivée nulle, donc constante. Soit α sa valeur.
On vérifie par une récurrence immédiate que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(nT) - f(0) = n\alpha$$

Supposer $\alpha \neq 0$ montrerait que f n'est pas bornée, ce qui est absurde puisque f est T'-périodique et continue, donc son image – qui est aussi celle du segment $[0, T']$– est bornée.
Ainsi, $\alpha = 0$, et f est T-périodique.

Corrigé 75 (Fonction continue périodique)

1 Si le groupe des périodes G de f était dense, alors f serait constante sur une partie dense de $\mathbb{R}$, et donc constante puisqu'en outre continue. Ainsi, G est discret, et f admet une plus petite période strictement positive.

2 Prendre l'indicatrice de $\mathbb{Q}$.

3 f est bornée, car continue et périodique.
La fonction f est continue sur le segment $[0, T]$, donc elle est y est bornée, et atteint ses bornes, mettons supérieure en α et inférieure en β. Supposons par exemple $\alpha \leqslant \beta$. On a $0 \leqslant \beta - \alpha \leqslant T/2$ ou $0 \leqslant \alpha + T - \beta \leqslant T/2$, donc dans tous les cas, il existe u (α dans le premier cas, β dans le second) tel que $f(\mathbb{R}) = f([u, u+T/2])$.

Corrigé 76 (Caractérisation séquentielle de l'uniforme continuité)

1 Soit (x_n) et (y_n) deux suites d'éléments de I telles que $\lim\limits_{n}(y_n - x_n) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$, et soit η un module d'uniforme continuité pour f et ε. Il existe un rang à partir duquel $|y_n - x_n| \leqslant \eta$, et donc à partir duquel $|f(y_n) - f(x_n)| \leqslant \varepsilon$.
Ainsi, $\lim\limits_{n}(f(y_n) - f(x_n)) = 0$.

2 La réciproque est vraie : montrer la contraposée. Nier formellement l'uniforme continuité, et procéder comme dans le théorème de Heine.

3 Les suites données par $y_n = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ et $x_n = \sqrt{2n\pi}$ vérifient $\lim_n y_n - x_n = 0$, mais $(\sin(y_n^2) - \sin(x_n^2))$ est constante de valeur 1 : $t \mapsto \sin(t^2)$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Corrigé 77 (Uniforme continuité et limite finie en un point adhérent)

1 On peut utiliser la technique du rétrécissement, ou prendre un segment et un voisinage de b qui se chevauchent et dont la réunion vaut $[a, b[$.

Remarque : le cas b fini provient immédiatement du théorème de Heine.

2 Considérer des voisinages de $+\infty$ et $-\infty$, et les joindre grâce à un segment, ou utiliser la technique du rétrécissement.

Corrigé 78 (Dérivation, dérivabilité)

1 Notons f cette fonction, définie sur $\mathbb{R}_+$.

2 $\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{\sqrt{x}^2}{2} + o(\sqrt{x}^2) = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$, donc la fonction considérée est bien dérivable en 0.

3 $g(x) = o(x)$ (en 0), donc g est prolongeable en $\tilde{g}$ continue et dérivable en 0.
On vérifie que $\tilde{g}'$ n'a pas de limite en 0.

Corrigé 79 (Applications directes du théorème de Rolle)

1 On peut utiliser la technique du rétrécissement, ou montrer que f n'est pas injective (par l'absurde, si elle l'était alors elle serait strictement monotone, puisqu'elle est en outre continue).

2 Comme la question précédente.

3 Traduire algébriquement la conclusion, puis introduire la bonne fonction auxiliaire.

Corrigé 80 (Rolle itéré)

1 Rolle itéré appliqué à des segments d'intérieurs disjoints.

2 Récurrence sur n sans fixer la fonction f dans l'hypothèse de récurrence.

3 Récurrence sur n.

4 Cf. première question.

5 Cf. question précédente (on peut d'ailleurs être plus fin dans le cas où n est impair).

6 Considérer n points $x_1, \ldots, x_n$ de $[0, T[$ où f s'annule, où $x_1 < \cdots < x_n$, et introduire $x_{n+1} \overset{def}{=} x_1 + T$. Montrer que f' s'annule au moins n fois sur $[x_1, x_{n+1}[$, et conclure.

7 Si f est une telle fonction, et si $n \overset{def}{=} \deg(f) \geqslant 1$, alors ce lieu de coïncidence est borné, inclus dans un segment $[a, b]$. De plus, toutes les dérivées de f coïncident en une infinité de points de $[a, b]$ avec $\sin$, $-\sin$, $\cos$, ou $-\cos$.

En dérivant plus de n fois, la fonction sinus ou cosinus s'annule une infinité de fois sur $[a, b]$, ce qui est absurde.

Corrigé 81 (Théorème de Darboux)

Première méthode Traiter d'abord le cas où il existe a et b dans I, où $a < b$, tels que $f'(a)f'(b) > 0$, et montrer que f' s'annule (montrer que f présente un extremum sur $[a, b]$ en un point intérieur à $[a, b]$).

Deuxième méthode Montrer que l'ensemble τ des taux d'accroissement de f est un intervalle. Pour faire un lien entre cet ensemble et $f'(I)$, utiliser le TAF et la définition de la dérivée en un point.

Remarque : : Pour montrer que τ est un intervalle, on pourra utiliser la notion de connexité par arcs.

Corrigé 82 (Prolongement dérivable)

Un simple développement limité donne $f(x) = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$, donc f est prolongeable par continuité en 0 en une fonction dérivable en 0.

Corrigé 83 (Dérivées successives en 0)

Exploiter la formule de Taylor-Young à rebours.

Corrigé 84 (Un produit infini)

2. Convexité

Corrigé 85 (Fonction convexe périodique)

Une telle fonction est nécessairement constante, d'après le lemme des trois pentes par exemple.

Corrigé 86 (Fonction convexe bornée)

1 Raisonner par l'absurde et utiliser le lemme des trois pentes.
2 Idem.

Corrigé 87 (Comparaison des moyennes harmonique, géométrique, arithmétique)

Corrigé 88 (Fonctions convexes dont la somme est affine)

Corrigé 89 (Caractérisation de convexité par une autre fonction)

Corrigé 90 (Étude asymptotique générale d'une fonction convexe en $+\infty$)

CHAPITRE 11

Oraux 3 : algèbre linéaire (énoncés)

Aller aux corrigés 12

Exercice 91

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) \geqslant 0$. Démontrer que pour tout réel x, on a $(P + P' + P'' + \dots)(x) \geqslant 0$.

Exercice 92

1 *(Mines MP 09)* Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que P' est scindé sur $\mathbb{R}$.
2 *(X MP 09)* Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $Q + aQ'$ est scindé sur $\mathbb{R}$.
3 *(X MP 09)* Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$ des polynômes scindés sur $\mathbb{R}$. On pose $R = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^{(k)}$. Montrer que R est scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 93

1 *(Mines MP 07, X MP 09)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que les racines complexes du polynôme $\prod_{k=0}^{n}(X - k) + a$ sont de multiplicité au plus 2.
2 *(X MP 09)* Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que toute racine multiple de P' est racine de P.

Exercice 94

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Soit (x_n) et (y_n) deux suites réelles de limite a. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_n \neq y_n$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}.$$

1 On suppose : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n < a$ et $y_n > a$. Quelle est la limite de (u_n) ?
2 On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de a. Que dire de (u_n) ?
3 Que se passe-t-il dans le cas général ?

Exercice 95

Soit $f \in \mathcal{C}^2(I)$ convexe et injective. On pose $J = f(I)$.

1 Montrer que f est strictement monotone sur I.

2 Montrer que la réciproque de f est convexe ou concave. Donner deux exemples.

Exercice 96

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(0)$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f''(c) = 0$. Que dire si f est seulement supposée deux fois dérivable ?

CHAPITRE 12

Oraux 3 : algèbre linéaire (corrigés)

Aller aux énoncés 11

Corrigé 91 (D'un polynôme positif à un autre)

Corrigé 92 (Polynômes scindés)

Corrigé 93 (Multiplicité de racines)

Corrigé 94 (Centrale PSI 09)

Corrigé 95 (Convexité et bijection réciproque (Centrale PC 09))

Corrigé 96 (Condition suffisante de changement de concavité (X MP 09))

CHAPITRE 13

TD 4 : suites et séries numériques (énoncés)

Aller aux corrigés 14

1. Généralités sur les suites numériques

Exercice 97

Montrer que toute suite de nombres entiers relatifs convergente est stationnaire.
Pour les 5/2 : proposer une généralisation de ce résultat.

Exercice 98

Montrer qu'une suite monotone dont une suite extraite est convergente est elle-même convergente.

Exercice 99

1 Montrer que la suite de terme général $\frac{n+3\sin(n)}{2n+(-1)^n}$ converge.

2 Montrer que la suite de terme général $\frac{E(\ln(n))}{\ln(n^2+n)}$ converge.

Exercice 100

On définit la suite de Fibonacci, (u_n), par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et :

$$\forall n > 1, \quad u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

1 Trouver une fonction f telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = f(n)$.

2 En déduire un équivalent simple de (u_n), et la limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Exercice 101

Montrer que toute suite réelle non majorée admet une suite extraite divergeant vers $+\infty$.

Exercice 102

Soit (u_n) une suite de réels de limite nulle et telle que

$$u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}.$$

1 Montrer que si l'on suppose (u_n) décroissante, alors $u_n \sim \frac{1}{2n}$.
2 Montrer que ce résultat peut tomber en défaut si l'on ne suppose plus (u_n) décroissante.

Exercice 103

Trouver des équivalents simples des suites de termes généraux $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ et $\sum_{k=0}^{n} k!$.

Exercice 104

1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x + \ln(x) = n$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$ admet une unique solution, que nous noterons u_n.
2 Étudier la monotonie de (u_n). En déduire la limite de cette suite.
3 Montrer que $u_n \sim n$.
4 Montrer que $u_n - n \sim -\ln(n)$.

Exercice 105

1 Donner un développement asymptotique de la suite de terme général $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ à la précision $\frac{1}{n^3}$.
2 Donner un développement asymptotique à deux termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ donnée par $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} = \ln(n + u_n)$.
3 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^n + x - 1 = 0$ d'inconnue $x \in [0, 1]$ admet une unique solution v_n. Donner un développement asymptotique à deux termes de v_n.
Indication : une fois la limite de (v_n) déterminée, on pourra poser $w_n = 1 - v_n$, puis utiliser le logarithme.
4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note x_n l'unique solution dans $]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ de l'équation $\tan(x) = x$. Donner un développement asymptotique à la précision $\frac{1}{n^2}$ de x_n.
5 Soit (x_n) la suite récurrente de terme initial $x_0 \in]0, \pi/2]$ et d'itératrice sinus. Donner un équivalent de x_n.

2. Expressions séquentielles de notions ou propriétés topologiques

Exercice 106

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Montrer l'existence d'une suite (a_n) d'éléments de A, de limite $\sup(A)$.

Exercice 107

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout réel x, il existe une suite d'éléments de A, de limite x.

Exercice 108

Une partie U de $\mathbb{R}$ est dite ouverte si pour tout élément u de U, il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]u-\varepsilon, u+\varepsilon[\subset U$. Une partie F de $\mathbb{R}$ est dite fermée si son complémentaire dans $\mathbb{R}$ est ouvert.
Montrer qu'une partie F de $\mathbb{R}$ est fermée si et seulement si la limite de toute suite convergente d'éléments de F appartient à F.

3. Calculs de sommes de séries

Exercice 109

Montrer la convergence et calculer la somme de $\sum u_n$, lorsque :
1 $u_n = \frac{n}{n^4+n^2+1}$.
2 $u_n = \frac{2n-1}{n^3-4n}$ (où $n \geqslant 3$).
3 $u_n = \frac{1}{n^2+3n}$.
4 $u_n = \frac{1}{n^2+3n+2}$.

Exercice 110

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$; on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{a^{2^n}}{\prod_{k=0}^n (a^{2^k}+1)}$.
1 Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ selon les valeurs de a.
2 Calculer la somme de cette série lorsqu'elle converge.

Exercice 111

Montrer la convergence et calculer la somme de $\sum u_n$, lorsque :
1 $u_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ $(n \geqslant 2)$.
2 $\sum \frac{(-1)^n}{3n+1}$.
3 On pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Montrer que la série $\sum u_n$ où $u_n = \frac{H_n}{n(n+1)(n+2)}$ converge, et calculer sa somme.
4 $u_n = (-1)^n \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ $(n \geqslant 2)$.
Indication : on pourra utiliser la formule de Stirling.

4. Séries à termes positifs

Exercice 112

Déterminer la nature de $\sum u_n$, où :

1 $u_n = n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

2 $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

3 $u_n = \frac{\ln(n)}{\ln(e^n-1)}$.

4 $u_n = \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$.

5 $u_n = \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$.

6 $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$.

7 $u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$.

8 $u_n = e^{-\sqrt{n}}$.

9 $u_n = \sqrt{\mathrm{ch}\left(\frac{1}{n}\right)-1}$.

10 $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Exercice 113

Soit $\alpha, \beta > 0$.

1 Montrer que $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

2 Donner un équivalent des sommes partielles lorsque $\alpha = \beta = 1$.

Exercice 114

On considère une série convergente à termes positifs $\sum a_n$.
Étudier la convergence des séries suivantes :

1 $\sum a_n^2$.

2 $\sum \frac{a_n}{a_n+1}$.

3 $\sum a_n a_{2n}$.

4 $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$.

Remarque : pour prolonger l'exercice, on peut se poser les questions suivantes :

5 Étude des réciproques.

6 Que se passe-t-il si on ne suppose plus la série à termes positifs ?

Exercice 115

Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries convergentes à termes positifs.
Établir la convergence des séries suivantes :
1 $\sum \max(a_n, b_n)$.
2 $\sum \sqrt{a_n b_n}$.
3 $\sum \frac{a_n b_n}{a_n+b_n}$ (en supposant que $(a_n + b_n)$ ne s'annule pas).

Exercice 116

Soit $a > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{a^n n!}{n^n}$.
Étudier, selon la valeur de a, la convergence de $\sum u_n$.

Exercice 117

1 Donner un exemple de série convergente $\sum u_n$ tel que $u_n \neq \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ (si possible avec $u_n \geqslant 0$).
2 Montrer cependant que si $\sum u_n$ converge et si (u_n) décroît, alors $u_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 118

On se donne une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne prenant jamais la valeur -1. On pose, pour tout $n \geqslant 1$:

$$v_n = \frac{u_n}{\prod_{k=1}^{n}(1 + u_k)}.$$

1 On suppose dans cette question (u_n) à termes positifs ou nuls. Montrer que la série de terme général v_n converge. Calculer la somme de cette série lorsque la série de terme général u_n diverge.
2 Étudier la série $\sum v_n$ lorsque :
- **a** $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.
- **b** $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

Exercice 119

On suppose que la série de terme général positif a_n converge. Prouver que la série de terme général $\sqrt{a_n a_{n+1}}$ converge également. Montrer que la réciproque est fausse. Montrer que si la suite est (a_n) est décroissante, alors la réciproque est vraie.

Exercice 120

Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$, telle que $u_{n+1}/u_n \to +\infty$. Montrer que $\sum u_n$ diverge, et que $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim u_n$.

Exercice 121

Donner le cardinal de l'ensemble A_n des $k \in [\![10^n, 10^n - 1]\!]$, dont l'écriture ne contient aucun 5.
Soit $S_5 = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \sum_{k\in A_n} \frac{1}{k}$. Montrer que $S_5 \leqslant 72$. De même pour $S_0, \dots, S_9$. Conclusion ?

Exercice 122

Pour une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ d'entiers croissante telle que $u_1 \geqslant 2$, on note

$$S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_0 u_1} + \cdots + \frac{1}{u_0 \dots u_n}.$$

1 Montrer que pour tout réel $x \in]0,1[$, il existe une unique suite u telle que

$$S_n \to x.$$

2 Montrer que x est rationnel si et seulement si u finit par stationner.
3 En déduire que e est irrationnel.

5. Séries à termes quelconques

Exercice 123

Déterminer la nature de $\sum u_n$, où :
1 $u_n = \frac{\sin(n^2)}{n^2}$.
2 $u_n = \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$.
3 $u_n = \sin\left(\pi(2-\sqrt{3})^n\right)$.
4 $u_n = \sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)$.
Indication : faire le lien avec la question précédente.
5 $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.
6 $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{2n+1}\right)$.
7 $u_n = \frac{v_n}{2^n}$, où v est une suite bornée.

Exercice 124

Nature de $\sum \cos\left(\pi n\sqrt{1+n^2}\right)$?

Exercice 125

$u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $u_{n+1} = 2\arctan(u_n)$. Montrer que (u_n) converge vers $\lambda \in \mathbb{R}$, nature de $\sum(u_n - \lambda)$?

Exercice 126

Nature de la série de terme général $\ln(n)^\alpha \sin\left(\pi n\sqrt{1+n^2}\right)$?

Exercice 127

1 Nature de la série de terme général $\frac{\ln(n)}{n}$? $(-1)^n\frac{\ln(n)}{n}$?

2 Nature de la série de terme général $v_n = \frac{\ln(n)}{n} - \int_{n-1}^{n} \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t$.

3 Montrer que la suite de terme général $w_n = \sum_{q=2}^{n} \frac{\ln(q)}{q} - \frac{\ln(n)^2}{2}$ converge.

4 Trouver $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n}$ grâce à

$$\sum_{p=1}^{2n}\frac{\ln(p)}{p} + \sum_{p=1}^{2n}\frac{(-1)^p\ln(p)}{p}.$$

Réponse : $\gamma\ln(2) - \frac{\ln(2)^2}{2}$.

Exercice 128

Soit $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$. Nature de $\sum u_n$?

Exercice 129

Soit $f\ : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ convexe et telle que $f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

1 Montrer que la série de terme général $(-1)^k f(k)$ converge.

2 Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k f(k)\right| \leqslant \frac{f(n)}{2}$.

CHAPITRE 14

TD 4 : suites et séries numériques (corrigés)

Aller aux énoncés 13

1. Généralités sur les suites numériques

Corrigé 97 (Suite convergente d'entiers relatifs)

Si (u_n) est une suite convergente, alors il existe un rang N à partir duquel $|u_{n+1} - u_n| < 1$. Si elle est en outre à valeurs entières, alors $u_{n+1} = u_n$ à partir de ce rang N.

Version 5/2 : toute suite convergente d'un ensemble discret et fermé Ω est stationnaire. Attention, le fait d'être fermé est important (l'image de la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ est fermée, mais cette suite n'est pas stationnaire), il permet de s'assurer que la limite soit encore dans Ω.

Corrigé 98 (Extraction convergente d'une suite monotone)

Toute suite monotone admet une limite. C'est aussi la limite de toutes ses suites extraites. Si l'une d'entre elles converge, la suite initiale converge également.

Corrigé 99 (Équivalents et convergence)

Utiliser des équivalents.

Corrigé 100 (suite de Fibonacci)

1 Voir le cours sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

2 On doit trouver le nombre d'or $\phi \overset{def}{=} \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Corrigé 101 (Extraction d'une suite non majorée)

Soit u une suite réelle non majorée. Pour tout $M \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\Omega_M \overset{def}{=} \{n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant M\}$ est infini.

On construit alors φ en imposant

$$\varphi(n+1) \in \Omega_{n+1} \cap]\varphi(n), +\infty[$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque : on peut bien sûr aborder le problème de différentes manières, mais, pour s'assurer que la suite extraite diverge vers $+\infty$, il vaut mieux trouver une suite minorante tendant vers $+\infty$ que d'imposer sa monotonie, qui ne prouve pas que la suite tend vers $+\infty$ (même la stricte croissance).

Corrigé 102 (Équivalent d'une suite)

1 Encadrement standard.

2 On peut prendre le même genre d'exemple que pour montrer l'importance de la monotonie dans le CSSA.

Corrigé 103 (Équivalents plus durs)

Le premier exemple est lié aux séries de Riemann.

Pour le second, on trouvera $n!$. Une façon de le prouver consister à observer que $n!-(n-1)! \sim n! > 0$, puis à utiliser le théorème de sommation des relations de comparaison.

Corrigé 104 (Exemple de suite implicite)

1 $\varphi \ : x \mapsto x + \ln(x)$ est une bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

2 (u_n) est strictement croissante, car (n) l'est, ainsi que φ^{-1}.
u_n tend vers $+\infty$ car φ est de limite $+\infty$ en $+\infty$, donc φ^{-1} aussi.

3 u_n tend vers $+\infty$, donc $\ln(u_n) = \mathrm{o}(u_n)$.

4 $u_n - n = -\ln(u_n)$ or $u_n \sim n$ et n tend vers $+\infty$, donc $\ln(u_n) \sim \ln(n)$.

Remarque : ce n'est pas officiellement du cours, mais il faut savoir que si une suite (u_n) de réels strictement positifs tend vers $l \neq 1$, et si $v_n \sim u_n$, alors $\ln(v_n) \sim \ln(u_n)$ (tout simplement parce que $\ln(v_n) = \ln(u_n) + \mathrm{o}(1)$).

Corrigé 105 (Développements asymptotiques de suites)

1

2 La suite (u_n) est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \geqslant 2$, $u_n \geqslant \ln(n-1)$ donc u_n tend vers $+\infty$.

On peut montrer que $u_n \leqslant n$, puis $u_n = \mathrm{O}(\ln(n))$, puis $u_n \sim \ln(n)$.

Ensuite, $u_n = \ln(n-1+u_{n-1}) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{u_{n-1}-1}{n}\right) = \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$.

3

2. Expressions séquentielles de notions ou propriétés topologiques

Corrigé 106 (Borne supérieure et suites)

Cas où $\sup A$ est un réel l : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_n \in A \cap [l - \frac{1}{n}, l]$ (puisque l est le plus petit des majorants de A). On a alors par encadrement la converence de (a_n) vers l.

Dans le cas où $\sup(A) = +\infty$, il suffit de prendre, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un élement a_n commun à A et $[n, +\infty[$ (il en existe car A n'est pas majorée) : cette suite d'élements de A tend vers $+\infty$.

Corrigé 107 (Caractérisation séquentielle de la densité)

Supposons A dense dans $\mathbb{R}$: soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut trouver un point a_n de A dans $[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}]$: cette suite de points de A converge vers x.

Réciproquement, supposons que A vérifie cette propriété séquentielle : soit x et y deux réels, où $x < y$. On peut trouver une suite (a_n) de points de A de limite $l = \frac{x+y}{2}$. En prenant $\varepsilon = \frac{y-x}{2}$ dans l'assertion formelle de convergence de (a_n) vers l, on trouve un rang N à partir duquel $|a_n - l| \leqslant \varepsilon$, *i.e.* $a_n \in [x, y]$. a_N par exemple est un point de A dans $[x, y]$.

D'où la densité de A dans $\mathbb{R}$.

Corrigé 108 (Caractérisation séquentielle des fermés de $\mathbb{R}$)

Supposons F fermée. Soit (x_n) une suite convergente de points de F, et soit l sa limite. Supposons $l \notin F$. Comme $\mathbb{R} \setminus F$ est ouverte, il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[\subset (\mathbb{R} \setminus F)$: il existe donc un rang à partir duquel x_n n'est pas dans F, d'où l'absurdité.

Supposons F non fermée : il existe $l \in \mathbb{R} \setminus F$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[\cap F \neq \emptyset$. En prenant une suite de valeurs de ε qui converge vers 0, on trouve une suite de points de F qui tend vers l.

3. Calculs de sommes de séries

Corrigé 109 (Lorsque le terme général est une fonction rationnelle)

1 $u_n \sim \frac{1}{n^3} > 0$, et $\sum \frac{1}{n^3}$ converge, d'où la convergence de $\sum u_n$.
$\frac{X}{X^4+X^2+1} = \frac{1}{2(X^2-X+1)} - \frac{1}{2(X^2+X+1)}$ donc par télescopage, $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

2 $u_n \sim \frac{2}{n^2} > 0$ d'où la convergence.
$\frac{2X-1}{X^3-4X} = \frac{3}{8(X-2)} + \frac{1}{4X} - \frac{5}{8(X+2)}$, puis télescoper soigneusement.

Corrigé 110 (Série et produit)

On prouve que $\frac{u_n}{a-1} = \alpha_n - \alpha_{n+1}$, où $\alpha_n = \frac{1}{a^{2^n}-1}$.
On a donc

$$S_n = (a-1)(\alpha_0 - \alpha_{n+1}) = 1 - \frac{a-1}{a^{2^{n+1}}-1}.$$

Si $a \in]0,1[$, la série converge vers a.
Si $a > 1$, la série converge vers 1.
(Si $a = 1$, la série converge vers 1.)

Corrigé 111 (Autres calculs de sommes)

1 Télescopage.

2 $\frac{1}{3n+1} = \int_0^1 x^{3n} \mathrm{d}x$.

3 $\frac{1}{X(X+1)(X+2)} = \frac{1}{2X} - \frac{1}{X+1} + \frac{1}{2(X+2)}$.
Ainsi,

$$u_n = \frac{H_n}{2n} - \frac{H_n}{n+1} + \frac{H_n}{2(n+2)} = \frac{H_n}{n} - \frac{H_{n+1}}{n+1} + \frac{H_{n+2}}{n+2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} - \frac{1}{2(n+2)^2}$$

4. Séries à termes positifs

Corrigé 112 (Nature de séries à termes positifs)

1 $u_n \sim 1$ divergence grossière.

2 $u_n \sim \frac{1}{n} > 0$: divergence.

3 $u_n \sim \frac{\ln(n)}{n} \geqslant \frac{1}{n} > 0$: divergence.

4 $u_n \sim \frac{2}{n^2} > 0$: convergence.

5 $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$: convergence.

6 $u_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) > 0$: convergence.

7 $u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$.

8 $u_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) > 0$: convergence.

9 $u_n = \sqrt{\mathrm{ch}\left(\frac{1}{n}\right) - 1}$.

10 $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Corrigé 113 (Séries de Bertrand)

1 Le cas problématique est celui où $\alpha = 1$ (dans les autres, la comparaison avec les séries de Riemann est fructueuse).

Dans le cas où $\alpha = 1$, on peut faire une comparaison série-intégrale.

2 Comparaison série intégrale (ou sommation des relations de comparaison).

Corrigé 114 (Opérateurs sur les séries convergentes à termes positifs)

1 $a_n^2 = \mathrm{o}(a_n)$ et $\sum a_n$ est convergente à termes positifs : convergence.

2 $\frac{a_n}{a_n+1} \sim a_n > 0$: convergence.

3 $a_n a_{2n} = \mathrm{O}(a_n)$ (et même $a_n a_{2n} = \mathrm{o}(a_n)$) : convergence.

4 $\frac{\sqrt{a_n}}{n} \leqslant \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{n^2}\right)$: convergence.

Remarque : pour prolonger l'exercice, on peut se poser les questions suivantes :

5 Les réciproques sont fausses, sauf pour $b_n \stackrel{def}{=} \frac{a_n}{a_n+1}$.

6 Rien ne va plus.

Corrigé 115 (Lois de composition interne sur les séries convergents à termes positifs)

1 Convergence par $0 \leqslant \max(a_n, b_n) \leqslant a_n + b_n$.

2 Convergence par $0 \leqslant \sqrt{a_n b_n} \leqslant \max(a_n, b_n)$ par exemple.

3 Moyenne harmonique, inférieure aux autres.

Corrigé 116 (Cas douteux de la règle de d'Alembert)

Corrigé 117 (Une idée reçue sur les séries)

Corrigé 118 (Série et produit, encore)

Corrigé 119 (Lien entre convergences de séries)

Corrigé 120 (Série telle que $u_{n+1}/u_n \to +\infty$)

Corrigé 121 (Série harmonique tronquée)

Corrigé 122 (Développement en série de Engel)

On observe déjà que pour toute telle suite (u_n), (S_n) converge bien, vers un élément de $]0, 1]$.

Unicité : supposons que deux telles suites (u_n) et (v_n) fournissent une même valeurs. On montre par récurrence forte que pour tout n, $u_n = v_n$.

On a

$$\frac{1}{u_0} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{v_0 \dots v_n} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{v_0^{n+1}} = \frac{1}{v_0 - 1},$$

donc $v_0 - 1 < u_0$, puis $v_0 \leqslant u_0$.

Par symétrie des rôles joués par u_0 et v_0, on a bien $u_0 = v_0$.

L'hérédité est du même genre.

Existence : soit $x_0 \in]0, 1]$. On pose $u_0 = [1/x_0] + 1$, $x_1 = u_0 x_0 - 1$ puis, par récurrence $u_n = [1/x_n] + 1$ et $x_{n+1} = u_n x_n - 1$.

On montre par récurrence que (x_n) est bien définie et à termes strictement positifs.

On montre en outre qu'elle est décroissante.
(u_n) est donc une suite croissante d'entiers. En outre, $u_0 \geqslant 2$.
On a

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{u_0} + \frac{x_1}{u_0} \\ &= \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_0}\left(\frac{1}{u_1} + \frac{x_2}{u_1}\right) \\ &= \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_0 u_1} + \cdots + \frac{1}{u_0 \dots u_n} + \frac{x_{n+1}}{u_0 \dots u_n}. \end{aligned}$$

Par l'encadrement

$$0 \leqslant \frac{x_{n+1}}{u_0 \dots u_n} \leqslant \frac{x_0}{2^{n+1}},$$

on prouve bien l'existence d'une telle suite (u_n).

1 On montre facilement que si (u_n) stationne, alors $\lim S_n$ est rationnel. Réciproquement, supposons que $x = a/b$ soit rationnel ($a, b \in \mathbb{N}^*$, $a \leqslant b$).

On a

$$\frac{a}{b} - \sum_{n=0}^{p} \frac{1}{u_0 \dots u_n} \leqslant \frac{1}{u_0 \dots u_p} \cdot \frac{1}{u_{p+1} - 1},$$

donc

$$0 < (u_{p+1} - 1) \cdot \left(a u_0 \dots u_p - b \sum_{n=0}^{p} (u_{n+1} \dots u_p)\right) \leqslant b,$$

donc u est majorée, puis stationnaire.

2 Résulte immédiatement de $e - 2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

5. Séries à termes quelconques

Corrigé 123 (Nature de séries à termes quelconques)

Corrigé 124 (Nature d'une série de cosinus)

Corrigé 125 (Suite récurrente étudiée via une série)

Corrigé 126 (Nature d'une série se ramenant à une série de Bertrand)

Corrigé 127 (Calcul de $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$)

Corrigé 128 (Nature d'une série dont le terme général est un reste de série convergente)

Corrigé 129 (Nature d'une série définie à l'aide d'une fonction convexe)

CHAPITRE 15

Oraux 4 : suites et séries numériques (énoncés)

Aller aux corrigés 16

1. Suites numériques

Exercice 130

Montrer que la suite de terme général $\sin(\ln n)$ n'a pas de limite.

Exercice 131

1 Soit $s > 0$ et $a_0 \in]0, 1/s[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_{n+1} = a_n - sa_n^2$. Montrer que $a_n \sim \frac{1}{sn}$.
2 *(X PC 08)* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Donner un équivalent de u_n.
3 *(INT PSI 08)* On considère la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2}$. Étudier la convergence de u_n. Trouver un équivalent de u_n quand n tend vers l'infini.
4 *(ENS Lyon MP 09)* La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$. Donner un équivalent de u_n.

Exercice 132

Soit f une fonction 1-lipschitzienne de $[0, 1]$ dans lui-même, (x_n) la suite définie par $x_0 \in [0, 1]$ et $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + f(x_n))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (x_n) converge.

Exercice 133

(X MP) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle telle que $(2x_{n+1} - x_n)$ converge vers a. Montrer que (x_n) est convergente.

Exercice 134

(X MP 05) Déterminer les suites réelles bornées telles que $\left(u_n + \frac{u_{2n}}{2}\right)$ converge.

2. Séries numériques

Exercice 135

(Mines MP 06) Soit $u_0 \geqslant 0$ et $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{1+u_n^2}$. Étudier la suite (u_n) puis la série $\sum(u_n - 1)$.

Exercice 136

(Centrale MP 08) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}$.

Exercice 137

1 (ENTPE PSI 08) Nature de la série de terme général $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$?

2 (Centrale PSI 10) Nature de la série de terme général $\frac{j^n}{n}$ où $j = e^{2i\pi/3}$.

Exercice 138

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite monotone de réels positifs.

1 Montrer que les séries de termes généraux u_n et nu_{n^2} sont de même nature.

2 Qu'en est-il si on enlève l'une ou l'autre des deux hypothèses ?

Exercice 139

1 (École de l'air) Nature et somme de la série de terme général $u_n = (-1)^n \int_0^1 \cos^n x \mathrm{d}x$.

2 (CCP) Justifier la convergence et calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right)$.

Exercice 140

1 (CCP) Nature de la série de terme général $(\cos(1/n))^{n^3}$?

2 (Mines Alès) Nature de la série de terme général $\ln\Big(1+(-1)^n/n^\alpha\Big)$ en fonction de $\alpha > 0$.

3 (CCP) Nature de la série de terme général $(1-\operatorname{th} n)$?

4 (Centrale PSI 10) Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{\sqrt{n(n+(-1)^n)}}$. Nature de la série de terme général u_n ?

5 (Mines MP 10) Nature de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$?

6 (Mines MP 10) Nature de la série de terme général $\frac{(-1)^n \cos(\sqrt{n})}{n}$?

7 (Mines MP 10) Nature de la série de terme général $\frac{\sigma(n)}{n^2}$, où σ est une injection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$?

8 (Centrale MP 10) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Nature de la série de terme général : $(-1)^n \frac{\sqrt{n^\alpha+1}-\sqrt{n^\alpha-1}}{n^\beta}$.

9 Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \arccos\left(1-\frac{1}{n}\right) - \sqrt{\frac{2}{n}}$.

Exercice 141

(Mines-Ponts PSI 10) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (n^4+n^2)^{1/4} - P(n)^{1/3}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur P pour que la série de terme général u_n converge.

Exercice 142

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ décroissante. On suppose que la série de terme général u_n est convergente. Si $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = n(u_{n+1} - u_n)$. Montrer que la série de terme général v_n est convergente. Exprimer sa somme en fonction de celle de u_n.

Exercice 143

(CCP) Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum_{k>n} \frac{1}{k!}$.

1 Prouver la convergence de la suite de terme général R_n et de la suite de terme général $(n+1)!\, R_n$.

2 Étudier la convergence de la série de terme général $\sin(2\pi e n!)$.

Exercice 144

(ENSAM) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

1 Justifier l'existence de u_n.

2 Montrer que la série de terme général u_n converge et calculer sa somme.

Exercice 145

(CCP) Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{-u_n}/(n+1)$.
1 Déterminer les limites éventuelles des suites (u_n) et (nu_n).
2 Nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$?

Exercice 146

(TPE) Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{3n+1} = \frac{1}{4n+1}$, $u_{3n+2} = \frac{1}{4n+3}$, $u_{3n+3} = -\frac{1}{2n+2}$. Montrer que la série de terme général u_n converge et calculer sa somme.

Exercice 147

(CCP) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 1-périodique et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t} \mathrm{d}t$.
1 Montrer : $u_n = \frac{1}{n} \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t + O(1/n^2)$.
2 Nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 148

On se donne une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à termes positifs, décroissante et convergeant vers 0.
1 Montrer que les séries de terme général u_n et $n(u_n - u_{n+1})$ sont de même nature.
2 Montrer, dans le cas où elles convergent, qu'elles ont la même somme.

Exercice 149

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et α un réel < 0 tels que $\frac{f'}{f}$ tende vers α en $+\infty$. Étudier la nature de la série de terme général $f(n)$.

Exercice 150

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série convergente à termes réels strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ le reste d'ordre n.
1 Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{R_n^2} = 1.$$

2 La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 151

1 Nature de la série de terme général $d\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n, \mathbb{Z}\right)$ (où $d(x, \mathbb{Z}) \overset{def}{=} \min\{x - n, n \in \mathbb{Z}\}$, pour tout réel x).
2 On considère la suite de terme initial $u_0 = 1$ et telle que $u_{n+1} = \sin(-u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nature de la série de terme général u_n ?
3 (Mines MP) On définit la suite réelle (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$. Convergence de la série de terme général $\frac{1}{v_n}$? Somme ?

Exercice 152

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que ni f ni f' ne s'annulent et $f(0) = 1$. Soit (a_n) définie par $a_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = a_n f(a_n)$. Montrer que la série de terme général a_n diverge.

Exercice 153

Donner un exemple de série divergente dont le terme général tend vers 0 et dont les sommes partielles sont bornées.

Exercice 154

On donne une suite (a_n) d'éléments de $]0, 1[$, et on note

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{et} \quad t_n = \sum_{k=0}^{n} s_k.$$

Déterminer la nature des séries

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{a_n}{t_n} \quad \text{et} \quad \sum_{n \geqslant 0} \frac{s_n^2}{t_n^2}.$$

Exercice 155

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n}.$$

1 Étudier la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum (-1)^n u_n$.
2 Reprendre la question précédente en supposant u_1 complexe tel que $\mathrm{Re}(u_1) \geqslant 0$.

Exercice 156

1 Montrer que la suite de terme général
$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$$
est convergente.
2 On pose, lorsque $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$:
$$u_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{\sqrt{k}-1}{\sqrt{k}+1}.$$
a Étudier la convergence de la suite (u_n).
b Étudier la nature de la série de terme général (u_n^α) lorsque $\alpha > 0$ est donné.

3. Applications aux développements asymptotiques

Exercice 157

Fixons $\alpha \in]0, 1[$ et définissons la suite u par $u_0 > 0$ et la relation de récurrence
$$u_{n+1} = \ln(1 + \alpha u_n).$$
1 Étudier la monotonie et la convergence de la suite u.
2 En posant $v_n = u_n/\alpha^n$, étudier la quantité $w_n = v_{n+1}^\beta - v_n^\beta$ pour β bien choisi, afin de montrer qu'il exite un réel $A > 0$ tel que $u_n \sim A\alpha^n$ lorsque n tend vers l'infini. On ne cherchera pas à expliciter A.
3 Déterminer un équivalent de $u_n - A\alpha^n$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 158

1 Soit (u_n) la suite de terme initial $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$, et d'itératrice sinus. Donner un développement asymptotique à deux termes de u_n.
2 (Mines MP 2010) Soit (u_n) telle que $u_0 > 0$ et d'itératrice $f \;: x \mapsto x + \frac{1}{\sqrt{x}}$. Donner un développement asymptotique à deux termes de u_n.
3 Soit (x_n) une suite définie par $x_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$x_{n+1} = x_n + x_n^2.$$
a Montrer que (x_n) tend vers $+\infty$.
b On pose $u_n = 2^{-n}\ln(x_n)$ et $v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que la série de terme général v_n converge. En déduire que (u_n) converge.
c Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $x_n \sim \alpha^{2^n}$.
4 (Mines MP 2006) Soit $u_0 \in]0, 2\pi[$, puis $u_{n+1} = \sin(u_n/2)$.
a Montrer que (u_n) tend vers 0.
b Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty}(2^n u_n) = A$ pour un certain $A > 0$.
c Trouver un équivalent simple de $(u_n - A2^{-n})$.

Exercice 159

1 (Mines MP) On pose

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n}.$$

a Montrer que (a_n) converge et trouver sa limite λ.
b Trouver un équivalent simple de $a_n - \lambda$.

2 Développement asymptotique à deux termes de $u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{\ln(p)}{p}$.

3 Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs. On note $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ et on suppose

$$u_n \sim R_n^2.$$

Déterminer un équivalent de u_n.

CHAPITRE 16

Oraux 4 : suites et séries numériques (corrigés)

Aller aux énoncés 15

1. Suites numériques

Corrigé 130 (sin(ln(n)) (X PSI 05))

Raisonnons par l'absurde, en supposant que cette suite (u_n) admette une limite l. l est un réel, car (u_n) est bornée. En considérant u_{2n}, on constate que $(\cos(\ln n))$ converge également, vers l'. De plus, $l^2 + l'^2 = 1$. En considérant (u_{n^2}), on obtient $l = 0$, puis $|l'| = 1$, ce qui conduit à une absurdité en revenant à (u_{2n}).

Corrigé 131 (Comportement asymptotique de suites récurrentes)

Corrigé 132 (Suite récurrente et fonction lipschitzienne (ENS Cachan MP 08))

Corrigé 133 (Suite réelle (x_n) telle que $(2x_{n+1} - x_n)$ converge)

Corrigé 134 (Suite réelle bornée verifiant une condition de convergence)

2. Séries numériques

Corrigé 135 (Série dont le terme général est une suite récurrente)

Pour tout n, $\frac{|u_{n+1}-1|}{|u_n-1|} \leqslant \frac{1}{2}$, ce qui prouve que la série est absolument convergente.

Corrigé 136 (Série exponentielle lacunaire)

Corrigé 137 ((ENTPE PSI 08))

Corrigé 138 (Équivalence de nature entre deux séries (Centrale PSI 08))

Corrigé 139 (Nature et somme d'une série)

Corrigé 140 (Nature de séries en vrac)

Corrigé 141 (Étude de convergence d'une série selon le choix d'un polynôme)

Corrigé 142 (Un opérateur sur certaines séries (Mines-Ponts PSI 10))

Corrigé 143 (Nature de la série des restes de la série exponentielle)

Corrigé 144 (Nature de la série des restes de la série harmonique alternée)

Corrigé 145 (Nature d'une série alternée)

Corrigé 146 (Nature et somme d'une série donnée par les termes modulo 3)

Corrigé 147 (Nature d'une série dont le terme général est donné par une intégrale)

Corrigé 148 (Séries de même nature)

Corrigé 149 (Nature d'une série définie à l'aide d'une fonction)

Corrigé 150 (Série et dérivation discrète)

Corrigé 151 (D'autres natures de séries)

Corrigé 152 (Divergence d'une série (X MP 10))

Corrigé 153 (Une autre idée reçue sur les séries (X MP))

Corrigé 154 (Nature compliquée de séries)

Supposons la série $\sum a_n$ convergente, de somme σ. On a $a_n/t_n = \mathrm{O}(t_n)$, donc la première série converge.

On a $s_n \sim \sigma$ et $t_n \sim n\sigma$, donc la seconde série converge.

Supposons la série $\sum a_n$ divergente. On a $a_n = \mathrm{o}(s_n)$, donc $s_n \sim s_{n-1}$, puis $s_n = \mathrm{o}(t_n)$, donc $t_n \sim t_{n-1}$.

On a donc

$$\frac{s_n}{t_n} = 1 - \frac{t_{n-1}}{t_n} \sim \ln \frac{t_n}{t_{n-1}} = \ln(t_n) - \ln(t_{n-1}).$$

On a

$$\frac{a_n}{t_n} = \frac{s_n - s_{n-1}}{t_n} = \left(\frac{s_n}{t_n} - \frac{s_{n-1}}{t_{n-1}}\right) + \frac{s_{n-1}s_n}{t_{n-1}t_n}.$$

Comme $\frac{s_n}{t_n}$ tend vers 0, la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{s_n}{t_n} - \frac{s_{n-1}}{t_{n-1}}\right)$ converge, donc les deux séries étudiées ont même nature.

On observe que

$$\begin{aligned} s_n^2 &= \sum_{k=0}^{n} a_k^2 + 2\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j \\ &\leqslant s_n + 2\sum_{j=1}^{n} s_{j-1}a_j \\ &\leqslant s_n + 2\sum_{j=1}^{n} s_{j-1} \\ &\leqslant 2t_n. \end{aligned}$$

Il en résulte
$$\frac{a_n}{t_n} \leqslant \frac{2a_n}{s_n^2} \leqslant 2\int_{s_{n-1}}^{s_n} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$
Les deux séries convergent donc.

Corrigé 155 (Étude d'une série compliquée)

Corrigé 156 (Produit et série)

3. Applications aux développements asymptotiques

Corrigé 157 (Étude d'une suite via une série)

Corrigé 158 (Application des séries aux suites récurrentes)

Corrigé 159 (Autres développements asymptotiques)

CHAPITRE 17

TD 5 : espaces-vectoriels normés (énoncés)

Aller aux corrigés 18

1. Norme, comparaison des normes

Exercice 160

Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, $g \in E$. On pose $N(f) = \sup_{x\in[0,1]}\{|f(x)g(x)\}$, pour tout $f \in E$.
1 Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N soit une norme sur E.
2 Si, pour tout $x \in [0,1]$, $g(x) \neq 0$, montrer qu'alors N et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes équivalentes. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 161

Soit $f_1,\dots,f_n \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que
$$N\ : (x_1,\dots,x_n) \mapsto \|x_1f_1+\cdots+x_nf_n\|_\infty$$
soit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 162

On pose, pour $P \in \mathbb{R}[X]$:
$$N_1(P) = \sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{P^{(n)}(0)}{n!}\right| \qquad \text{et} \qquad N_2(P) = \sum_{n=0}^{\infty}|P^{(n)}(0)|.$$
1 Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
2 Ces normes sont-elles équivalentes ?

Exercice 163

Soit (E,N) un evn de dimension finie, d la distance associée à N. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $F_1,\dots,F_p$ des sous-espaces vectoriels de E d'intersection triviale.
Montrer l'existence de réels strictement positifs α et β tels que, pour tout vecteur x de E :
$$\alpha\, N(x) \leqslant \sum_{i=1}^{p} d(x,F_i) \leqslant \beta\, N(x).$$
Remarque : selon l'état d'avancement du cours, on pourra admettre que chaque F_i est fermé, ou même que pour tout $x \in E$, il existe $f_i \in F_i$ tel que $d(x,F_i) = d(x,f_i)$.

Exercice 164

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}), f(0) = 0\}$, $N(f) = N_\infty(3f + f')$. Montrer que (E, N) est un EVN et qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $N_\infty(f) \leqslant \alpha N(f)$.
Indication : en posant $g = 3f + f'$, on pourra exprimer f en fonction de g.

Exercice 165

Soit E l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, telles que $f(0) = f'(0) = 0$. Pour $f \in E$, on pose $N_\infty(f) = \sup_{[0,1]} |f|$, $N(f) = \sup_{[0,1]} |f + f''|$ et $N_1(f) = \sup_{[0,1]} |f| + \sup_{[0,1]} |f''|$.
1 Montrer que N_∞, N et N_1 sont des normes sur E.
2 Montrer que N_∞ n'est équivalente ni à N_1, ni à N.
3 Montrer que N et N_1 sont équivalentes.

Exercice 166

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}), f(0) = f'(0) = 0\}$. Si $f \in E$, on pose $N(f) = \|f + 2f' + f''\|_\infty$.
1 Montrer que N est une norme.
2 Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que : $\forall\, f \in E, \|f\|_\infty \leqslant cN(f)$.

Exercice 167

Soit $n \geqslant 2$. Existe-t-il une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ invariante par conjugaison (*i.e.* telle que deux matrices semblables quelconques aient même norme) ?
Indication : on pourra chercher une matrice non nulle semblable à son double.

Exercice 168

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $p, q\ : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux applications continues à valeurs positives ou nulles, ne s'annulant chacune qu'en au plus un nombre fini de points. Soit $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$.
Soit

$$\begin{array}{rccl} \varphi_p : & E \times E & \to & \mathbb{C} \\ & (f,g) & \mapsto & \int_{[a,b]} \bar{f} g p \end{array},$$

et

$$\begin{array}{rccl} N_p : & E & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \varphi_p(f,f)^{1/2} \end{array}.$$

De même pour φ_q et N_q.
1 Montrer que N_p et N_q sont des normes.
2 Montrer que N_p et N_q sont équivalentes si et seulement si il existe des réels strictement positifs m et M tels que, pour tout point t de $[a,b]$, on ait

$$m\, p(t) \leqslant q(t) \leqslant M\, p(t).$$

Exercice 169

1 Déterminer sur $\mathbb{R}[X]$ une norme N telle que
$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad N(PQ) \leqslant N(P)N(Q).$$

2 Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension finie. Déterminer une norme N sur A telle que :
$$\forall (a,b) \in A^2, \quad N(ab) \leqslant N(a)N(b).$$

3 Peut-on déterminer une telle norme si A est une algèbre de dimension infinie ?

Exercice 170

Soit $N : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}_+$, où $n \geqslant 2$, vérifiant $N(AB) = N(BA)$.

1 Montrer que N ne peut pas être une norme.

2 On suppose en outre que $N(A+B) \leqslant N(A) + N(B)$ et $N(\lambda A) = |\lambda| N(A)$.

- **a** Montrer que $|\operatorname{tr}|$ convient.
- **b** Montrer que si $N(B) = 0$, alors $N(A+B) = N(A)$.
- **c** Trouver toutes les applications possibles.

Exercice 171

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Si $f \in E$, on note $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f|$ et $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 f^2\right)^{1/2}$.

1 Montrer qu'il existe $b \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall f \in E, \|f\|_2 \leqslant b \|f\|_\infty$.

2 Soit V un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall f \in V, \|f\|_\infty \leqslant c \|f\|_2$.

3 Soit V un sous-espace vectoriel de E. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall f \in V, \|f\|_\infty \leqslant n \|f\|_2$. Montrer que V est de dimension finie et que $\dim V \leqslant n^2$.

2. Topologie

Exercice 172

Montrer que si $E \neq \{0_E\}$, une boule non vide admet un unique centre et un unique rayon.

Exercice 173

Soit Ω une partie de E d'intérieur non vide. Montrer que $\operatorname{Vect}(\Omega) = E$. Qu'en déduire sur l'intérieur d'un sous-espace vectoriel strict de E ?

Exercice 174

Que dire d'un sous-espace vectoriel ouvert F d'un EVN E ?

Exercice 175

Soit E une $\mathbb{K}$-algèbre normée de dimension finie. Montrer que tous les éléments de la boule ouverte de centre 1_E et de rayon 1 sont inversibles.
Indication : on pourra penser à la formule de Bernoulli, ou au développement limité en 0 de $(1-u)^{-1}$.

Exercice 176

Montrer qu'un hyperplan est soit fermé, soit dense.

Exercice 177

1 Montrer que l'ensemble $D_n(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables de taille n est dense lorsque $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.
2 Montrer que $D_2(\mathbb{R})$ n'est pas dense dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 178

Décrire les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont la classe de similitude est bornée.

Exercice 179

Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable si et seulement si sa classe de similitude est fermée.

Exercice 180

Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si et seulement si 0_n appartient à l'adhérence de sa classe de similitude.

Exercice 181

Soit F, G deux fermés disjoints. Montrer qu'il existe des ouverts disjoints U et V contenant respectivement F et G.

Exercice 182

Montrer que tout fermé est une intersection d'une suite décroissante d'ouverts.

Exercice 183

Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, et
$$F = \{f \in E, f(0) = f(1)\}$$

1 Vérifier que F est un hyperplan de E.

2 Que dire de $\mathring{F}$?

3 Trouver une norme sur E pour laquelle F est fermé.

4 Trouver une norme sur E pour laquelle F est dense dans E.

Exercice 184

Soit $r \in [\![0, \min\{n,p\}]\!]$. On note $M_r(n,p)$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r. Déterminer l'adhérence de $M_r(n,p)$.

Exercice 185

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn. Soit U un ouvert étoilé, V l'ensemble des points x de U tel que U soit étoilé par rapport à x.

1 Montrer que V est convexe.

2 Montrer que V n'est pas nécessairement ouvert ou fermé dans E.

3 Montrer que V est fermé dans U.

Exercice 186

On munit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$. Soit T l'application qui à $f \in E$ associe $T(f) \ : x \mapsto f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)$.

1 Montrer que T est un endomorphisme continu de E. Déterminer sa *norme subordonnée*, *i.e.* $\sup\{\|T(x)\|, x \in \mathcal{S}(0,1)\}$.

2 Soit $f \in E$ non nulle telle que $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe $x_0 \in]0,1]$ tel que : $\forall\, x \in [0, x_0[, |f(x)| < |f(x_0)| = \|f\|_\infty$. En déduire que l'espace propre de T associé à la valeur propre 2 est de dimension 1.

Exercice 187

1 Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],[0,1])$. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est un fermé non vide.

2 Soit F un fermé non vide de $[0,1]$. Montrer que F est l'ensemble des points fixes d'une fonction continue de $[0,1]$ dans lui-même.

Exercice 188

1 Soit $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Montrer que si λ est racine de P, alors

$$|\lambda| \leqslant \max\{1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\}.$$

2 Montrer que l'ensemble des polynômes réels unitaires de degré n scindés sur $\mathbb{R}$ est fermé.

Exercice 189

Soit A une partie bornée non vide de $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique.

1 Montrer qu'il existe un plus petit r tel que A soit inclus dans une boule fermée de rayon r.

2 Montrer que cette boule est unique.

3 On suppose ici $n = 2$, et on pose $M = \sup\{\|a - b\|, (a, b) \in A^2\}$. Montrer que $r\sqrt{3} \leqslant M$.

Exercice 190

Soit F une partie non vide de $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $f \in F$ tel que $d(x, F) = d(x, f)$. Que dire de F ?

3. Continuité, uniforme continuité, fonctions lipschitziennes

Exercice 191

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, muni de $\|\cdot\|_\infty$. Soit L une forme linéaire sur E telle que si $f \geqslant 0$, alors $L(f) \geqslant 0$. Montrer que L est continue.

Exercice 192

Montrer qu'une forme linéaire φ est continue si et seulement si son noyau est fermé.

Exercice 193

On considère une partie non vide A d'un espace vectoriel normé E et une application k-lipschitzienne $f : A \to \mathbb{R}$, avec $k > 0$. Montrer que

$$g : x \mapsto \inf_{y \in A} (f(y) + k \|x - y\|)$$

définit une application k-lipschitzienne sur E, qui constitue un prolongement de f.

Exercice 194

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn, $f\ : x \mapsto \frac{x}{1+\|x\|}$.

1 Montrer que f est 1-lipschitzienne.

2 Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$(\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|) \Leftrightarrow (x = y).$$

Exercice 195

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, où $a < b$, et soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.
Montrer que $\varphi\ : f \mapsto \int_{[a,b]} f^2$ est continue pour $\|\cdot\|_\infty$, mais pas pour $\|\cdot\|_1$.

Exercice 196

Soit E et F deux evns réels, $f\ : E \to F$ une application telle que pour tous $x, y \in E$, $f(x+y) = f(x)+f(y)$, et il existe une boule fermée de rayon non nul dans E, d'image bornée dans F par f. Montrer que f est linéaire continue.

4. Compacité

Exercice 197

Soit A et B deux parties non vides de E. On note

$$A + B \overset{def}{=} \{a + b, (a, b) \in A \times B\}$$

1 Que dire de $A + B$ si A est ouvert ?

2 Montrer que si A est fermé et B compact, alors $A + B$ est fermé.

3 Donner un exemple de deux fermés dont la somme n'est pas fermée.

Exercice 198

1 Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], [a, b])$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.

2 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, $K \subset E$ un compact non vide de $f\ : K \to K$ telle que :

$$\forall (x, y) \in K^2, \quad x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\| .$$

Montrer qu'il existe un unique $c \in K$ tel que $f(c) = c$.

Exercice 199

Montrer que pour l'application rang r, pour tout point A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe un voisinage V de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$\forall B \in V, \quad r(A) \leqslant r(B).$$

Exercice 200

Soit A une partie bornée et non vide de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il n'existe pas de $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(A) \subset \mathbb{R} \setminus A$ et $f(\mathbb{R} \setminus A) \subset A$.

Exercice 201

Soit A et B des compacts non vides de $\mathbb{R}^n$. Montrer l'existence de $(a, b) \in A \times B$ tel que $\|a - b\| = d(A, B)$. Cela reste-t-il vrai si A compact et B fermé ? A et B fermés ?

Exercice 202

Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite *réversible* s'il existe une application continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(A) \subset \mathbb{R} \setminus A$ et $f(\mathbb{R} \setminus A) \subset A$.

1 Donner un exemple de partie réversible.

2 $\mathbb{Q}$ est-il réversible ?

3 Une partie réversible peut-elle être ouverte ? fermée ?

4 Une partie réversible peut-elle être un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$?

5 Une partie réversible peut-elle être bornée ? minorée ?

Exercice 203

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et X une partie de $\mathbb{R}^d$.

1 Montrer que tout point de l'enveloppe convexe de X est barycentre d'un système de $d + 1$ points de X affectés de coefficients positifs.

2 Si X est compacte, montrer que son enveloppe convexe est compacte.

5. Connexité par arcs

Exercice 204

1 Montrer qu'une union de connexes par arcs ne l'est pas toujours.

2 Montrer qu'une intersection de connexes par arcs ne l'est pas toujours.

3 Montrer qu'une union de connexes par arcs possédant un point commun est connexe par arcs.

Exercice 205

Soit A une partie d'un evn E de dimension finie.
1 $\mathring{A}$ est-elle nécessairement connexe par arcs ?
2 $\overline{A}$ est-elle nécessairement connexe par arcs ?

Exercice 206

Soit $\mathcal{S}$ la sphère unité d'un evn E. $\mathcal{S}$ est-elle connexe par arcs ?

Exercice 207

Soit $S^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. Existe-t-il $f\ : [0,1] \to S^1$ continue et bijective ?

Exercice 208

Soit φ une forme linéaire non nulle sur E, de noyau H. Montrer que $E \setminus H$ est connexe par arcs si et seulement si φ n'est pas continue.

CHAPITRE 18

TD 5 : espaces-vectoriels normés (corrigés)

Aller aux énoncés 17

1. Norme, comparaison des normes

Corrigé 160 (Norme sur un espace de fonctions)

1 Seul l'axiome de séparation pose un problème. La condition nécessaire et suffisante est que le lieu d'annulation de g soit d'intérieur vide.

2 Bien sûr, $N \leqslant N_\infty(g)N_\infty$. Dans l'autre sens, $|g|$ est minorée par un réel strictement positif (son minimum).

La réciproque est vraie. On montre la contraposée. Il suffit, en un point a où g s'annule, de construire une fonction f_n minorée par n sur un voisinage de a, telle que $N_\infty(f_n) \leqslant 1$. Le choix $1/(|g|+1/n)$ devrait également convenir.

Corrigé 161 (Norme sur $\mathbb{R}^n$ définie par des fonctions)

N est la composée de l'application

$$\varphi\ : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n$$

et de la norme infinie : c'est donc une semi-norme, et c'est une norme si et seulement si φ est injective, *i.e.* $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre.

Corrigé 162 (Comparaison de normes sur les polynômes)

1 Standard, la plus grande difficulté étant de vérifier la séparation (grâce à la formule de Taylor polynomiale).

2 Ces normes ne sont pas équivalentes, car on peut trouver une suite de polynômes qui est bornée pour l'une des normes mais pas pour l'autre.

Corrigé 163 (Somme de distances à des sous-espaces)

Le résultat à établir ressemble à une équivalence de normes. Comme on travaille en dimension finie, on constate que la véritable question est de savoir si

$$N'\ : x \mapsto \sum_{i=1}^{p} d(x, F_i)$$

est une norme.

C'est une fonction de E dans $\mathbb{R}_+$.

On vérifie l'homogénéité et l'inégalité triangulaire (travail assez fin sur la notion de borne inférieure si on n'admet pas que les distances sont atteintes).

La séparation provient du résultat admis que chaque F_i soit fermé.

Corrigé 164 (Comparaison de normes, toujours)

Comme $f \mapsto 3f + f'$ est une application linéaire de E dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, N est une semi-norme. En évoquant un problème de Cauchy, on montre que c'est aussi une norme.

La seconde question incite à comparer $N_\infty(f)$ et $N_\infty(g)$, où $3f + f' = g$. En résolvant l'équation différentielle $3y' + y = g$, on exprime f en fonction de g et on conclut par des inégalités intégrales classiques.

Corrigé 165 (Équivalence de normes sur des espaces de fonctions)

1 Standard (la partie la plus difficile est la séparation de N, que l'on établit par la considération d'un problème de Cauchy.

2 Trouver une suite classique de fonctions bornée pour N_∞ mais pas pour N et N_1.

3 Bien sûr, $N \leqslant N_1$.

Une inégalité de la forme $N_1 \leqslant \alpha N$ est plus difficile à obtenir. On pourra s'inspirer de la méthode de l'exercice 1, et éventuellement considérer $h = f + if'$ de sorte que $h - ih' = f + f''$.
Remarque : on peut utiliser, si on la connaît, la méthode de variation des constantes pour l'équation $y'' + y = g$.

Corrigé 166 (Comparaison de normes)

1 La positivité, l'inégalité triangulaire et l'homogénéité sont faciles à montrer. Pour l'axiome de séparation, il suffit de penser à l'unicité d'une solution à un problème de Cauchy.

2 Pour tout $t \in [0,1]$, on observe que :

$$f(t) = e^t \int_0^t \int_0^x (f(u) + 2f'(u) + f''(u))e^u \mathrm{d}x,$$

de sorte que

$$|f(t)| \leqslant e^t \int_0^t \int_0^x \|f + 2f' + f''\| \,\mathrm{d}x \leqslant \frac{e}{2} N(f).$$

Corrigé 167 (Norme matricielle invariante par conjugaison)

Il faut déjà comprendre pourquoi l'existence d'une matrice non nulle A semblable à $2A$ permet de conclure.

Reste alors à trouver une telle matrice A. Plusieurs arguments (considération des valeurs propres, nullité de la trace de A et de ses puissances) permettent d'en déduire que A est nécessairement nilpotente.

On montre facilement que le choix le plus évident ($A \overset{def}{=} E_{1,n}$) convient.

Corrigé 168 (D'autres équivalences de normes)

Corrigé 169 (Norme d'algèbre)

1 On peut prendre par exemple la norme infinie sur $[0,1]$ (exemple de cours).

2 Fixons une norme N' sur A. Comme $(a,b) \mapsto ab$ est bilinéaire en dimension finie, il existe $C > 0$ tel que, pour tous $a, b \in A$:

$$N'(ab) \leqslant CN'(a)N'(b)$$

Un multiple de N' convient alors.

3

Corrigé 170 (Pseudo-normes multiplicatives)

1 Une telle norme doit être invariante par conjugaison, et n'existe donc pas.
Remarque : on aurait aussi pu utiliser des matrices A et B telles que AB soit nul mais pas BA.

2

a La trace est linéaire et le module est une norme, donc la composée est une semi-norme.
b Facile.
c Commencer par regarder $N(E_{i,j})$ où $i \neq j$.
Vérifier que $N(E_{i,i} - E_{j,j})$ est nul pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$.
Conclure.

Corrigé 171 (Comparaison des normes infinie et euclidienne (Centrale PSI 10))

2. Topologie

Corrigé 172 (Centre d'une boule)

On peut retrouver le rayon d'une telle boule grâce à son diamètre.
Si on suppose qu'elle a deux centres distincts, on obtiendra une absurdité en trouvant des points de cette boule à distance strictement supérieure à son diamètre (il est conseillé de faire un dessin).

Corrigé 173 (Sous-espace engendré par une partie d'intérieur non vide)

Faire un dessin.
Un sous-espace vectoriel strict de E est d'intérieur vide.

Corrigé 174 (Sous-espace ouvert)

Si F est ouvert, alors il est égal à son intérieur. Comme F n'est pas vide, l'exercice précédent montre que $F = E$.
Remarque : bien sûr, la réciproque est vraie.

Corrigé 175 (Boule ne contenant que des éléments inversibles)

Soit $u \in E$, tel que $\|u\| < 1$.
On est tenté d'écrire

$$(1_E - u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$$

On justife d'abord la convergence de $\sum u^n$ (par absolue convergence), puis on vérifie que

$$(\sum_{n=0}^{+\infty} u^n)(1_E - u) = (1_E - u)(\sum_{n=0}^{+\infty} u^n) = 1_E$$

Corrigé 176 (Topologie des hyperplans)

Soit H un hyperplan de E (un evn). Les seuls sous-espaces de E contenant H sont H et E. Si on montre que $\overline{H}$ est un sous-espace vectoriel de E, l'exercice est terminé.
Cela se fait très bien séquentiellement.

Corrigé 177 (Densité des diagonalisables, ou pas)

1 On peut utiliser la trigonalisation.

2 Le discriminant $X^2 + bX + c \mapsto b^2 - 4c$ est une fonction continue.

Corrigé 178 (Matrices dont la classe de similitude est bornée)

Observons déjà que la réponse sera indépendante de la norme choisie.

Les matrices scalaires conviennent de manière évidente.

Réciproquement, si A n'est pas scalaire, elle est semblable à une matrice non diagonale (on pourra raisonner géométriquement). On peut alors conclure avec la norme infinie par exemple.

Corrigé 179 (Caractérisation topologique de la diagonalisabilité d'une matrice complexe)

Dans le sens direct, on pourra utiliser le polynôme minimal et le polynôme caractéristique, qui sont des invariants de similitude.

Dans le sens indirect, on pourra partir d'une matrice triangulaire supérieure, et ratatiner les coefficients non diagonaux par changement d'échelle.

Corrigé 180 (Caractérisation topologique de la nilpotence d'une matrice complexe)

Corrigé 181 (Séparation de fermés disjoints)

Corrigé 182 (Les fermés à partir d'ouverts)

Corrigé 183 (Hyperplan fermé ou dense selon la norme choisie)

Corrigé 184 (Adhérence des matrices de rang donné)

Corrigé 185 (Ouvert étoilé)

Corrigé 186 (Un opérateur sur les espaces de fonctions)

Corrigé 187 (Description topologique d'un ensemble de points fixes)

Corrigé 188 (Un fermé dans $\mathbb{R}_n[X]$)

Corrigé 189 (Boule fermée contenant une partie bornée donnée)

Corrigé 190 (Distance à une partie atteint en un unique point)

F doit être fermé (prendre un point de sa frontière). F doit être convexe. Finalement, F est un intervalle fermé (et la réciproque est vraie).

3. Continuité, uniforme continuité, fonctions lipschitziennes

Corrigé 191 (Forme linéaire préservant la positivité)

Corrigé 192 (Caractérisation de la continuité d'une forme linéaire)

Corrigé 193 (Prolongement lipschitzien d'une fonction lipschitzienne)

Corrigé 194 (Une fonction lipschitzienne)

Corrigé 195 (Application continue pour une norme, pas pour une autre)

Corrigé 196 (Condition suffisante de linéarité et continuité)

4. Compacité

Corrigé 197 (Sommes de parties)

Corrigé 198 (Point fixe et compacité (Centrale PSI 10))

Corrigé 199 (Le rang est localement croissant)

Corrigé 200 (Fonction anti-stable (Centrale PSI 10))

Corrigé 201 (Distance entre deux compacts)

Corrigé 202 (Parties réversibles)

Corrigé 203 (Théorème de Carathéodory (X MP 10))

5. Connexité par arcs

Corrigé 204 (Opérations ensemblistes et connexité par arcs)

Corrigé 205 (Opérations topologiques et connexité par arcs)

Corrigé 206 (Connexité par arcs de la sphère unité (ou pas))

Corrigé 207 (Le cercle unité n'est pas homéomorphe à un segment (X PC 10))

Corrigé 208 (Connexité par arcs (ou pas) du complémentaire d'un hyperplan)

CHAPITRE 19

Oraux 5 : espaces-vectoriels normés (énoncés)

Aller aux corrigés 20

Exercice 209

(TPE) Soit (E, N) un espace normé. Montrer que le seul sous-espace de E d'intérieur non vide est E.

Exercice 210

1 Montrer que l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2 Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors 0 est adhérent à la classe de similitude de M si et seulement si M est nilpotente.

Exercice 211

(CCP) On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme N définie par : $N\left((a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right) = \max\{|a_{i,j}|,\ 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$.
Vérifier que si A et B sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $N(AB) \leqslant nN(A)N(B)$. En déduire la convergence de $\sum \frac{A^k}{k!}$.

Exercice 212

(ENS MP 10) Soit $d \in \mathbb{N}$. On pose $V = \mathbb{R}_d[X]$ et on considère une suite (P_n) d'éléments de V. Établir l'équivalence des conditions suivantes.
1 (P_n) converge dans V.
2 (P_n) converge simplement sur $[0, 1]$.
3 (P_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 213

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Si $f \in E$, on pose : $N(f) = \int_0^1 e^t\,|f(t)|\mathrm{d}t$.
1 Montrer que N définit une norme. Comparer N et $\|\ \|_\infty$.
2 Trouver le meilleur $\beta > 0$ tel que : $\forall f \in E,\ N(f) \leqslant \beta\|f\|_\infty$.

Exercice 214

On pose $\mathcal{A} = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

1 Soit $f \in \mathcal{A}$ non constante. Montrer que la famille $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.

2 Quelles sont les sous-algèbres de dimension finie de $\mathcal{A}$?

3 Pour $c \in [a,b]$, on note $\mathcal{I}_c$ l'ensemble des $f \in \mathcal{A}$ telles que $f(c) = 0$. Montrer que $\mathcal{I}_c$ est un idéal de $\mathcal{A}$.
On dit d'un idéal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$ qu'il est *maximal* si $\mathcal{I}$ est un élément maximal au sens de l'inclusion parmi les idéaux de $\mathcal{A}$ distincts de $\mathcal{A}$.

4 Montrer que les idéaux maximaux de $\mathcal{A}$ sont les $\mathcal{I}_c$, où c parcourt $[a,b]$.

Exercice 215

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie et $u \in E^{\mathbb{N}}$.

1 On suppose que u est bornée, que $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0, que u n'a qu'un nombre fini de valeurs d'adhérence : montrer qu'alors u converge.

2 On suppose $E = \mathbb{R}$ et $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de u est un intervalle.

Exercice 216

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et F un fermé de $\mathbb{C}$. Montrer que $P(F)$ est un fermé de $\mathbb{C}$.

Exercice 217

Soit E un espace normé, x et x' dans E, r et r' dans $\mathbb{R}_+$, B (resp. B') la boule fermée de centre x (resp. x') et de rayon r (resp. r'). Caractériser à l'aide de x, x', r, r' l'inclusion $B \subset B'$.

Exercice 218

Soit E un evn de dimension finie, C une partie de E convexe et dense dans E. Montrer que $C = E$.

Exercice 219

Soit A une partie convexe fermée de $\mathbb{R}^2$ ne contenant pas 0. Montrer qu'il existe une droite vectorielle disjointe de A.

Exercice 220

Soit K un compact non vide de $\mathbb{R}^2$. On suppose que le projeté orthogonal de l'origine sur n'importe quelle droite coupant K est dans K. Montrer que K est un disque.

Exercice 221

Dans un espace vectoriel normé E de dimension finie, on considère deux parties convexes non vides A et B, respectivement fermée et compacte, telles que $A \cap B = \emptyset$. Montrer qu'il existe un réel α et une forme linéaire f sur E telle que

$$\forall (x,y) \in A \times B, \quad f(x) < \alpha < f(y).$$

Exercice 222

Soit E et F deux espaces vectoriels normés, et $f\ : E \to F$ une application bijective telle que $f(0) = 0$ et $\forall (x,y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.

1 Montrer que f est linéaire si et seulement si $\forall (x,y) \in E^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

2 Montrer que f est linéaire.

Exercice 223

Soit C un compact de $\mathbb{R}^n$ d'intérieur non vide. On note L l'ensemble des éléments f de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tels que $f(C) = C$.

1 Montrer que $L \subset \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$.

2 On suppose L infini. Montrer que l'on peut trouver une suite injective d'éléments de L qui converge vers I_n.

3 On suppose L infini et $n = 2$. Montrer l'existence de $f \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$ tel que $f(C)$ soit invariant par toutes les rotations de centre 0.

Exercice 224

Soit $((a_i, b_i)) \in (]0,1]^2)^{\mathbb{N}}$ tel que

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i b_i = +\infty$$

Montrer que tout compact peut être recouvert par des translatés des pavés $[0, a_i] \times [0, b_i]$.

Exercice 225

On munit $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}),\ f(1) = 0\}$ de la norme donnée par : $\|f\| = \sup\limits_{[0,1]} |f'|$.

Soit $\Phi : f \in E \mapsto \int_0^1 f$. Montrer que Φ est continue et calculer $\|\Phi\|$.

CHAPITRE 20

Oraux 5 : espaces-vectoriels normés (corrigés)

Aller aux énoncés 19

Corrigé 214 (Idéaux maximaux de $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ (Centrale MP 06))

1 Soit $\sum_{k=0}^{N} \lambda_k f^k$ une combinaison linéaire à résultat nul de $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$. f étant continue et non constante, son image est infinie, donc $\sum_{k=0}^{N} \lambda_k X^k$ a une infinité de racines : ce polynôme est nul, ainsi que ses coefficients $\lambda_0, \dot{;}\lambda_N$: $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.

2 D'après la question précédente, la seule sous-algèbre unitaire de dimension finie de $\mathcal{C}(A)$ est celle constituée des fonctions constantes. Si on admet une sous-algèbre non unitaire, il faut rajouter $\{0\}$.

3 $\mathcal{I}_c$ est un sous-groupe de $\mathcal{A}$, stable par multiplication par un élément quelconque de $\mathcal{A}$: c'est un idéal de $\mathcal{A}$.

4 Un idéal de la forme $\mathcal{I}_c$ est bien maximal : en effet, si $\mathcal{I}$ est un idéal de $\mathcal{A}$ contenant strictement $\mathcal{I}_c$, alors il contient une certaine fonction f non nulle en c. Il contient également $g\ : x \mapsto |x-c|$. Il contient donc f^2+g^2, qui ne s'annule pas sur $[a,b]$, et qui est donc inversible : il comprend donc enfin $1_{\mathcal{A}}$, et vaut donc $\mathcal{A}$.

Réciproquement, soit $\mathcal{I}$ un idéal maximal de $\mathcal{A}$. Supposons qu'il ne soit pas de la forme précédente : en particulier, on peut trouver $f \in \mathcal{I}$, non nulle en a. On introduit :

$$\Omega = \{c \in]a,b], \exists g \in \mathcal{I}, g_{|[a,c]} \text{ ne s'annule pas}\}.$$

Ω est une partie non vide de $]a,b]$ (on a écarté le cas sans intérêt où $a=b$). Notons c sa borne supérieure, et supposons $c<b$: par hypothèse, on peut trouver $h \in \mathcal{I}$ tel que $h(c) \neq 0$. De plus, il existe $\varepsilon > 0$ tel que h ne s'annule pas sur $[c-\varepsilon, c+\varepsilon] \subset]a,b[$. Enfin, puisque $c-\varepsilon \in \Omega$ il existe $g \in \mathcal{I}$, ne s'annulant pas sur $[a, c-\varepsilon]$. La considération de g^2+h^2 conduit à une absurdité sur la définition de c. On a nécessairement $c=b$, $\mathcal{I}$ contient un élément inversible, et vaut donc $\mathcal{A}$, ce qui est absurde.

Remarque : la notion de *compacité* simplifiera la dernière partie de cette solution.

Corrigé 217 (Inclusion d'une boule fermée dans une autre (Centrale MP 10))

Corrigé 218 (Partie convexe dense (X MP 10))

Il suffit de montrer que $0_E \in C$ (pour un autre vecteur v, on applique ce qui précède à $C+v$).

On peut trouver une base $(u_1, \dots, u_n)$ d'éléments de E. On prend un vecteur u_{n+1} de E dont toutes les composantes dans cette base sont négatives. Le vecteur nul est combinaison linéaire de ces $n+1$ vecteurs, à coefficients positifs, donc 0_E appartient à l'enveloppe convexe de $\{u_1, \dots, u_{n+1}\}$.

Corrigé 219 (Un cas particulier de Hahn-Banach (X MP 10))

Corrigé 220 (Condition suffisante tordue pour être un disque (ENS MP 10))

Corrigé 221 (Encore une version d'Hahn-Banach (ENS MP 10))

Corrigé 222 (Toute isométrie est affine (ENS MP 10))

Corrigé 223 (Endomorphismes conservant un compact dans $\mathbb{R}^n$)

Corrigé 224 (Recouvrement d'un compact par des pavés (X MP 12))

Il suffit de le montrer pour le pavé $[0, A] \times [0, B]$, où A, B sont des réels strictement positifs fixés.

Quitte à réordonner, on peut supposer (b_i) décroissante.

Comme $b_i \leqslant 1$,

$$\sum a_i \geqslant \sum a_i b_i = +\infty.$$

On partitionne $\mathbb{N}$ par paquets d'indices consécutifs minimaux $[\![i_n, i_{n+1}-1]\!]$ tels que

$$A \leqslant \sum_{i=i_n}^{i_{n+1}-1} a_i$$

On note que par minimalité de i_{n+1}, et puisque $a_{i_{n+1}-1} \leqslant 1$,

$$(*) \qquad \sum_{i=i_n}^{i_{n+1}-1} a_i < A+1$$

Pour n fixé, les pavés d'indices i_n à $i_{n+1}-1$ permettent donc de recouvrir $[0, A] \times [0, b_{i_{n+1}}]$ (par décroissance de (b_i)), en les posant sur l'axe des abscisses tout en les accolant.

Or, toujours par décroissance de (b_i), et d'après $(*)$

$$\sum_{i=i_n}^{i_{n+1}-1} a_i b_i \leqslant (A+1) b_{i_n}$$

donc $\sum_n b_{i_n} = +\infty$, puisque

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i b_i = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=i_n}^{i_{n+1}-1} a_k b_k$$

On peut donc recouvrir $[0, A] \times [0, B]$.

Corrigé 225 (Exemple de norme subordonnée)

CHAPITRE 21

TD 6 : intégrabilité (énoncés)

Aller aux corrigés 22

1. Intégration sur un segment

Exercice 226

1 Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$, d'intégrale nulle sur $[a,b]$. Montrer que f s'annule sur $]a,b[$.
2 Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $a \in]0,1[$ tel que $f(a) = a$.
3 Soit f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \int_0^1 f(u)u^k du = 0.$$

Montrer que f admet au moins $n+1$ zéros distincts dans $]0,1[$.
4 *(X PC 09)* Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,\pi],\mathbb{R})$. On suppose que : $\int_0^\pi f(t)\cos(t)\mathrm{d}t = \int_0^\pi f(t)\sin(t)\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f s'annule au moins deux fois sur $[0,\pi]$.
5 *(Cachan 07)* Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et de moyenne nulle. Montrer que $f+f''$ s'annule quatre fois au moins sur $[0,2\pi[$.

Exercice 227

1 Soit $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$, continues et positives, telles que $fg \geqslant 1$. Montrer

$$\left(\int_{[0,1]} f\right)\left(\int_{[0,1]} g\right) \geqslant 1.$$

2 *(X MP 05)* Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_{[0,1]} f = 0$, m le minimum de f et M son maximum. Prouver $\int_{[0,1]} f^2 \leqslant -mM$.
3 *(X MP 05)* Soit f et g deux fonctions croissantes et continues sur $[0,1]$. Comparer $\int_{[0,1]} fg$ et $(\int_{[0,1]} f)(\int_{[0,1]} g)$.

Exercice 228

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}_+^*)$ et $\Phi\ : f \in E \mapsto \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{f(t)} \times \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$. Déterminer $\inf\Phi$ et $\sup\Phi$.

Exercice 229

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux telle que f soit de limite $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$. Montrer que $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ tend vers l lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 230

1 On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $f : x \mapsto \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t$. Calculer la limite de f en 0, en $+\infty$.
2 Étudier en 1 la fonction $x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$.

2. Intégrabilité

Exercice 231

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.
1 On se limite ici au cas où α est réel. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que $\int_{\mathbb{R}_+} e^{\alpha t}\mathrm{d}t$ converge.
2 On revient au cas général.
a Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que $\int_{\mathbb{R}_+} e^{\alpha t}\mathrm{d}t$ converge.
b Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que $\int_{\mathbb{R}_+} e^{\alpha t}\mathrm{d}t$ converge absolument.

Exercice 232

1 Existence et calcul de $\int_0^1 \left(\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.
Indication : pour le calcul, on peut effectuer au choix les changements définis par $u = \sqrt{1+x^2}$ ou $x = \mathrm{sh}(u)$.
2 Existence et calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\ln(\tan(x))\mathrm{d}x$.
3 Existence et calcul de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\sin(x))^3}{x^2}\mathrm{d}x.$$

Exercice 233

Déterminer $\lim\limits_{n\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$.

Exercice 234

Prouver que si les intégrales $\int_a^{+\infty}(f(x))^2\mathrm{d}x$ et $\int_a^{+\infty}(f''(x))^2\mathrm{d}x$ convergent, alors $\int_a^{+\infty}(f'(x))^2\mathrm{d}x$ converge également.

Exercice 235

1 Existence et calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin(x)\cos(x)}{\tan(x)^2+\text{cotan}(x)^2}\mathrm{d}x$.
Indication : pour le calcul, dans le cas où les trois règles de Bioche s'appliquent, on peut effectuer le changement de variable $u = \cos(2x)$.
2 Existence et calcul éventuel de l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,\ln(x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x.$$

Indication : pour le calcul, astucieux, on pourra commencer par utiliser une intégration par parties, en dérivant la fonction $x \mapsto \sqrt{x}\,\ln(x)$.
3
a Existence et calcul de $I_n(x) = \int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)-\cos(nx)}{\cos(t)-\cos(x)}\mathrm{d}t$, où $(n,x) \in \mathbb{N}\times]0,\pi[$.
Indication : pour le calcul, on pourra trouver une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 pour la suite $(I_n(x))$, en exprimant $I_n(x) + I_{n+2}(x)$ en fonction de $I_{n+1}(x)$.
b Nature de la série $\sum x^n I_n(x)$.
4 Convergence de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)\cos(x^2)}{x}\mathrm{d}x$.
5 Même question pour $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\sin(x+1/x^2)\cos(x^2+\frac{1}{x})\mathrm{d}x$.

Exercice 236

Soit f une fonction positive et continue sur $\mathbb{R}_+$ telle que

$$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x < +\infty.$$

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\int_0^n xf(x)\mathrm{d}x = 0$.

Exercice 237

1 *(X MP 08)* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-x^2}{1-x^2+x^4}\mathrm{d}x$.
2 *(X MP 08)* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $(a,b\in\mathbb{R}_+^*)$.
3 *(X MP 08)* $\int_a^b \sqrt{(b-x)(x-a)}\mathrm{d}x$.
4 *(X MP 08)* $\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\sin t}\mathrm{d}t$.

Exercice 238

1 Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[x,+\infty[$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\mathrm{d}t$.
2 Établir : $f(x) \sim_0 -\ln(x)$ et $f(x) = \frac{\cos(x)}{x^2} + \mathrm{O}_{+\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right)$.
3 Montrer que $\int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ converge et calculer sa valeur.

CHAPITRE 22

TD 6 : intégrabilité (corrigés)

Aller aux énoncés 21

1. Intégration sur un segment

Corrigé 226 (Annulation de fonction et intégrales)

1 On peut appliquer le théorème de Rolle à une primitive de $[a, b]$, ou raisonner par l'absurde.

2 Considérer $g\ : x \mapsto f(x) - x$.

3 Raisonner par l'absurde, et utiliser un polynôme qui change de signe en même temps que f.

4 Comme à la question précédente, raisonner par l'absurde, utiliser la linéarité de l'intégrale et des combinaisons linéaires de cos et sin.

5 Posons $g = f + f''$. g est de moyenne nulle, et on peut vérifier que $\int_{[0,2\pi]} g\cos = \int_{[0,2\pi]} g\sin = 0$. Utiliser la même technique que précédemment.

Corrigé 227 (Inégalités intégrales)

1 Inégalité de Cauchy-Schwarz (comme le produit d'intégrales et la condition sur le produit nous y invitent).

2 On sait que f est de moyenne nulle, que $(f - m)$ et $(M - f)$ sont positives, et on veut faire apparaître f^2 et mM.

3 Pour avoir une idée de la réponse à donner, on peut évaluer ces quantités pour des fonctions particulières.

Pour établir l'inégalité, on pourra au choix :

- Utiliser le fait que $\int_{[0,1]} fg - \int_{[0,1]} f \int_{[0,1]} g$ est inchangé si on remplace f par $f - m$ et g par $g - M$, où m et M sont deux réels.
- Introduire de la variabilité en extrapolant l'inégalité à des fonctions définies sur $[0, x]$, puis à exploiter cette variabilité en faisant l'étude d'une fonction.

Remarque : on pouvait aussi montrer ce résultat à l'aide d'une intégrale double, mais ce n'est plus au programme.

Corrigé 228 (Extremums d'une fonction définie par des intégrales *(CCP 09)*)

Pour trouver $\sup\Phi$, on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz (et son cas d'égalité).

Pour trouver $\inf\Phi$, on pourra se demander comment rendre $\int [0, 1]f$ « grand » sans que $\int_{[0,1]} \frac{1}{f}$ soit « petit ».

Corrigé 229 (Cesàro intégral)

En Sup : imiter la preuve de Cesàro pour les suites.

En Spé : utiliser l'intégration des relations de comparaison.

Corrigé 230 (Fonctions définies par une intégrale)

1 En 0 : une mauvaise preuve consiste à dire que $\frac{\cos(t)}{t} \sim_0 \frac{1}{t}$, donc que $\int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t \sim_0 \int_x^{3x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(3)$, et donc que $\ln(3)$ est la limite de f en 0.

La question est de savoir comment rendre cette idée rigoureuse.

En $+\infty$: on ne va pas se contenter de la majoration $\frac{|cos(t)|}{t} \leqslant \frac{1}{t}$. Pour être plus fin, on pourra s'inspirer de la preuve de convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t$, voire utiliser cette convergence.

2 Similaire à l'étude en 0 de la première question.

2. Intégrabilité

Corrigé 231 (Intégrabilité des fonctions exponentielles)

1 Une condition nécessaire et suffisante est évidemment $\alpha < 0$.

2

a Une condition nécessaire et suffisante est $\Re(\alpha) < 0$.

b Une condition nécessaire et suffisante est $\Re(\alpha) < 0$.

Corrigé 232 (Calculs pas trop compliqués d'intégrales généralisées)

1 Pas de problème réel en 0, et en faisant par exemple $x = \mathrm{sh}(t)$, on obtient $\ln(2) - \ln(\sqrt{2}+1)$.

2 En 0, $\cos(x)\ln(\tan(x)) \sim \ln(x)$. En $\frac{\pi}{2}$, pas de réel problème. On peut effecter $t = \sin(x)$ ou intégrer par parties. On trouve $-\ln(2)$.

3 On part de $(\sin(x))^3 = (3\sin(x) - \sin(3x))/4$. Pour tout $a > 0$:

$$\int_a^{+\infty} \frac{(\sin(x))^3}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\int_a^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int_{3a}^{+\infty} \frac{3\sin(u)}{u^2}\mathrm{d}u = \frac{3}{4}\int_a^{3a} \frac{\sin(x)}{x^2}\mathrm{d}x.$$

On écrit :

$$\int_a^{3a} \frac{\sin(x)}{x^2}\mathrm{d}x = \int_a^{3a} \frac{\sin(x) - x}{x^2}\mathrm{d}x + \int_a^{3a} \frac{1}{x}\mathrm{d}x.$$

On trouve donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\sin(x))^3}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\ln(3).$$

Corrigé 233 (Sommes de Riemann pour des intégrales généralisées)

On écrit le terme général comme une somme de Riemann, puis on s'inspire du principe de comparaison série-intégrale. La limite vaut $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} = \pi$.

Corrigé 234 (Normes euclidiennes de f, f' et f'')

Il est tentant d'effectuer une intégration par parties pour $\int (f')^2$, en dérivant l'un des f' et en intégrant l'autre. On fait tout ceci sur un segment $[a, b]$ (où $b \geqslant a$) puisqu'on ne sait pas encore si les expressions engagées sont bien définies :

$$\int_a^b (f'(x))^2\mathrm{d}x = [f'(x)f(x)]_{x=a}^b - \int_a^b f(x)f''(x)\mathrm{d}x$$

L'intégrale $\int_{[a,+\infty[} ff''$ est convergente, grâce à l'intégrabilité de f^2 et de $(f'')^2$.

Il reste à justifier la convergence du crochet, *i.e.* que ff' admet une limite finie en $+\infty$.

Peut-on déjà montrer que ce crochet admet une limite ? Oui, en considérant justement la relation ci-dessus, et en observant que $(f')^2$ est positive.

Cette limite existant, il reste à expliquer pourquoi elle n'est pas infinie. Pour ce faire, on peut utiliser l'intégrabilité de f^2 et le fait que $(f^2)' = 2f'f$.
Remarque : on peut même montrer plus finement que ff' tend vers 0 en $+\infty$.

Corrigé 235 (Calculs d'intégrales généralisées plus délicates)

1

2 Intégrer par parties en dérivant la fonction $x \mapsto \sqrt{x}\,\ln(x)$:

$$I = \left[-\frac{\sqrt{x}\,\ln(x)}{1+x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2+\ln(x)}{2\sqrt{x}\,(1+x)}\mathrm{d}x.$$

Le changement de variable $t = 1/x$ donne

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{2+\ln(x)}{2\sqrt{x}\,(1+x)}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{2-\ln(t)}{2\sqrt{t}\,(1+t)}\mathrm{d}t.$$

Ainsi, $I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\,(1+x)} = \pi$.

3 Pas de problème réel en x. On calcule $I_n + I_{n+2} = 2\cos(x)I_{n+1}$. En résolvant cette récurrence linéaire, on trouve $I_n = \pi\sin(nx)/\sin(x)$.

4 Pas de problème en 0, effectuer une intégration par parties pour prouver l'intégrabilité en $+\infty$. En linéarisant $\sin(x)\cos(x^2) = (\sin(x+x^2) + \sin(x-x^2))/2$, on peut prouver que cette intégrale est semi-convergente.

Corrigé 236 (Limite d'une suite définie par des intégrales)

Notons F la primitive de f nulle en 0.

Par hypothèse, F est croissante, et de limite finie en $+\infty$, que nous appellerons l. On a donc

$$\frac{1}{n}\int_0^n xf(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\left[xF(x)\right]_0^n - \frac{1}{n}\int_0^n F(x)\mathrm{d}x$$

Le crochet vaut $F(n)$, et tend donc vers l lorsque n tend vers l'infini.

Pour l'intégrale, on pourra utiliser l'intégration des relations de comparaison (en écrivant $F(x) = l + \mathrm{o}_{x\to+\infty}(1)$).

Corrigé 237 (D'autres calculs d'intégrales)

1 La fonction $f\ : x \mapsto \frac{1-x^2}{1-x^2+x^4}\mathrm{d}x$ est continue et définie sur $\mathbb{R}$, paire et $f(x) = \mathrm{O}_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$, donc l'intégrale est bien convergente.

Par parité, $I = 2J$, où $J = \int_0^{\infty} \frac{1-x^2}{1-x^2+x^4}\mathrm{d}x$. En faisant le changement de variable $u = \frac{1}{x}$ dans J, on trouve que $J = 0$: $I = 0$.

2 Si $a \neq b$, on écrit

$$\frac{1}{(X^2+a^2)(X^2+b^2)} = \frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{1}{X^2+b^2} - \frac{1}{X^2+a^2}\right)$$

Comme les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x^2+a^2}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2+a^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ sont intégrables (classique), on a

$$I = \frac{1}{a^2-b^2}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2+b^2}\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x\right)$$

Ainsi,

$$I = \frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{\pi}{b} - \frac{\pi}{a}\right) = \frac{\pi}{ab(a+b)}$$

Reste à traiter le cas où $a = b$. On peut le faire à la main, mais c'est technique et assez compliqué. On a plutôt envie d'utiliser la question précédente en prenant $a = b$. L'idée, pour

justifier ce passage à la limite, est d'utiliser un argument de continuité : avec des notations évidentes, on montre que pour a fixé, $I_{a,b}$ tend vers $I_{a,a}$ lorsque a tend vers b. Pour ce faire, on peut majorer $|I_{a,b} - I_{a,a}|$.
Remarque : la dernière étape se justifie très facilement à l'aide du théorème de convergence dominée et ses conséquences. Si le résultat n'est pas connu, vous pouvez substituer à ce résultat de cours de la technique.

Corrigé 238 (Calcul surprenant d'intégrale généralisée)

Pour l'étude en $+\infty$, faire une double intégration par parties. Pour le calcul de la dernière intégrale, faire une primitivation par parties.

CHAPITRE 23

Oraux 6 : intégrabilité (énoncés)

Aller aux corrigés 24

Exercice 239

(CCP) Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+x^2} \mathrm{d}t$.

1 Déterminer le domaine de définition de f.

2 Calculer $f(1)$.

3 Calculer $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

Indication : Effectuer un changement de variable.

Exercice 240

(CCP) Étudier l'intégrabilité sur $]0, +\infty[$ de $t \mapsto \frac{e^{at}-e^{bt}}{t}$ selon les valeurs (réelles) de a et b .

Exercice 241

(Mines MP 10) Montrer que $f \ : x \mapsto \cos(x^2)$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$ mais que $\int_0^x f$ a une limite lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 242

(TPE)

1 Établir la convergence et donner la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(2x)-\sin x}{x} \mathrm{d}x$.

2 La fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$?

Exercice 243

1 (CCP) Convergence et calcul de $I_n = \int_0^{+\infty} t\, e^{-nt} \mathrm{d}t$.

2 Convergence et calcul de $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{1-e^{-\sqrt{t}}} \mathrm{d}t$.

3 (Centrale MP 10) Existence et calcul de $I = \int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} \mathrm{d}x$.

Exercice 244

(TPE) Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}^+)$ telle que $\int_a^b f = 1$. Comparer $\left(\int_a^b t f(t)\mathrm{d}t\right)^2$ et $\int_a^b t^2 f(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 245

(CCP)

1 Étudier la continuité par morceaux de $f : x \mapsto x\,E(1/x)$ sur $]0,1]$ et sur $[0,1]$.

2 Montrer l'existence et calculer $I = \int_0^1 x\,E(1/x)\mathrm{d}x$.

Exercice 246

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ telle que $f + f'$ soit de carré intégrable. Montrer que f est bornée, puis que f tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 247

(X MP 10) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que f et f'^2 soient intégrables sur $\mathbb{R}$. Montrer que f tend vers 0 en $\pm\infty$.

CHAPITRE 24

Oraux 6 : intégrabilité (corrigés)

Aller aux énoncés 23

Corrigé 239 (Fonction définie par une intégrale sur $\mathbb{R}_+$)

1 Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $g_x \ : t \mapsto \frac{\ln t}{t^2+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et $g_x(t) = \mathrm{O}_{t \to +\infty}\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$, d'où l'intégrabilité de g_x sur $[1, +\infty[$.

Reste à étudier le problème en 0 : si $x \neq 0$, $g_x(t) \sim_{x \to 0} \frac{\ln(t)}{x^2}$, or $t \mapsto \frac{\ln(t)}{x^2}$ est intégrable sur $]0, 1]$, donc g_x l'est également.

En revanche, si $x = 0$, $\frac{1}{t^2} = \mathrm{O}_{t \to 0}(g_0(t))$, g_0 est de signe constant sur $]0, 1]$, et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$, donc g_0 ne l'est pas.

Pour conclure, f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

2 On effectue le changement de variable $u = \frac{1}{t}$ dans l'expression de $f(1)$:

$$f(1) = \int_{t=0}^{t=+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1}\mathrm{d}t = \int_{u=+\infty}^{u=0} \frac{-\ln(u)}{(1/u)^2+1}\frac{-\mathrm{d}u}{u^2} = -f(1),$$

donc $f(1) = 0$.

3 Pour le calcul général de $f(x)$, il est tentant de se ramener au calcul précédent *via* le changement de variable $u = xt$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{t=0}^{t=+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1}\mathrm{d}t \\ &= \int_{u=0}^{\infty} \frac{\ln(u/x)}{x^2(1+u^2)}\frac{\mathrm{d}u}{x} \\ &= \frac{1}{x^3}\left(f(1) - \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+u^2}\mathrm{d}u\right) \\ &= \frac{-\pi\ln(x)}{2x^3} \end{aligned}$$

Corrigé 240 (Intégrabilité d'une fonction selon la valeur de paramètres)

La fonction intégrée f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on s'intéresse donc au comportement aux bornes. Un développement limité montre que f se prolonge par continuité en 0 : $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ est faussement impropre.

En $+\infty$, $f(t) = \mathrm{o}_{t \to +\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ si a et b sont négatifs ou si $a = b$.

Si a ou b est strictement positif, et si $a \neq b$, f tend vers $\pm\infty$ en $+\infty$, et n'est donc pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

Corrigé 241 (Une intégrale semi-convergente)

La démarche est similaire à celle effectuée pour l'intégrale de Dirichlet.

Pour montrer la convergence de $\int_{\mathbb{R}_+} f(t)\mathrm{d}t$, on pourra effectuer un changement de variable $u = x^2$, puis faire une IPP, mais on peut aussi faire directement une IPP en écrivant $f(t) = \frac{1}{t}tf(t)$.

Pour la non intégrabilité, on s'inspirera de la preuve de non intégrabilité de $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Corrigé 242 (Intégrabilité du sinus cardinal)

1 Le seul problème est en $+\infty$. Pour montrer la convergence, on pourrait s'inspirer du travail effectué pour l'intégrale de Dirichlet, mais comme on demande ici la valeur de l'intégrale, on peut aussi étudier $\int_0^X \frac{\sin(2x)-\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

2

Corrigé 243 (Convergence et calcul)

Corrigé 244 (Comparaison d'intégrales)

Corrigé 245 (Existence et calcul d'une intégrale)

Corrigé 246 (Lorsque $f + f'$ est de carré intégrable (X MP 10))

Corrigé 247 (Condition suffisante pour qu'une fonction soit de limite nulle en $+\infty$)

CHAPITRE 25

TD 7 : groupes (énoncés)

Aller aux corrigés 26

1. Généralités sur les groupes

Exercice 248

Montrer que $\mathbb{C}^*$ (multiplicatif) et $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U}$ sont isomorphes.

Exercice 249

Soit $G =]-1,1[$, $\star$ définie par $x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$. Montrer que $(G, \star)$ est un groupe abélien.

Exercice 250

Soit G un groupe multiplicatif et H une partie finie de G non vide, stable par multiplication. Montrer que H est un sous-groupe de G.

Exercice 251

On appelle *monoïde* un ensemble muni d'une loi de composition interne associative, admettant un élément neutre pour cette loi. Montrer qu'un monoïde fini et régulier (*i.e.* tout élément est simplifiable à gauche et à droite) est un groupe.

Exercice 252

Soit G un groupe.

1 Montrer l'équivalence des conditions suivantes :

(1) G est abélien.

(2) L'application carré de G dans G est un endomorphisme de G.

(3) L'application inverse de G dans G est un automorphisme de G.

2 Généralisation : montrer que s'il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que $g \mapsto g^i$, $g \mapsto g^{i+1}$ et $g \mapsto g^{i+2}$ soient des morphismes de groupes, alors G est abélien.

3 Donner un groupe non abélien tel que $g \mapsto g^3$ soit un endomorphisme.

4 On suppose que $g^2 = 1$ pour tout $g \in G$. Montrer que G est abélien.

Exercice 253

Soit G un groupe, et a un élément de G.

1 Montrer que les applications $\alpha_a : g \mapsto ag$ et $\beta_a : g \mapsto ga$ – appelées respectivement applications de *multiplication (ou de translation) à gauche et à droite par* a – sont des permutations de G.

2 Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une telle application soit un endomorphisme de G.

3 Montrer que l'application $\phi : a \mapsto \alpha_a$ est un morphisme injectif de G vers $\mathcal{S}_G$. En déduire que tout groupe est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe de permutations (théorème de Cayley).

4 Prolongement : montrer que tout groupe fini est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe linéaire (et même que l'on peut choisir le corps des scalaires librement).

Exercice 254

Soit G un groupe multiplicatif, E un ensemble et $\phi : G \to E$ une bijection. On définit une opération $*$ sur E par :

$$\forall\, x, y \in E, x * y = \phi\left(\phi^{-1}(x)\phi^{-1}(y)\right)$$

Montrer que $*$ confère à E une structure de groupe, et que les groupes G et E sont isomorphes.

Exercice 255

(Centrale MP 07) Soit G un groupe. On note $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de G.

1 Montrer que $\mathrm{Aut}(G)$ est un groupe pour la loi $\circ$.

2 Déterminer $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$.

3 Pour $a \in G$ on note ϕ_a l'application de G dans G telle que $\phi_a(x) = axa^{-1}$, pour tout élément x de G : ϕ_a est appelée *conjugaison par* a (dans G). Montrer que ϕ_a est un automorphisme de G, (on dit que ϕ_a est un automorphisme *intérieur*).

4 Montrer que l'application $\psi : a \mapsto \phi_a$ est un morphisme de groupes. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ce morphisme soit injectif. Donner un exemple où il n'est pas surjectif.

Exercice 256

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^*$ peuvent-ils être mis en bijection ? Sont-ils isomorphes ?

Exercice 257

Soit E un ensemble non vide. Déterminer les éléments de E^E réguliers à gauche (resp. à droite), pour la composition.

Exercice 258

1 Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne associative, admettant un élément neutre à gauche et tel que chaque élément de G admette un symétrique à gauche. Montrer que G est un groupe.

2 Soit G un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne associative $\cdot$ telle que :

$$\forall\, a, b \in G,\ \exists x, y \in G\ :\ a = x \cdot b = b \cdot y \quad (\star)$$

Montrer que $(G, \cdot)$ est un groupe.

3 Soit G un ensemble fini non vide muni d'une loi de composition interne $\cdot$ associative pour laquelle tout élément est régulier à droite et à gauche. Montrer que G est un groupe.

2. Ordre d'un élément d'un groupe

Exercice 259

1 Soit G et G' deux groupes et f un morphisme de G dans G'. Pour $a \in G$, comparer l'ordre de a et celui de $f(a)$.

2 Soit $a, b \in G$. Comparer les ordres de a et de bab^{-1}.

3 Soit $a, b \in G$. Comparer les ordres de ab et de ba.

Exercice 260

Déterminer tous les sous-groupes finis de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Exercice 261

Donner un groupe infini dont tout élément est d'ordre fini.

Exercice 262

Soit G un groupe fini de cardinal pair. Montrer l'existence d'un élément x de G, distinct de l'élément neutre e, tel que $x^2 = e$.

Exercice 263

Montrer qu'un groupe G est fini si et seulement si il n'a qu'un nombre fini de sous-groupes.

Exercice 264

Soit G un groupe fini de cardinal impair. Montrer que :
$$\forall x \in G,\ \exists! y \in G \text{ tel que } x = y^2.$$

Exercice 265

Montrer que les sous-groupes de type fini de $(\mathbb{Q}, +)$ sont monogènes.

Exercice 266

Soit G un groupe fini, et H un sous-groupe de G. On considère l'ensemble Ω des *translatés à gauche* de H par un élément de g :
$$\Omega = \{gH,\ g \in G\}$$
(pour $g \in G$ fixé, gH désigne l'ensemble $\{gh,\ h \in H\}$).

1 Montrer que la réunion des éléments de Ω est G.

2 Montrer que chaque élément de Ω est de même cardinal que H.

3 Montrer que deux éléments distincts de Ω sont disjoints.

4 En déduire que l'ordre de H divise celui de G : c'est le théorème de Lagrange.

Exercice 267

Que dire d'un groupe fini n'ayant que deux classes de conjugaison ?

Exercice 268

Que dire d'un groupe sur lequel le groupe des automorphismes agit en créant deux orbites ?

3. Groupe symétrique

Exercice 269

Le groupe des permutations de $\{1, 2, 3\}$ est-il cyclique ? Et ses sous-groupes stricts ?

Exercice 270

Soient t la transposition $(1, 2)$ et c le cycle $(1, \ldots, n)$. Calculer c^k et $c^{-k} \circ t \circ c^k$. En déduire que c et t engendrent $\mathcal{S}_n$.

Exercice 271

Quel est le nombre minimum de transpositions qui engendrent le groupe $\mathfrak{S}_n$?

CHAPITRE 26

TD 7 : groupes (corrigés)

Aller aux énoncés 25

1. Généralités sur les groupes

Corrigé 248 (Un isomorphisme de groupes)

De $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U}$ vers $\mathbb{C}^*$, il est naturel de considérer

$$\varphi \ : (r, u) \mapsto ru$$

qui est une application bien définie, surjective. C'est aussi un morphisme, essentiellement par associativité et commutativité de la multiplication dans $\mathbb{C}^*$.

Enfin, si $(r, u) \in \ker(\varphi)$, *i.e.* $ru = 1$, alors en égalant les modules, il vient $r = |r| = |ru| = 1$, puis $u = 1$ (car $r = 1$ et $ru = 1$) : φ est injective.

Remarque : tester l'injectivité en revenant à la définition montre un manque de recul.

Remarque : on peut donner la bijection réciproque de φ : c'est $z \mapsto \left(|z|, \frac{z}{|z|}\right)$.

Corrigé 249 (L'addition des vitesses relativistes)

Montrons déjà que $\star$ définit bien une loi de composition interne sur G. Soit $x, y \in]-1, 1[$.

On a $|x| < 1$, $|y| < 1$ et donc également $|xy| < 1$. Ceci prouve que$x \star y$ est bien défini, et, de plus, que

$$\frac{x+y}{1+xy} + 1 = \frac{1+x+y+xy}{1+xy} = \frac{(1+x)(1+y)}{1+xy} > 0$$

Ainsi, $x \star y > -1$, et un calcul similaire montre que $x \star y < 1$.

Il est clair que $\star$ est commutative (par commutativité de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$), que 0 est neutre pour $\star$ dans G, que $-x$ est symétrique de $x \in G$ dans G pour $\star$.

Reste à vérifier l'associativité : soit $x, y, z \in G$. On a

$$(x \star y) \star z = \frac{x+y}{1+xy} \star z = \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + z\,\frac{x+y}{1+xy}} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz},$$

et un calcul similaire conduit à

$$x \star (y \star z) = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz},$$

d'où l'associativité.

Remarque : les vérifications ne sont pas difficiles, mais dans cet exercice, on ne voit pas G comme sous-groupe d'un groupe bien connu, ce qui est plutôt rare.

Corrigé 250 (Partie finie stable par multiplication)

D'après l'une des caractérisations des sous-groupes, il reste à vérifier la stabilité de H par passage au symétrique.

Soit $h \in H$. L'idée est d'écrire h^{-1} comme une puissance de h à un exposant naturel.

L'application $\varphi : n \in \mathbb{N} \mapsto h^n$ n'est pas injective, car $\mathbb{N}$ est infini et pas H : il existe donc $i, j \in \mathbb{N}$ distincts tels que $h^i = h^j$. En supposant par exemple $i > j$, on obtient $h^{i-j} = e_G$, donc $h^{-1} = h^{i-j-1}$.

Si $i - j - 1 > 0$, alors comme $h \in H$ et comme H est stable par produit, $h^{-1} \in H$.

Si $i - j - 1 = 0$, alors $h^{-1} = h = e_G$, donc $h^{-1} \in H$.

H est donc un sous-groupe de G.

Remarque : plutôt que de parler de i et j, on aurait pu utiliser $\psi : n \in \mathbb{Z} \mapsto h^n$ qui a l'avantage d'être un morphisme, non injectif par étude des cardinaux, et donc de noyau non trivial.

Remarque : l'hypothèse de finitude est essentielle, comme le montre l'exemple de $\mathbb{N}$ additif (ou $\{e^n, n \in \mathbb{N}\}$ si on tient à donner un exemple multiplicatif).

Corrigé 251 (Monoïde fini et régulier)

Pour montrer qu'un monoïde est un groupe, il reste à vérifier que tout élément est symétrisable. Ici, on considère un monoïde fini et régulier G. Pour tout $a \in G$, tout $(b, c) \in G^2$, on a

$$ab = ac \Rightarrow b = c$$

Autrement dit, l'application $g \in G \mapsto ag$, de G dans G, est injective. Comme G est en outre fini, on en déduit que cette application est bijective : en particulier, il existe $g \in G$ tel que $ag = e_G$, donc a admet un symétrique à droite dans G.

De même (en considérant $g \mapsto ga$), a admet un symétrique à gauche dans G : a est symétrisable dans G.

Ceci valant pour tout $a \in G$, G est bien un groupe.

Remarque : la finitude du groupe est essentielle, comme le montre l'exemple de $(\mathbb{N}, +)$. Elle nous a servi à passer d'une injectivité à une surjectivité (d'une unicité à une existence). En algèbre linéaire, c'est la dimension finie qui joue ce rôle de passeur entre unicité et existence.

Remarque : attention, $g \mapsto ag$ n'est pas un endomorphisme du groupe G, à moins que $a = e_G$.

Corrigé 252 (Caractérisation de la commutativité)

1 Reformulons les diverses assertions :

La première signifie

$$\forall x, y \in G, \quad xy = yx$$

La deuxième signifie

$$\forall x, y \in G, \quad (xy)^2 = x^2y^2$$

La troisième signifie

$$\forall x, y \in G, \quad (xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$$

(car le passage au symétrique est bijectif, puisqu'involutif).

Soit $x, y \in G$. On a

$$xy = yx \Leftrightarrow xxyy = xyxy \Leftrightarrow x^2y^2 = (xy)^2,$$

car dans un groupe tout élément est simplifiable.

Ceci montre l'équivalence entre les deux premières assertions.

On a

$$(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1} \Leftrightarrow ((xy)^{-1})^{-1} = (x^{-1}y^{-1})^{-1} \Leftrightarrow xy = (y^{-1})^{-1}(x^{-1})^{-1} \Leftrightarrow xy = yx,$$

la première équivalence se justifiant par l'injectivité de la fonction de passage au symétrique.

Ceci montre l'équivalence entre la première et la troisième assertion.

2 Par hypothèse, la fonction carré est l'endomorphisme trivial (constamment égal à 1) : G est donc abélien.

Corrigé 253 (Théorème de Cayley)

1 α_a (resp. β_a) est bijective, car elle admet $\alpha_{a^{-1}}$ (resp. $\beta_{a^{-1}}$) pour inverse (pour la composition).

2 Pour que α_a soit un endomorphisme, il faut que $\alpha_a(e_G) = e_G$, et donc que $a = e_G$.
Réciproquement, si $a = e_G$, alors $\alpha_a = \mathrm{Id}_G$, et est donc un endomorphisme de G.

3 Soit $a, b, x \in G$.

$$\begin{aligned}((\phi(a)) \circ (\phi(b)))(x) &= (\alpha_a \circ \alpha_b)(x) \\ &= \alpha_a(bx) \\ &= abx \\ &= \alpha_{ab}(x) \\ &= (\phi(ab))(x).\end{aligned}$$

Ceci valant pour tout $x \in G$, $\phi(a) \circ \phi(b) = \phi(ab)$.

Ceci valant pour tout $(a, b) \in G^2$, ϕ est un morphisme de groupes.

On teste l'injectivité sur le noyau : soit $a \in \ker(\phi)$, *i.e.* $\phi(a) = \mathrm{Id}_G$. En évaluant cette relation en e_G, on obtient $a = e_G$. Le noyau du morphisme ϕ étant réduit à e_G, ϕ est bien injectif.

ϕ induit donc un isomorphisme de G sur son image, et donc de G sur un sous-groupe de $\mathcal{S}_G$.

Corrigé 254 (Transfert de structure)

On vérifie à la main que $(E, *)$ est un groupe, et que ϕ^{-1} est un isomorphisme de E sur G.

Remarque : cet exercice semble compliqué, mais il ne fait que rappeler que des groupes sont isomorphes si et seulement si ils ne diffèrent que par l'écriture.

Remarque : cet exercice permet de mieux comprendre la structure de groupe donnée dans l'exercice 1. En effet, on a transféré l'addition dans $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$ grâce à la fonction tangente hyperbolique.

Corrigé 255 (Groupe d'automorphismes d'un groupe, automorphismes intérieurs)

1 $\mathrm{Aut}(G)$ est une partie non vide de $\mathcal{S}_G$, non vide car possédant Id_G, stable par composition et passage à la bijection réciproque : c'est donc un sous-groupe de $\mathcal{S}_G$, puis un groupe pour $\circ$.

2 On se demande pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{Z}$ l'application $n \in \mathbb{Z} \mapsto an$ est bijective.
Pour qu'elle le soit, 1 doit posséder un antécédent, et donc nécessairement, $a = \pm 1$.
Réciproquement, ces valeurs de a conviennent, donc $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}) = \{\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}, -\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}\}$.

3 Soit $a, x, y \in G$. On a

$$\phi_a(x)\phi_a(y) = axa^{-1}aya^{-1} = axya^{-1} = \phi_a(xy),$$

donc ϕ_a est un endomorphisme de G.

Il est bijectif, car il admet $\phi_{a^{-1}}$ pour inverse pour la composition (ou, si on préfère, car pour tout $y \in G$, l'unique antécédent de y par ϕ_a est $a^{-1}ya$).

4 Soit $a, b, x \in G$. On a

$$\psi(a) \circ \psi(b)(x) = \phi_a(\phi_b(x)) = \phi_a(bxb^{-1}) = abxb^{-1}a^{-1} = abx(ab)^{-1} = \psi(ab)(x),$$

donc ψ est bien un morphisme.

Étudions son noyau : soit $a \in G$. a est dans le noyau de ψ si et seulement si $\psi(a) = \mathrm{Id}_G$, si et seulement si $axa^{-1} = x$ pour tout $x \in G$, si et seulement si $ax = xa$ pour tout $x \in G$. Le noyau de ψ est donc le centre de G.

Corrigé 256 (Équipotence et isomorphisme)

On peut montrer que ces deux groupes sont équipotents à $\mathbb{R}$, et qu'ils peuvent donc être mis en bijection.

Corrigé 257 (Éléments réguliers de E^E)

Corrigé 258 (Structure de groupe)

1 Cette question est difficile.

Soit e_G un élément neutre à gauche de G, $g \in G$, g' un symétrique à gauche de g (à ce stade, on ne peut affirmer l'unicité de l'élément neutre ou d'un symétrique à gauche).

On souhaite montrer que g' est symétrique à droite de g, *i.e.* $gg' = e_G$. Pour ce faire, introduisons un symétrique à gauche g'' de g'. On a

$$gg' = e_G gg' = g''g'gg' = g''e_G g' = g''g' = e_G,$$

d'où le résultat (l'associativité a permis de ne pas mettre de parenthèses).

Reste à prouver que e_G est aussi élément neutre à droite :

$$ge_G = g(g'g) = (gg')g = e_G g = g,$$

d'où le résultat.

2 Il s'agit de montrer que G admet un élément neutre, et que tout élément de G admet un symétrique.

Fixons un élément a de G. Par hypothèse, il existe un élément e de G tel que $ea = a$ (en prenant $b = a$ dans l'assertion $\star$). En multipliant cette relation à droite par b, où b décrit G, et en utilisant encore $\star$, on constate que e est élément neutre à gauche de G. De la même manière, G admet un élément neutre à droite e', puis $e = ee' = e'$.

Par hypothèse $\star$, il existe a' et a'' dans G tels que $e = aa' = a''a$, puis $a' = a''aa' = a''$, donc a admet un symétrique.

G est bien un groupe.

3 Fixons $a \in G$. a étant simplifiable, les applications $\alpha_a \ : g \mapsto a \cdot g$ et $\beta_a \ : g \mapsto g \cdot a$ de G dans G sont injectives, donc bijectives puisque G est fini. En particulier, a admet un antécédent par α_a, *i.e.* il existe $e \in G$ tel que $a = ae$. On a donc, pour tout $b \in G$, $ba = bae$. Or, par surjectivité de β_a, ba décrit G lorsque b décrit G, donc e est élément neutre à droite de G. De même G admet un élément neutre à gauche, qui s'avère ensuite égal à e, et les surjectivités de α_a et β_a appliquées à e montrent que a admet un symétrique.

Remarque : en fait, cette question se ramène facilement à la précédente, la finitude de G permettant de passer d'une injectivité (ce que l'on suppose dans cette question) à une surjectivité (ce que l'on suppose dans la question précédente).

Remarque : comme d'habitude, on doit se demander si les hypothèses peuvent être affaiblies. La finitude de G ne peut être omise, comme le montre l'exemple de $(\mathbb{N}, +)$.

2. Ordre d'un élément d'un groupe

Corrigé 259 (Résultats élémentaires sur les ordres)

Corrigé 260 (Sous-groupes finis de $\mathbb{C}^*$)

Soit G un sous-groupe fini de $\mathbb{C}^*$, de cardinal n. D'après le théorème de Lagrange, pour tout $z \in G$, $z^n = 1$, donc $G \subset \mathbb{U}_n$. Par égalité des cardinaux (finis), $G = \mathbb{U}_n$.

Réciproquement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{U}_n$ est bien un sous-groupe fini de $\mathbb{C}^*$.

Corrigé 261 (Groupe infini dont tout élément est d'ordre fini)

Corrigé 262 (Existence d'une involution non triviale dans un groupe d'ordre pair)

Corrigé 263 (Groupe n'ayant qu'un nombre fini de sous-groupes)

Corrigé 264 (Racine carrée dans un groupe d'ordre impair)

Corrigé 265 (Sous-groupes de type fini de $(\mathbb{Q}, +)$)

Corrigé 266 (Théorème de Lagrange, cas général)

Corrigé 267 (Groupe n'ayant que deux classes de conjugaison)

Corrigé 268 (Groupe n'ayant que deux classes sous l'action de $\mathrm{Aut}(G)$)

3. Groupe symétrique

Corrigé 269 (Sous-groupes de $\mathcal{S}_3$ (Centrale MP 07))

Corrigé 270 ($\mathcal{S}_n$ est de rang 2 (Centrale MP 08))

Corrigé 271 (Transpositions et groupe symétrique)

CHAPITRE 27

Oraux 7 : groupes (énoncés)

Aller aux corrigés 28

Exercice 272

Soient $u_0, u_1 \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+2} = u_{k+1} + u_k$. Étudier la périodicité de la suite (u_k).

Exercice 273

Déterminer les groupes d'ordre 4 à isomorphisme près.

Exercice 274

1 Les groupes $(\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Q}, +)$ sont-ils isomorphes ?
2 Les groupes $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sont-ils isomorphes ?
3 Les groupes $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^*, \times)$ sont-ils isomorphes ?

Exercice 275

1 Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini de cardinal $\geqslant 2$ tel que : $\forall\, g \in G, g^2 = e$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(G, \cdot)$ soit isomorphe à $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n, +)$.
2 Un groupe infini contient-il un élément d'ordre infini ?

Exercice 276

Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, $G_n = \left\{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i X^i \ ;\ (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1} \text{ et } \lambda_1 \neq 0\right\}$.
1 Si P et Q sont dans G_n, montrer qu'il existe un unique R de G_n tel que $R \equiv P \circ Q\ [X^n]$.
On note $R = P * Q$.
2 Montrer que $(G_n, *)$ est un groupe.
3 Déterminer un morphisme surjectif de G_n dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Exercice 277

Soient G un groupe commutatif fini, m le ppcm des ordres des éléments de G.

1 Montrer qu'il existe g dans G d'ordre m.

2 Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un polynôme P_n de degré n de $\mathbb{Z}[X]$ tel que, si x et y sont dans $\mathbb{R}$ avec $x^2+y^2=1$ et $(x+iy)^n+(x-iy)^n=2$, alors $P_n(x)=0$.

3 On suppose G de cardinal majoré par $2m-1$. Montrer que G est cyclique.

4 Soit p un nombre premier. Montrer que l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ avec x, y dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tels que $x^2+y^2=1$ est un sous-groupe cyclique de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

Exercice 278

Soit $(G, \cdot)$ un groupe engendré par une partie finie S stable par passage à l'inverse. Pour $x \in G$, on note $L(x, G)$ la longueur minimale d'une décomposition de x comme produit d'éléments de S. Pour un endomorphisme $\varphi : G \to G$, on note $\Lambda(\varphi, S) = \max\limits_{x \in S} L(\varphi(x), S)$.

1 Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln\big(\Lambda(\varphi^n, S)\big)$ existe dans $\mathbb{R}$ et ne dépend pas de S.

2 Calculer la limite précédente pour $G = \mathbb{Z}^2$ et $\varphi : (x, y) \mapsto (2x+y, x+y)$.

Exercice 279

1 Déterminer $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Quelle est sa structure algébrique ?

2 À quel groupe est-il isomorphe ?

Exercice 280

Soit G un groupe abélien, $x \in G$ d'ordre m et $y \in G$ d'ordre n. Montrer qu'il existe $z \in G$ d'ordre $m \vee n$.

Exercice 281

Soit p un nombre premier, $p > 2$, et G un groupe de cardinal $2p$. Montrer que G admet au moins un élément d'ordre p.

Exercice 282

Soit E un ensemble fini non vide muni d'une loi de composition interne associative notée T. Montrer qu'il existe $e \in E$ tel que $eTe = e$.

Exercice 283

Soit G le sous-groupe de $\mathcal{S}_n$ formé des éléments qui fixent n. Montrer que G est maximal parmi les sous-groupes stricts de $\mathcal{S}_n$.

Exercice 284

Soit G et H deux groupes, avec G fini, f un morphisme de G dans H. Donner une relation entre $|G|$, $|\ker f|$ et $|\operatorname{Im} f|$.

Exercice 285

Déterminer les morphismes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Q}^{+*}, \times)$.

Exercice 286

Le cycle $(1, 2, \ldots, n)$ admet-il une racine carrée dans $\mathcal{S}_n$?

Exercice 287

1 (Centrale MP 06) Montrer que $\{x + y\sqrt{3}/x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}, x^2 - 3y^2 = 1\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

2 (X MP 08)Soit $G = \{x + \sqrt{2}y | x \in \mathbb{N}^*, y \in \mathbb{Z}$ et $x^2 - 2y^2 = 1\}$.

a Montrer que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.

b Montrer que G est monogène.

Exercice 288

Soit p un nombre premier. Déterminer le nombre d'éléments d'ordre p du groupe symétrique $\mathcal{S}_{2p}$.

CHAPITRE 28

Oraux 7 : groupes (corrigés)

Aller aux énoncés 27

Corrigé 272 (Périodicité d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)

Corrigé 273 (Groupes d'ordre 4 (X MP 10))

Corrigé 274 (Étude d'isomorphie (X PC 10))

Corrigé 275 (Groupe fini d'involutions (Mines MP 08))

Corrigé 276 (Une loi de groupe sur un ensemble de polynômes)

Corrigé 277 (Sur le ppcm des ordres des éléments d'un groupe fini)

Corrigé 278 (Partie génératrice finie stable par passage à l'inverse)

Corrigé 279 (Reconnaître un groupe connu)

Corrigé 280 (Ordre d'un élément dans un groupe abélien (X MP 07))

Corrigé 281 (Élément d'ordre p (X MP 06))

Corrigé 282 (Existence d'un idempotent (X MP 07))

Corrigé 283 (Sous-groupes maximaux de $\mathcal{S}_n$ (ENS MP 10))

Corrigé 284 (Le premier théorème d'isomorphie, dégradé en relation entre cardinaux (ENS MP 10))

Corrigé 285 (Morphismes de $\mathbb{Q}$ vers $\mathbb{Q}^*$)

Corrigé 286 (Racine carrée d'une permutation circulaire (Mines MP 10))

Si ce cycle admet une racine carrée c, alors c est nécessairement un n-cycle, car il ne peut pas y avoir plusieurs orbites sous l'action de c. Si n est pair, alors on constate que le carré d'un n-cycle n'est pas un n-cycle, et donc que le cycle considéré c_0 n'admet pas de racine carrée.

Si n est impair on peut écrire $n = 2k + 1$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Comme $c_0^n = \mathrm{Id}$, on constate que c_0 admet c_0^{-k} pour racine carrée.

Corrigé 287 (Loi de groupe sur les points entiers d'une branche d'hyperbole)

1 Notons G cet ensemble. Il est clairement non vide, puisqu'il comprend 1, et est une partie de $\mathbb{R}_+^*$, car si $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{Z}$ vérifient $x^2 - 3y^2 = 1$, alors $x + \sqrt{3}y$ ou $x - \sqrt{3}y$ est positif, donc les deux le sont, puisque leur produit vaut 1 (et ils sont non nuls). On montre comme dans l'exercice 2 que G est stable par produit et passage à l'inverse.

2

a Par irrationnalité de $\sqrt{2}$, G est une partie de $\mathbb{R}^*$, évidemment non vide. On vérifie de plus que G est stable par produit et par passage à l'inverse pour conclure.

C'est facile pour l'inverse (avec des notations évidentes, celui de $x+\sqrt{2}y \in G$ est $x-\sqrt{2}y \in G$, ça l'est un peu moins pour le produit, car il faut prouver (avec des notations évidentes) que $xx' + 2yy' \in \mathbb{N}^*$: c'est un entier relatif par structure d'anneau de $\mathbb{Z}$, non nul (car impair, x et x' l'étant nécessairement).

b G est en fait un sous-groupe de $\mathbb{R}_+^*$. On applique l'isomorphisme logarithme, afin de se ramener au cas connu des sous-groupes (additifs) de $\mathbb{R}$. Le sous-groupe $\ln(G)$ de $\mathbb{R}$ n'est pas dense, car ses éléments positifs sont ceux de la forme $\ln(x + \sqrt{2}y)$, où $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, et $x^2 - 2y^2 = 1$. $\ln(G)$ est donc monogène, et G également (il lui est isomorphe).

Corrigé 288 (Nombre d'éléments d'ordre donné)

CHAPITRE 29

TD 8 : anneaux, corps, algebres (énoncés)

Aller aux corrigés 30

1. Généralités sur les anneaux

Exercice 289

Étant donné deux anneaux A et B quelconques, existe-t-il au moins un morphisme d'anneaux de A vers B ?

Exercice 290

Montrer que tout anneau intègre fini est un corps.

Exercice 291

Soit $(G, +)$ un groupe commutatif. On note $\mathrm{End}(G)$ l'ensemble des endomorphismes de G, sur lequel on définit la loi (notée abusivement) $+$ par :

$$\forall f, g \in \mathrm{End}(G), \forall x \in G, (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

Montrer que $(\mathrm{End}(G), +, \circ)$ est un anneau.

Exercice 292

Soit $(A, +, \times)$ un anneau non nul. On dit que $x \in A$ est *nilpotent* s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 0$.

1 Donner un exemple de matrice nilpotente non nulle.
2 Montrer qu'un élément de A ne peut pas être à la fois nilpotent et inversible.
3 Montrer qu'il peut exister des éléments ni inversibles ni nilpotents.
4 Montrer que si x est nilpotent, alors $1 - x$ est inversible.
5 Montrer que si x et y sont nilpotents et commutent, alors xy et $x+y$ sont nilpotents.

Exercice 293

Soit $(A, +, \times)$ un anneau. On appelle *centre* de A l'ensemble $C = \{x \in A, \forall y \in A, xy = yx\}$. Montrer que C est un sous-anneau de A.

Exercice 294

Donner un exemple d'anneau principal non intègre.

Exercice 295

Soit A un anneau commutatif, I un idéal de A. On appelle *radical* de I et on note $\sqrt{I}$ l'ensemble :

$$\sqrt{I} = \{x \in A,\ \exists n \in \mathbb{N}, x^n \in I\}.$$

Dans $\mathbb{Z}$, calculer $\sqrt{12\mathbb{Z}}$, $\sqrt{72\mathbb{Z}}$.

Exercice 296

1 Soit A un anneau commutatif qui n'est pas un corps. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :

(1) La somme de deux non inversibles est non inversible.

(2) Les non inversibles forment un idéal propre.

(3) A possède un idéal maximal unique

Lorsque l'une de ces conditions est remplie, on dit que A est un *anneau local*.

2 Montrer que dans un anneau local, les seuls idempotents sont 1 et 0.

2. Arithmétique, anneaux de congruence

Exercice 297

1 (Mines MP) Trouver le chiffre des unités de 7^{7^7}.

2 Trouver les deux derniers chiffres de la représentation décimale de $19^{19^{19}}$.

3 Montrer que chaque nombre du type

$$2^{2^n} + 1$$

(où $n \geqslant 2$) se termine par 7.

4 Montrer qu'un nombre entier positif de six chiffres dont la représentation décimale est de la forme « abcabc » est nécessairement divisible par 13.

5 On admet que 2^{29} est un nombre de 9 chiffres, tous différents (en base 10). Quel est le chiffre manquant ?

6 Trouver la somme des chiffres de la somme des chiffres de la somme des chiffres de 4444^{4444}.

Exercice 298

Trouver les $a \in \mathbb{Z}$ tels que $a \equiv 3\,[7]$, $a \equiv 8\,[17]$ et $c \equiv 13\,[27]$.
Réponse : 1606.

Exercice 299

Montrer qu'il y a une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.

Exercice 300

Trouver une condition nécessaire sur $n \in \mathbb{N}^*$ pour que $2^n - 1$ soit premier. Même question avec $2^n + 1$.

Exercice 301

1 Montrer qu'il n'existe pas de couple d'entiers $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que

$$x^2 - 5y^2 = 3.$$

2 L'équation diophantienne

$$x^3 + 2y^3 = 4z^3$$

possède-t-elle dans $\mathbb{Z}^3$ une autre solution que le triplet nul ?

Exercice 302

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Calculer le reste de la division euclidienne de $(n-1)!$ par n.

Exercice 303

Soit p un nombre premier et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sum_{x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} x^k \in \{-1, 0\}$. Préciser à quelle condition on obtient 0 ou -1.

Exercice 304

Soit n un entier strictement positif, et soit $d(n)$ le nombre d'entiers positifs divisant n. Prouver que $d(n)$ est impair si et seulement si n est un carré parfait (c'est-à-dire le carré d'un nombre entier).

Exercice 305

Pour tout entier naturel non nul n, on note $S(n)$ la somme de ses diviseurs naturels. Montrer que si m et n sont deux entiers naturels non nuls premiers entre eux, alors $S(mn) = S(m)S(n)$.

Exercice 306

Démontrer que tout entier $n \geqslant 1$ a au moins autant de diviseurs de la forme $3k+1$ ($k \in \mathbb{N}$) que de diviseurs de la forme $3k-1$ ($k \in \mathbb{N}^*$)

3. Polynômes et algèbres

Exercice 307

1 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $a, b \in \mathbb{K}$, $a \neq b$. Quel est le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)$, par $(X-a)(X-b)$?
2 Trouver le reste de la division euclidienne de $X^6 - 5X^4 + 3X^3 - X^2 + X + 2$ par $(X-1)^3$.
3 Trouver par trois méthodes le reste de la division euclidienne de $P = X^5 + 4X^3 + 3X^2 - X + 6$ par $(X-1)^2(X+2)$.
4 Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Donner le reste de la division euclidienne de $(\cos\theta + X\sin\theta)^n$ par X^2+1.
5 Chercher le reste de la division euclidienne de $(X+1)^n - X^n - 1$ par X^2+X+1.
6 Soit $B = X^3 - X^2 + X - 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $A_n = (X^2+X+1)^n - X^{2n} - X^n - 1$.
  a Donner une condition sur n pour que B divise A_n.
  b Donner le reste de la division euclidienne de A_n par B.

Exercice 308

Trouver les polynômes U et V tels que $AU + BV = A \wedge B$, où :
1 $A = X^5 + 1$ et $B = X^7 + X^6 + X^3 + 1$.
2 $A = X^5 - 1$ et $B = X^2 + X + 1$.
3 $A = (X^{10} - 1)$ et $B = (X^6 - 1)$.

Exercice 309

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A = \{P \in \mathbb{R}_n[X], \sum_{k=1}^{n} P^{(k)}(1) = 0\}$. Quelle est la dimension de A ? Donner une base de A.

Exercice 310

Calculer : $\prod_{k=1}^{n-1}(1 - e^{2ik\pi/n})$ où $n \geqslant 2$.

Exercice 311

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que les racines complexes du polynôme $\prod_{k=0}^{n}(X-k) + a$ sont de multiplicité au plus 2.

Exercice 312

Soit $\mathcal{A} = \{P \in \mathbb{C}[X], P \neq 0 \text{ et } P(X^2) = P(X)P(X-1)\}$.

1 Soit $P \in \mathcal{A}$. Montrer que les racines de P sont de module 1.

2 Déterminer A.

Exercice 313

1 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P.

2 Soit K un convexe fermé de $\mathbb{C}$ et $A = \{a \in \mathbb{C}, P^{-1}(\{a\}) \subset K\}$. Montrer que A est convexe.

Exercice 314

1 Soient $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$. Montrer que les racines complexes de P ont un module majoré par $\max\{1, |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|\}$.

2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(X) = nX^n - \sum_{k=0}^{n-1} X^k \in \mathbb{C}[X]$.

- **a** Soit z une racine de P distincte de 1. Montrer que $|z| < 1$.
- **b** Montrer que les racines de P sont simples.

Exercice 315

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

Exercice 316

Montrer qu'il n'existe pas de polynôme non constant $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $P(n) \in \mathcal{P}$.

Exercice 317

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire de degré n, scindé à racines simples. On note $a_1, \ldots, a_n$ les racines de P. Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{Q(a_i)}{P'(a_i)} = \frac{Q^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}.$$

Exercice 318

Déterminer les automorphismes de la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathbb{C}[X]$.

4. Anneaux

Exercice 319

Quel est le plus petit sous-anneau de $\mathbb{Q}$ contenant $1/5$? Quel est son groupe des inversibles ?

Exercice 320

Soit $\mathcal{A}$ un anneau commutatif. Vérifier que l'ensemble $\mathcal{N}$ des éléments nilpotents de $\mathcal{A}$ est un idéal de $\mathcal{A}$.
On l'appelle *nilradical* de $\mathcal{A}$.

Exercice 321

On pose $\mathbb{Z}[i] = \{z \in \mathbb{C}, \exists (a,b) \in \mathbb{Z}^2, \quad z = a+ib\}$. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau intègre pour les lois d'addition et de multiplication déduites de celles de $\mathbb{C}$. Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 322

On note $j = e^{2i\pi/3}$ et on considère l'ensemble $\mathbb{Z}[i] = \{x + jy, (x,y) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1 Montrer que $\mathbb{Z}[j]$ est un anneau.

2 Montrer que $u \in \mathbb{Z}[j]$ est inversible si et seulement si $|u| = 1$.

3 Montrer que l'ensemble des inversibles $\mathbb{Z}[j]^*$ est un groupe cyclique.

Exercice 323

Soit A un anneau fini. Montrer l'existence d'entiers distincts m et n tels que, pour tout $x \in A$: $x^m = x^n$.

Exercice 324

Un idéal propre $\mathcal{I}$ d'un anneau A est dit maximal si $\mathcal{I}$ et A lui-même sont les seuls idéaux de A contenant $\mathcal{I}$.

1 Donner les idéaux maximaux de $\mathbb{Z}$, de $K[X]$.

2 Donner les idéaux maximaux de $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

Exercice 325

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que
$$(1+\sqrt{2})^n = \sqrt{p+1} + \sqrt{p}.$$

5. Corps

Exercice 326

Montrer que tout morphisme de corps est injectif.

Exercice 327

Soit A un anneau commutatif fini non nul, et tel que, pour tout $x \in A$:

$$((x^2 = 0) \Rightarrow (x = 0)) \wedge ((x^2 = x) \Rightarrow (x \in \{0, 1\}))$$

Montrer que A est un corps.

Exercice 328

On pose $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{z \in \mathbb{R}, \exists (a, b) \in \mathbb{Q}^2, \quad z = a + b\sqrt{3}\}$.

1 Établir que $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ est un corps pour les lois déduites de celles de $\mathbb{R}$.

2 Déterminer le groupe des automorphismes du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

Exercice 329

Soit A un anneau commutatif non nul dont tout idéal est premier, c'est-à-dire vérifie, pour tout $(x, y) \in A^2$:

$$xy \in I \Rightarrow x \in I \text{ ou } y \in I.$$

Montrer que A est un corps.

Exercice 330

Un corps K est dit *algébriquement clos* si tout polynôme non constant à coefficients dans K admet une racine dans K.

1 Montrer qu'un corps algébriquement clos est de cardinal infini.

2 Donner un exemple de corps algébriquement clos.

3 Montrer que l'ensemble des nombres algébriques sur $\mathbb{Q}$ est un corps algébriquement clos.

CHAPITRE 30

TD 8 : anneaux, corps, algebres (corrigés)

Aller aux énoncés 29

1. Généralités sur les anneaux

Corrigé 289 (Morphisme d'anneaux)

La réponse est non. Par exemple, il n'existe pas de morphisme d'anneaux de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{Z}$. En effet, si on disposait d'un tel morphisme φ, alors on aurait

$$2\varphi(1/2) = \varphi(1) = 1,$$

d'où l'absurdité $\varphi(1/2) = \frac{1}{2}$.
Remarque : autre exemple (moins intéressant) : si A et nul et pas B, alors un morphisme d'anneaux ψ de A vers B doit vérifier à la fois $\psi(0_A) = 0_B$ et $\psi(1_A) = 1_B$, ce qui est impossible puisque $0_A = 1_A$ et que $0_B \neq 1_B$.
Remarque : en revanche, entre deux groupes, il existe au moins un morphisme, le morphisme trivial (envoyant tout élément du premier sur l'élément neutre du second).

Corrigé 290 (Anneau intègre fini)

Il manque le fait que tout élément non nul soit inversible. Soit donc un tel anneau A, et $a \in A \setminus \{0_A\}$. L'application

$$b \mapsto ab$$

de A dans A est injective (puisque A est intègre), et donc bijective puisque A est fini. En particulier, 1_A admet un antécédent par cette application, donc a est inversible.
Remarque : A étant intègre, il est commutatif, il suffisait donc de trouver un inverse à droite (comme on l'a fait).
Remarque : en fait, tout anneau fini non nul sans diviseur de zéro est un corps (c'est plus ou moins le théorème de Wedderburn), mais la démonstration dépasse largement le cadre de la prépa.

Corrigé 291 (Anneau des endomorphismes d'un groupe commutatif)

Il est clair que $+$ et $\circ$ sont des lois de composition interne sur $\mathrm{End}(G)$, associatives, et que $+$ est commutative (puisqu'elle l'est dans G).

De plus, l'application identiquement nulle $x \mapsto e_G$ et l'application identique $x \mapsto x$ sont clairement des élements neutres respectifs pour $+$ et $\circ$ dans $\mathrm{End}(G)$.

Tout élément f de $\mathrm{End}(G)$ admet $-f \ : x \mapsto -(f(x))$ pour symétrique dans $\mathrm{End}(G)$.

Vérifions la distributivité de la composition par rapport à l'addition (qui est le point le plus difficile) : soit $f, g, h \in \mathrm{End}(G)$.

Soit $x \in G$.

On a , par définition des termes ci-dessous

$$\begin{aligned}((f+g)\circ h)(x) &= (f+g)(h(x)) \\ &= f(h(x)) + g(h(x)) \\ &= (f\circ h + g\circ h)(x),\end{aligned}$$

donc $\circ$ est distributive à droite de $+$.

On a également,

$$\begin{aligned}(h \circ (f+g))(x) &= h((f+g)(x)) \\ &= h(f(x)+g(x)) \\ &= h(f(x)) + h(g(x)) \\ &= (h \circ f + h \circ g)(x),\end{aligned}$$

où la troisième égalité se justifie par le fait que h soit un endomorphisme de G, donc $\circ$ est distributive à gauche de $+$.

$(\mathrm{End}(G), +, \circ)$ est bien un anneau.

Remarque : en général, cet anneau n'est pas commutatif, car la composition n'est pas commutative (sauf exception).

Remarque : il faut bien mettre en valeur la différence d'argumentation pour les deux distributivités. En fait, la distributivité à droite de $\circ$ par rapport à $+$ est toujours vérifiée, même si les fonctions considérées ne sont pas des morphismes (par exemple, $(\cos + \sin) \circ \exp = \cos \circ \exp + \sin \circ \exp$, mais $\exp \circ (\cos + \sin) \neq \exp \circ \cos + \exp \circ \sin$).

Corrigé 292 (Éléments nilpotents d'un anneau)

1 La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ convient.

2 Raisonnons par l'absurde, en supposant disposer de $a \in A$ nilpotent et inversible. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = 0_A$. On a $a^n = 0_A$, donc, puisque a et a^{-1} commutent

$$1_A = (aa^{-1})^n = a^n (a^{-1})^n = 0_A,$$

ce qui contredit le fait que A soit non nul.

3 3 dans l'anneau $\mathbb{Z}$ n'est ni nilpotent, ni inversible.

Autre exemple : la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est ni nilpotente, ni inversible (et c'est un diviseur de zéro).

4 Supposons x nilpotent, et soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 0_A$. On utilise la formule de Bernoulli aux éléments 1_A et x (qui commutent bien) :

$$1 = 1^n - x^n = (1-x) \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \sum_{k=0}^{n-1} x^k (1-x),$$

donc $1 - x$ est inversible d'inverse $\sum_{k=0}^{n-1} x^k$ (que l'on peut aussi écrire $\sum_{k \in \mathbb{N}} x^k$, puisque $x^k = 0$ dès que $k \geqslant n$).

5 Supposons que x et y commutent, et qu'il existe $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $x^m = y^n = 0$.

Comme x et y commutent, $(xy)^m = x^m y^m = 0$, donc xy est nilpotent.

Remarque : en examinant cette preuve on constate que si deux éléments d'un anneau commutent et que l'un (au moins) d'entre eux est nilpotent, alors leur produit l'est aussi.

Nous voulons maintenant montrer que $x + y$ est nilpotent, *i.e.* qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $(x+y)^p = 0$.

Or la formule du binôme de Newton s'applique, puisque x et y commutent :

$$(x+y)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^k y^{p-k}$$

Pour que $(x+y)^p$ soit nul, il suffit que tous les termes de la somme ci-dessus le soient. Soit $k \in [\![0, p]\!]$: pour que $\binom{p}{k} x^k y^{p-k} = 0$, il suffit que $x^k = 0$ ou $y^{p-k} = 0$, et donc il suffit que $k \geqslant m$ ou $p - k \geqslant n$ (soit encore $k \leqslant p - n$).

Ainsi, en prenant $p = m + n$, on obtient bien $(x + y)^p = 0$, donc $x + y$ est nilpotent.
Remarque : on pouvait même prendre $p = m + n - 1$.
Remarque : l'hypothèse de commutation est essentielle, comme le montre l'exemple de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Corrigé 293 (Centre d'un anneau)

C est une partie de A, comprenant 1_A.
De plus, soit $b, c \in C$, et $a \in A$. On a

$$(b - c)a = ba - ca = ab - ac = a(b - c)$$

donc C est stable par différence, et

$$a(bc) = (ab)c = (ba)c = b(ac) = b(ca) = (bc)a,$$

donc C est stable par produit.
Au final, C est bien un sous-anneau de A.

Corrigé 294 (Anneau principal non intègre)

$\mathbb{K} \times \mathbb{K}'$ où $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}'$ sont deux corps.

Corrigé 295 (Radical d'un idéal)

$\sqrt{12\mathbb{Z}} = \sqrt{72\mathbb{Z}} = 6\mathbb{Z}$.
Remarque : ce n'est pas demandé dans l'exercice, mais on peut montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal contenant I.

Corrigé 296 (Anneau local)

(1) $\Rightarrow$(2) : supposons (1), et soit I l'ensemble des non inversibles de A : I possède 0, est stable par le produit par un élément quelconque et passage à l'opposé (par exemple parce que $-x = (-1_A)x$), sans supposer (1). Cette dernière hypothèse amène la stabilité par somme, et donc le fait que I soit un idéal de A.

(2) $\Rightarrow$(3) : supposons (3), et soit J un idéal propre de A : J ne possède pas d'élément inversible dans A (car sinon , $J = A$), donc $J \subset I$. Par conséquent, tout idéal propre de A est inclus dans J. Si on admet que tout idéal propre de A est inclus dans un idéal maximal (théorème de Krull), alors il s'ensuit que J est l'unique idéal maximal de A. En fait, ce serait très maladroit ici, puisqu'il est aisé de montrer que J est maximal (un idéal le contenant strictement possèderait un inversible).

(3) $\Rightarrow$(1) : supposons (3), et raisonnons par l'absurde en nous donnant deux éléments non inversibles a et b de A, tels que $a + b$ soit inversible. On a alors $aA + bA = A$. Or, si on note $\mathcal{M}$ l'unique idéal maximal de A, il contient les deux idéaux propres aA et bA, donc leur somme également, puis $\mathcal{M} = A$: c'est absurde.

2. Arithmétique, anneaux de congruence

Corrigé 297 (Chiffres en base 10)

Corrigé 298 (Restes chinois)

Corrigé 299 (Vers le théorème de Dirichlet)

Corrigé 300 (Nombres de Mersenne et de Fermat)

Corrigé 301 (Équations diophantiennes)

1 Il suffit de réduire modulo 5 (réduire modulo 3 fonctionne également).

2 La réponse est non, il suffit de raisonner sur les valuations 2-adiques de x, y et z pour s'en convaincre.

Remarque : une autre approche consiste à effectuer une « descente infinie » : si (x, y, z) est un triplet de solutions, alors x est pair, et $(-y, z, x/2)$ est aussi un triplet de solutions.

Corrigé 302 (Centrale MP 08)

En travaillant dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on s'intéresse au produit des éléments non nuls de cet anneau.

Si n est composé, on montre aisément que le résultat cherché est 0, sauf dans le cas où $n = 4$.

Si n est premier, on forme le produit des éléments non nuls du corps $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: on peut trouver sa valeur en appariant les éléments distincts inverses l'un de l'autre. On trouve que ce produit vaut $\overline{-1}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, donc que la réponse cherchée vaut $n - 1$.

Remarque : pour trouver le produit des éléments non nuls de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (lorsque n est premier), on aurait aussi pu remarquer que ce sont les racines simples du polynôme $X^{n-1} - 1$, et utiliser les relations coefficients racines.

Corrigé 303 (Sommes dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$)

Que cherche-t-on à montrer ? Que, si on pose $S_k = \sum_{x\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} x^k$, alors $S_k^2 = -S_k$. Or

$$S_k^2 = \left(\sum_{x\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} x^k\right)\left(\sum_{y\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} y^k\right) = \sum_{x\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}\sum_{y\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} (xy)^k = (p-1)S_k$$

car, si $x = 0$, alors $\sum_{y\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}(xy)^k = 0$, et, si $x \neq 0$, alors $y \mapsto xy$ est une permutation de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Le résultat s'ensuit puisque $(p-1)S_k = \overline{p-1}\,S_k = -S_k$.

Pour déterminer si on obtient 0 ou 1, le petit théorème de Fermat montre que (S_k) est $p-1$-périodique et que $S_{p-1} = -1$.

Si k est premier avec $p-1$, alors on peut montrer que $x \mapsto x^k$ est une permutation de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, et donc que $S_k = S_1$.

Or pour tout $y \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, non nul, $yS_1 = S_1$, donc si $p \geqslant 3$, alors $S_1 = 0$ (en prenant $y \neq 1$). Si $p = 2$, $S_1 = 1 = -1$.

Remarque : on aurait aussi pu utiliser une matrice compagnon.

Corrigé 304 (Une caractérisation des carrés parfaits)

Première méthode : on a

$$d(n) = \prod_{p\in\mathcal{P}} (v_p(n) + 1)$$

donc $d(n)$ est impair si et seulement si pour tout $p \in \mathcal{P}$, $v_p(n)$ est pair, si et seulement si n est un carré parfait.

Deuxième méthode : on observe que $k \mapsto n/k$ est une involution sur l'ensemble des diviseurs de n, qui induit une bijection entre l'ensemble des diviseurs de n strictement plus petits que $\sqrt{n}$ sur l'ensemble des diviseurs de n strictement plus grands que $\sqrt{n}$: $d(n)$ est impair si et seulement si $\sqrt{n}$ est un entier qui divise n, *i.e.* n est un carré parfait.

Corrigé 305 (Somme des diviseurs)

On a
$$S(m)S(n) = \sum_{d|m} d \sum_{s|n} s = \sum_{d|m, s|n} ds$$

Il suffit donc de montrer que
$$\begin{array}{rcrcl} \varphi & : & \mathcal{D}(m) \times \mathcal{D}(n) & \to & \mathcal{D}(mn) \\ & & (d, s) & \mapsto & ds \end{array}$$

est bijective.

Or on peut en trouver un inverse, à savoir $N \mapsto (N \wedge m, N \wedge s)$. Le point clé étant que si b et c sont premiers entre eux, alors
$$a \wedge (bc) = (a \wedge b)(a \wedge c)$$

ce que l'on peut montrer en revenant à la définition du pgcd, ou en utilisant les valuations p-adiques.

Corrigé 306 (Nombre de diviseurs)

3. Polynômes et algèbres

Corrigé 307 (Calculs de restes)

Corrigé 308 (Bézout effectif)

Corrigé 309 ((Centrale MP) Sous-espace de $\mathbb{R}_n[X]$)

Corrigé 310 ((Mines MP 08) Relations coefficients-racines)

Corrigé 311 (Multiplicité de racines)

Corrigé 312 (Équation d'inconnue polynomiale)

Corrigé 313 (Théorème de Gauss-Lucas)

Corrigé 314 (Localisation des racines)

Corrigé 315 (Polynômes stabilisant le cercle unité)

Corrigé 316 (Polynôme prenant aux entiers des valeurs entières)

Corrigé 317 (Identité polynomiale)

Corrigé 318 (Automorphismes de la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathbb{C}(X)$)

Ce sont les $P \mapsto P(aX + b)$, où $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

4. Anneaux

Corrigé 319 (Sous-anneau engendré par 1/5)

Corrigé 320 (Nilradical d'un anneau commutatif)

Corrigé 321 (Anneau des entiers de Gauss)

Nous montrons que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$: pour cela on vérifie qu'il possède 1, qu'il est stable par différence et par produit (détails laissés au lecteur).

Cherchons les inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

Analyse Soit $z \in \mathbb{Z}[i]^\times$: soit $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tels que $z = a + ib$ et $z^{-1} = c + id$. On a donc

$$(a + ib)(c + id) = 1,$$

puis, en passant aux carrés des modules :

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = 1,$$

donc $a^2 + b^2 = 1$, puis $z = a + ib \in \{1, -1, i, -i\}$.

Synthèse Réciproquement, 1, -1, i et $-i$ sont bien des éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$:

$$\mathbb{Z}[i]^\times = \{1, -1, i, -i\}.$$

Corrigé 322 (Sous-anneau de $\mathbb{C}$ engendré par j)

Corrigé 323 (Puissances identiques dans un anneau fini)

Soit N le cardinal de A, et $a_1, \ldots, a_N$ ses éléments. L'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{N} & \to & A^N \\ & n & \mapsto & (a_1^n, \ldots, a_N^n) \end{array}$$

n'est pas injective ($\mathbb{N}$ est infini, pas A^N), d'où le résultat.

Corrigé 324 (Idéaux maximaux)

Corrigé 325 (Écriture de $(1 + \sqrt{2})^n$ comme somme de racines)

5. Corps

Corrigé 326 (Morphisme de corps)

Soit φ un morphisme de corps de K vers L. Vérifions que $\ker(\varphi)$ est trivial, *i.e.* réduit à 0_K. Soit $x \in K \setminus \{0_K\}$. x est donc inversible, puis

$$\varphi(x)\varphi(x^{-1}) = \varphi(xx^{-1}) = \varphi(1_K) = 1_L,$$

donc $\varphi(x) \neq 0_L$: $x \notin \ker(\varphi)$.

φ est donc bien injectif.

Remarque : en examinant cette preuve, on constate plus généralement que, étant donné un morphisme d'anneaux $\psi : A \to B$, les inversibles de A ne sont jamais dans le noyau de ψ (sauf dans le cas peu intéressant où B est l'anneau nul).

Corrigé 327 (Condition suffisante pour être un corps)

Corrigé 328 (Groupe d'automorphismes d'une extension quadratique de $\mathbb{Q}$)

On montre que $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$. Pour ce faire, on vérifie que $1 \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$, que $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ est stable par différence (essentiellement parce que $\mathbb{Q}$ l'est), et enfin que $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \setminus \{0\}$ est stable par quotient. Soit $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, tels que $z = a + \sqrt{3}b$ et $z' = c + \sqrt{3}d$ soient non nuls, *i.e.* $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(c, d) \neq (0, 0)$, par irrationnalité de $\sqrt{3}$.

On a, en multipliant par la quantité conjuguée $c - \sqrt{3}d$ (non nulle par irrationnalité de $\sqrt{3}$)

$$\frac{z}{z'} = \frac{(a + \sqrt{3}b)(c - \sqrt{3}d)}{c^2 - 3d^2} = \frac{ac - 3bd}{c^2 - 3d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 - 3d^2}\sqrt{3},$$

donc $\frac{z}{z'} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ ($\frac{ac-3bd}{c^2-3d^2}$ et $\frac{bc-ad}{c^2-3d^2}$ sont rationnels).

$\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ est donc bien un corps.

Déterminons ses automorphismes :

Analyse Soit φ un automorphisme de ce corps. On a en particulier, pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$,

$$q\varphi(p/q) = \varphi(p) = p\varphi(1) = p, \quad i.e. \varphi(p/q) = p/q.$$

φ laisse donc fixe tout nombre rationnel.

De plus,

$$(\varphi(\sqrt{3}))^2 = \varphi(3) = 3,$$

puis $\varphi(\sqrt{3}) = \varepsilon\sqrt{3}$, où $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

Soit $a, b \in \mathbb{Q}$. On a donc $\varphi(a + b\sqrt{3}) = a + \varepsilon\sqrt{3}b$, ce qui laisse donc deux possibilités pour φ.

Synthèse Réciproquement, $\mathrm{Id}_{\mathbb{Q}(\sqrt{3})}$ est bien un automorphisme de ce corps, ainsi que

$$\psi \ : a + b\sqrt{3} \mapsto a - b\sqrt{3}$$

(vérifications laissées au lecteur).

Remarque : ψ est bien définie en tant qu'application par existence mais aussi *unicité* de l'écriture d'un élément de $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ sous la forme $a + b\sqrt{3}$, avec $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$.

Corrigé 329 (Une caractérisation des corps)

Il s'agit encore une fois de montrer que tout élément non nul x admet un inverse. Considérons l'idéal principal x^2A. Comme cet idéal est premier, et que $x^2 = x \cdot x$, on a $x \in x^2A$, *i.e.* il existe $y \in A$ tel que $x = x^2y$. on aimerait maintenant simplifier par x. il suffirait pour cela que x soit simplifiable, *i.e.* qu'il ne soit pas un diviseur de zéro.

Or par hypothèse, l'idéal $\{0\}$ est premier, ce qui se traduit par le fait que A n'admette pas de diviseur de zéro, d'où le résultat.

Corrigé 330 (Corps algébriquement clos)

Soit K un corps fini. Le polynôme non constant $\prod_{x \in K}(X - x) + 1$ n'a pas de racine dans K, ce corps n'est donc pas algébriquement clos.

Le résultat est établi par contraposition.

CHAPITRE 31

Oraux 8 : anneaux, corps, algèbres (énoncés)

Aller aux corrigés 32

Exercice 331

(CCP MP 08) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Factoriser en produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$: $X^{2n} - 2\cos(\theta)X^n + 1$.

Exercice 332

(CCP) Existe-t-il $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a^2 + b^2 = 2011$?

Exercice 333

(CCP) Soient $n \geqslant 2$ et, pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.

1 Montrer que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2 Exprimer $1, X, \ldots, X^n$ dans la base précédente.

Exercice 334

(Centrale PSI 10) Soit A un anneau, a et b dans A tels que $1 + ab$ est inversible. Montrer que $1 + ba$ est inversible d'inverse $1 - b(1+ab)^{-1}a$.

Exercice 335

(Centrale PSI 10) Soit A un anneau non nul et $M = \{a \in A, a^2 = a\}$. On suppose que M est fini. Montrer que son cardinal est pair.

Exercice 336

Déterminer le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Ce groupe est-il cyclique ?

Exercice 337

Soit $n \geqslant 2$. Calculer le reste de la division euclidienne de $(n-1)!$ par n.

Exercice 338

(Mines MP) Si p est un nombre premier, quel est le nombre de carrés de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

Exercice 339

1 Montrer que $X^3 - 2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
On désigne par α une de ses racines complexes, et on pose

$$A = \{a + b\alpha + c\alpha^2, (a, b, c) \in \mathbb{Q}^3\}$$

2 Montrer que A est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Exercice 340

Soit $A = \{a + ib\sqrt{2};\ (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.
1 Montrer que A est un anneau intègre.
2 Montrer qu'on peut définir une pseudo division euclidienne dans A (sans unicité) : pour tous $x \in A$ et $y \in A \setminus \{0\}$, il existe $(q, r) \in A^2$ tels que $x = qy + r$ et $|r| < |y|$.

Exercice 341

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ tel que $x + y + z = 0$. Montrer :

$$\frac{x^5 + y^5 + z^5}{5} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3}.$$

Exercice 342

(Centrale PSI 10) Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$. On suppose que toutes ses racines ont une partie imaginaire strictement négative. Montrer que le polynôme $Q(X) = \mathrm{Re}(a_0) + \mathrm{Re}(a_1) X + \cdots + \mathrm{Re}(a_n) X^n$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 343

Les groupes multiplicatifs $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^*$ et $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*$ sont-ils isomorphes ?

Exercice 344

Soient A l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ et G l'ensemble des éléments inversibles de A.

1 Vérifier que G est un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{R}^*$.

2 Soit $x+y\sqrt{7} \in G$. Donner, au signe près, une formule pour $\left(x+y\sqrt{7}\right)^{-1}$. En déduire un élément non trivial de G.

3 Pour $x+y\sqrt{7} \in G$, on pose $\Phi(x+y\sqrt{7}) = (\ln|x+y\sqrt{7}|, \ln|x-y\sqrt{7}|)$.
Montrer que Φ est un morphisme de G dans $(\mathbb{R}^2,+)$ dont on précisera le noyau. Montrer que $\operatorname{Im}\Phi$ est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^2$.

4 En déduire que $G = \{\pm(8+3\sqrt{7})^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Exercice 345

Soit p un nombre premier impair. Dénombrer les $(x, y) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ tels que : $x^2 + y^2 = 1$.

Exercice 346

Soit θ l'unique racine réelle de $P = X^3 - X + 1$. Montrer que $\mathbb{Q}(\theta)$ est un corps. Calculer l'inverse de $\theta^2 - 2\theta - 3$.

Exercice 347

1 Décrire les inversibles de l'anneau $A = \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

2 Un élément M non inversible de A est dit irréductible si l'égalité $M = UV$ avec U et V dans A implique que l'une des deux matrices U, V est un inversible de A. Une matrice de A de déterminant nul peut-elle être irréductible ?

3 Caractériser les irréductibles de A.

Exercice 348

(X MP 06) Existe-t-il un isomorphisme d'algèbres entre $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$?

Exercice 349

On définit par l'égalité

$$\Phi_n(X) \overset{def}{=} \prod_{k\wedge n} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$$

le *polynôme cyclotomique* d'ordre n, le produit portant sur les entiers $k \in [\![1,n]\!]$ premiers avec n.

1 Montrer que $\prod_{k|n} \Phi_d(X) = X^n - 1$, le produit ne portant que sur les diviseurs positifs de n.

2 Montrer que $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$.

CHAPITRE 32

Oraux 8 : anneaux, corps, algèbres (corrigés)

Aller aux énoncés 31

Corrigé 331 (Décomposition en produit d'irréductibles)

Corrigé 332 (2011 est-il la somme de deux carrés d'entiers ?)

Corrigé 333 (Une base de $\mathbb{R}_n[X]$, dans laquelle on exprime la base canonique)

Corrigé 334 (D'un inverse à un autre)

On vérifie par simple calcul que l'élément proposé est bien inverse (à droite et à gauche) de $1+ba$. Par exemple à droite :

$$(1+ba)(1-b(1+ab)^{-1}a) = 1-b(1+ab)^{-1}a+ba+bab(1+ab)^{-1}a = 1+ba-b(1+ab)(1+ab)^{-1}a = 1.$$

Remarque : pour trouver un tel inverse, on peut partir de la relation formelle (qui n'a pas de vrai sens)

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots,$$

l'appliquer pour $x = ab$ et $x = ba$, et on tombe sur la relation voulue. Ceci est à faire au brouillon, ou on précise que c'est un jeu purement formel, destiné à retrouver l'inverse.

Corrigé 335 (Parité du nombre d'idempotents dans un anneau)

Par simple calcul, si $a \in M$, alors $1-a \in M$. L'application $\varphi\ : a \mapsto 1-a$ de M dans M est bijective, car involutive. Si elle n'a pas de point fixe, on peut apparier les éléments de M images l'un de l'autre par φ par paires, fournissant le résultat. Si elle a un point fixe, cela signifie que 2 a un inverse a_0 dans M, et on en déduit que 2 appartient aussi à M (en inversant la relation $a_0^2 = a_0$), donc que $4 = 2$, puis $2 = 0$, or 0 n'est jamais inversible dans un anneau non nul, c'est absurde.
Remarque : j'ai écrit 2 et 4 mais j'ai considéré rigoureusement $1_A + 1_A$ et $1_A + 1_A + 1_A + 1_A$ respectivement.

Corrigé 336 (Inversibles de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ (Mines MP 08))

Corrigé 337 (Calcul de division euclidienne (Centrale MP 08))

Corrigé 338 (Nombre de carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$)

Le cas où $p = 2$ est trivial (et la réponse est alors 2).
Traitons le cas où p est impair. L'application carré est un morphisme du groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, de noyau $\{\pm 1\}$, il y a donc $\frac{p+1}{2}$ carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Corrigé 339 (Un polynôme irréductible sur $\mathbb{Q}$ de degré 3)

1 Comme X^3-2 est de degré 3, il est irréductible sur $\mathbb{Q}$ si et seulement si il n'a pas de racine rationnelle, ce que l'on vérifie aisément.

Attention ! $(X^2+1)^2$ est sans racine réelle, mais n'est pas irréductible sur $\mathbb{R}$.

2 A est clairement une partie de $\mathbb{C}$, comprenant 1, stable par différence.

De plus, si P est un polynôme à coefficients rationnels, alors $P(\alpha) \in A$: en effet, il suffit pour l'observer d'effectuer la division euclidienne de P par X^3-2, puis d'évaluer la relation obtenue en α (on rappelle que le reste est également à coefficients rationnels).

Cela permet de montrer que A est stable par produit.

Enfin, soit $(a,b,c) \in \mathbb{Q}^3$ tel que $a+b\alpha+c\alpha^2 \neq 0$. En particulier, $(a,b,c) \in \mathbb{Q}^3$. D'après la question précédente, X^3-2 et $a+bX+cX^2$ sont premiers entre eux. En évaluant une relation de Bézout entre ces polynômes en α, on constate que $a+b\alpha+c\alpha^2$ est inversible dans A.

A est bien un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Corrigé 340 (Pseudo division euclidienne)

Corrigé 341 (Une curiosité polynomiale (Centrale PSI 10))

On utilise les relations coefficients racines : soit P le polynôme unitaire de degré 3 dont les racines sont x, y et z :

$$P = X^3 + \sigma_2 X - \sigma_3,$$

où $\sigma_2 = xy+xz+yz$ et $\sigma_3 = xyz$ (et $\sigma_1 = x+y+z = 0$). On a $x^2+y^2+z^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = -2\sigma_2$.

Pour exprimer $x^3+y^3+z^3$ et $x^5+y^5+z^5$ en fonction de σ_2 et σ_3, on calcule les restes de X^3 et X^5 par P. On trouve respectivement $-\sigma_2 X + \sigma_3$ et $\sigma_3 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_2\sigma_3$, d'où, en évaluant en x, y et z puis en sommant :

$$x^3+y^3+z^3 = 3\sigma_3 \quad \text{et} \quad x^5+y^5+z^5 = -2\sigma_2\sigma_3 - 3\sigma_2\sigma_3 = -5\sigma_2\sigma_3,$$

d'où le résultat annoncé.

Corrigé 342 (Polynôme scindé en prenant les parties réelles des coefficients)

Corrigé 343 (Isomorphie de groupe d'unités (Mines MP 07))

Corrigé 344 (Anneau dont l'ensemble des inversibles est monogène)

Corrigé 345 (Points sur le « cercle unité » dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$)

Corrigé 346 (Calculs dans une extension de $\mathbb{Q}$ de degré 3)

Corrigé 347 (Irréductibles d'un anneau de matrices)

Corrigé 348 ($\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ sont-ils isomorphes en tant qu'algèbres ?)

Non, car l'élément unité de $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ admet une racine carrée, pas celui de $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.

Corrigé 349 (Polynômes cyclotomiques (X MP 07))

CHAPITRE 33

TD 9 : fonctions vectorielles (énoncés)

Aller aux corrigés 34

1. Fonctions vectorielles

Exercice 350

On suppose que E est une $\mathbb{K}$-algèbre normée de dimension finie, et que $f : I \to E$ est dérivable, à valeurs dans l'ensemble des éléments inversibles de E.
On introduit la fonction $g : I \to E$, qui, à tout $t \in I$, associe $(f(t))^{-1}$.
Vérifier que g est dérivable sur I, et que, pour tout $t \in I$:

$$g'(t) = -g(t)f'(t)g(t)$$

Exercice 351

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\exp(A) - \exp(B) = \int_0^1 \exp(sA)(A-B)\exp((1-s)B)\mathrm{d}s.$$

Exercice 352

Pour tout $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$, on pose :

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & & & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & & \\ \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & x & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \dots & \dots & \frac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}$$

Calculer $\Delta_n(x)$.

2. Formules de Taylor

Exercice 353

Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$, à valeurs réelles, dérivable $n+1$ fois sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Exercice 354

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) = 1$, et : $\forall\, x \geqslant \frac{1}{2},\ f(x) = 0$.

1 Montrer que $\sup\limits_{\mathbb{R}^+} \left| f^{(n)} \right| \geqslant 2^n n!$.

2 Montrer que pour $n \geqslant 1$, $\sup\limits_{\mathbb{R}^+} \left| f^{(n)} \right| > 2^n n!$

Exercice 355

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que :

(1) $\forall\, n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$.

(2) $\exists \lambda > 0, \forall\, n \in \mathbb{N}, \sup\limits_{\mathbb{R}} \left| f^{(n)} \right| \leqslant \lambda^n n!$.

1 Montrer que f est nulle sur l'intervalle $]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}[$, puis sur $\mathbb{R}$.

2 Montrer que la première condition n'est pas suffisante pour que f soit nulle.

3. Arcs paramétrés

Exercice 356

Étude et représentation

1 de la *cycloïde*

$$f \ : t \mapsto (t - \sin t, 1 - \cos t)$$

2 de la *cardioïde*

$$f \ : t \mapsto (2\cos t - \cos 2t, 2\sin t - \sin 2t)$$

3 de l'*astroïde*

$$f : t \mapsto \left(\cos^3 t, \sin^3 t\right).$$

Exercice 357

Étude et représentation de

1 $f_0 \; : t \mapsto \left(\frac{t^3}{t^2-1}, \frac{t^2-2t}{t-1}\right)$.

2 $f_1 \; : t \mapsto \left(\frac{t^2}{(t-2)(t+1)}, \frac{t^2(t+2)}{t+1}\right)$.

3 $f_2 \; : t \mapsto \left(\frac{t^3}{t^2-1}, \frac{1}{t^3-t}\right)$.

Exercice 358

Étude et représentation

1 de la *courbe de Lissajous* $f : t \mapsto (\cos 3t, \sin 2t)$.

2 de $g \; : t \mapsto (2\,\cos(t), \sin(2t))$.

3 (Mines MP 10) de la *deltoïde* $h \; : t \mapsto (2\,\cos(t) + \cos(2t), 2\,\sin(t) - \sin(2t))$.

CHAPITRE 34

TD 9 : fonctions vectorielles (corrigés)

Aller aux énoncés 33

1. Fonctions vectorielles

Corrigé 350 (Dérivée de l'inverse d'une fonction inversible)

Corrigé 351 (Différence entre deux exponentielles matricielles)

Corrigé 352 (Calcul d'un déterminant par dérivation)

2. Formules de Taylor

Corrigé 353 (Égalité de Taylor-Lagrange)

Corrigé 354 (Fonction nulle sur un voisinage de $+\infty$)

Corrigé 355 (Fonction dont les dérivées sont nulles en 0)

3. Arcs paramétrés

Corrigé 356 (Étude d'arcs paramétrés classiques)

Corrigé 357 (Étude d'arcs paramétrés rationnels)

1

2 Généralités L'arc f est défini sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$, et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine. On ne constate pas de réduction du domaine d'étude.

Pour tout $t \in \mathcal{D}$, on a :

$$x'(t) = \frac{-t(t+4)}{(t-2)^2(t+1)^2} \quad \text{et} \quad y'(t) = \frac{t(2t^2+5t+4)}{(t+1)^2}.$$

On en déduit les variations des fonctions coordonnées.

Points remarquables Le seul point stationnaire est celui d'instant 0, la tangente est verticale à l'instant -4

Les points d'instants 0, et -2 se situent sur l'axe des abscisses.

Étude du point singulier : c'est le point d'instant 0, qui se situe en l'origine. L'abscisse (resp. l'ordonnée) est négative (resp. positive) au voisinage de 0. En outre, on vérifie facilement que y/x est de limite -4 en 0. La courbe admet donc une tangente d'équation $y = -4x$ à l'instant 0.

Branches infinies Au voisinage de 2, la courbe présente une asymptote horizontale d'équation $y = 16/3$. Au voisinage de $\pm\infty$, on a une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

Dans ces deux cas, les variations des fonctions coordonnées permettent aisément de situer courbe et asymptotes.

La branche infinie au voisinage de -1 est plus délicate à étudier, car les deux fonctions coordonnées tendent vers $\pm\infty$ en $-1^{\pm}$. On trouve sans difficulté que

$$\lim_{t \to -1} \frac{y(t)}{x(t)} = -3$$

On cherche donc à déterminer l'éventuelle limite de $y(t) + 3x(t)$ lorsque t tend vers -1.

Pour tout $t \in \mathcal{D}$, $y(t) + 3x(t) = \frac{(t-1)t^2}{t-2}$: cette quantité tend donc vers $2/3$ lorsque t tend vers -1. La courbe admet donc une asymptote d'équation $y = -3x + 2/3$ en -1. Enfin, pour tout $t \in \mathcal{D}$,

$$y(t) + 3x(t) - 2/3 = \frac{3t^2(t-1) - 2(t-2)}{3(t-2)} = \frac{3t^3 - 3t^2 - 2t + 4}{3(t-2)} = \frac{(t+1)(3t^2 - 6t + 4)}{3(t-2)},$$

cette quantité est du signe opposé de $t + 1$ lorsque t est suffisamment proche de -1. La courbe est localement au-dessus de son asymptote en -1^-, et en dessous en -1^+.

Étude des points multiples On peut d'emblée écarter l'origine, correspondant uniquement à l'instant 0. On cherche deux instants distincts t et t' tels que $x(t) = x(t')$ et $y(t) = y(t')$, *i.e.*

$$\begin{cases} \frac{t^2}{(t-2)(t+1)} & = & \frac{t'^2}{(t'-2)(t'+1)} \\ \frac{t^2(t+2)}{t+1} & = & \frac{t'^2(t'+2)}{t'+1} \end{cases}$$

En formant le quotient la seconde relation par la première (on a écarté l'instant 0), on obtient la relation $t^2 - 4 = (t')^2 - 4$, *i.e.* $t = -t'$ (car $t \neq t'$). Cela induit la relation $(t-2)(t+1) = (t'-2)(t'+1)$, puis $t = t'$: la courbe n'admet pas de point multiple.

Support

Tous ces renseignements permettent de tracer le support de la courbe : on trace les asymptotes, les points remarquables, et on suit l'évolution temporelle.

3

Corrigé 358 (Étude d'arcs paramétrés trigonométriques)

CHAPITRE 35

Oraux 9 : fonctions vectorielles (énoncés)

Aller aux corrigés 36

Exercice 359

1 Tracer la courbe paramétrée : $(x(t), y(t)) = (\sin^3(t), \cos^3(t))$.

2 Exprimer l'équation de la tangente en un point $M(t_0)$ de la courbe.

Exercice 360

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples. Montrer que P ne peut avoir deux coefficients consécutifs nuls.

Exercice 361

(Mines-Ponts PSI 10) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ pair, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA = -A$, $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Calculer $\det(A + tJ)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 362

Soit $n \in \mathbb{N}$ impair et $\Phi\ : \mathbb{R} \to \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ une fonction dérivable. Montrer que pour tout réel t, $\Phi'(t) \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 363

(Centrale MP 08, Mines PC 10) Trouver les droites à la fois tangentes et normales à la courbe $\Gamma\ : x(t) = 3t^2, y(t) = 2t^3$.

Exercice 364

(Centrale MP 08)
Soit C l'arc paramétré : $x(t) = \frac{t}{1+t^4}, y(t) = \frac{t^3}{1+t^4}$.

1 Tracer cette courbe.

2 Montrer que C est un arc simple (*i.e.* injectif).

3 Donner l'équation de la tangente D_t à C au point $M(t) = (x(t), y(t))$.

4 Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur t pour que D_t coupe C en deux points $M(t_1)$ et $M(t_2)$ distincts de $M(t)$. Calculer $t_1 + t_2$ et $t_1 t_2$.

5 Donner les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle $OM(t_1)M(t_2)$.

Exercice 365

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ de classe C^1. Montrer qu'il existe une suite (x_n) de réels telle que $(f'(x_n))$ tende vers 0.

CHAPITRE 36

Oraux 9 : fonctions vectorielles (corrigés)

Aller aux énoncés 35

Corrigé 359 (Astroïde)

Corrigé 360 (Propriété des coefficients d'un polynôme simplement scindé)

Corrigé 361 (Dérivée d'une fonction définie par un déterminant)

Le déterminant étant invariant par transposition, et n-linéaire, $\det(A+tJ) = \det({}^t(A+tJ)) = \det(-A+tJ) = (-1)^n \det(A-tJ) = \det(A-tJ)$.

La fonction $t \mapsto \det(A+tJ)$ est donc paire, or elle est en outre polynomiale, de degré au plus 1 (retrancher la première colonne à toutes les autres) : elle est constante, de valeur $\det(A)$.

Pour tout réel t, $\det(A+tJ) = \det(A)$.

Corrigé 362 (Fonction à valeurs dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ *(X MP 08)*)

Corrigé 363 (Droites tangentes et normales à une même courbe)

Corrigé 364 (Étude poussée d'un arc paramétré)

Soit C l'arc paramétré : $x(t) = \frac{t}{1+t^4}, y(t) = \frac{t^3}{1+t^4}$.

1 L'arc C est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Les fonctions coordonnées étant impaires, il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}_+$ (une fois le support de l'arc restreint obtenu, on lui adjoindra son symétrique par rapport à l'origine). De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $M(1/t)$ se déduit de $M(t)$ par symétrie par rapport à la première bissectrice : il suffit donc d'étudier l'arc sur $[0,1]$ (on adjoindra au support obtenu son symétrique par rapport à la première bissectrice).

Pour tout $t \in [0,1]$,

$$f'(t) = \left(\frac{1-3t^4}{(1+t^4)^2}, \frac{t^2(3-t^4)}{(1+t^4)^2} \right).$$

En particulier, l'arc est régulier.

L'arc restreint $([0,1], f)$ ne présente pas de branche infinie.

x est croissante sur $[0, 3^{-1/3}]$, décroissante sur $[3^{-1/3}, 1]$, tandis que y est croissante sur $[0,1]$.

On est donc en mesure de tracer l'arc C.

2 Supposons que t_1 et t_2 soient deux instants distincts en lesquels les points physiques coïncident. Ces instants sont nécessairement non nuls (l'origine n'est atteinte que pour l'instant nul), et l'on peut donc évaluer y/x en t_1 et t_2, ce qui montre que $t_1^2 = t_2^2$, puis conduit à la contradiction $t_1 = t_2$ en revenant à $x(t_1) = x(t_2)$.

L'arc C est donc simple.

3 Soit $t \in \mathbb{R}$. La droite D_t est dirigée par $f'(t)$, soit encore par $(1-3t^4, t^2(3-t^2))$. Une équation de D_t est donc

$$\begin{vmatrix} x - \frac{t}{1+t^4} & 1-3t^4 \\ y - \frac{t^3}{1+t^4} & t^2(3-t^4) \end{vmatrix} = 0,$$

soit encore, après simplification :

$$\boxed{t^2(3-t^4)x-(1-3t^4)y=2t^3.}$$

4 Soit $t\in\mathbb{R}$. Nous souhaitons que l'équation

$$t^2(3-t^4)\frac{t_0}{1+t_0^4}-(1-3t^4)\frac{t_0^3}{1+t_0^4}=2t^3$$

admette deux solutions distinctes t_1 et t_2 dans $\mathbb{R}\setminus\{t\}$.

En s'aidant de Maple, on arrive à la condition équivalente que le polynôme

$$2t^3X^2+(1+t^4)X+2t$$

admette deux racines réelles distinctes, différentes de t.

t est racine de ce polynôme si et seulement si $t=0$, cas qu'il faut donc écarter. De plus, le discriminant Δ de ce polynôme vaut t^8-14t^4+1, et est donc strictement positif si et seulement si $t^4\in]-\infty,7-4\sqrt{3}[\cup]7+4\sqrt{3}[$, soit $t\in]-\infty,-\left(7+4\sqrt{3}\right)^{1/4}[\cup]-\left(7-4\sqrt{3}\right)^{1/4},0[\cup]\left(7-4\sqrt{3}\right)^{1/4}[\cup]\left(7+4\sqrt{3}\right)^{1/4},+\infty[$.

Remarque : on peut, après calcul, observer que $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{1/4}=\frac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$, et que $\left(7-4\sqrt{3}\right)^{1/4}=\frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

Dans un tel cas, on a $t_1t_2=\frac{1}{t^2}$ et $t_1+t_2=-\frac{1+t^4}{2t^3}$.

5 On conserve les notations de la question précédente.

Une équation cartésienne de la médiatrice de $[OM(t_1)]$ est

$$\begin{vmatrix} x-\frac{x(t_1)}{2} & -y(t_1)\\ y-\frac{y(t_1)}{2} & x(t_1)\end{vmatrix}=0,$$

soit $xx(t_1)+yy(t_1)=\frac{t_1^2}{2(1+t_1^4)}$, soit encore

$$x+yt_1^2=\frac{t_1}{2}.$$

De même pour la médiatrice de $[OM(t_2)]$. On trouve pour intersection le point de couple de coordonnées $\left(\frac{t_1t_2}{2(t_1+t_2)},\frac{1}{2(t_1+t_2)}\right)$, soit encore, compte tenu de la question précédente

$$\left(\frac{-t}{1+t^4},\frac{-t^3}{1+t^4}\right).$$

Le centre du cercle circonscrit au triangle $OM(t_1)M(t_2)$ est donc le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'origine, soit encore $M(-t)$.

Corrigé 365 (Suite de valeurs de la dérivée tendant vers l'infini)

CHAPITRE 37

TD 10 : suites et séries de fonctions (énoncés)

Aller aux corrigés 38

1. Suites de fonctions

Exercice 366

Étudier la convergence simple, puis la convergence uniforme, des suites de fonctions définies par :

1 $f_n(x) = \frac{1}{1+(nx-1)^2}$.

2 $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$.

3 $f_n(x) = x^n(1-x)$.

4 $f_n(x) = nx^n(1-x)$.

5 $f_n(x) = n^3x^n(1-x)^4$.

6 $f_n(x) = \cos(x)^n \sin(x)^{2n}$.

Exercice 367

Vérifier que la suite (f_n), où

$$f_n(x) = n\sin\sqrt{4\pi^2n^2+x^2},$$

pour tout réel x, tout entier naturel n, converge uniformément sur $[0,a]$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 368

1 Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, $f(1)=0$, $f_n(x) = x^n f(x)$. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.

2 Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$, telles que $|f| \leqslant 1$ et, pour tout $x \in [a,b]$,

$$|f(x)| = 1 \Rightarrow g(x) = 0.$$

Montrer que $(f^n g)$ converge uniformément sur $[a,b]$.

Indication : pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, montrer que $U \overset{def}{=} \{x \in [a,b], |g(x)| < \varepsilon\}$ est un ouvert relatif de $[a,b]$, et considérer $K \overset{def}{=} [a,b] \setminus U$.

Exercice 369

Soit I un segment contenu dans $]0,1[$.

1 Soit φ l'application $x \mapsto 2x(1-x)$. Étudier la convergence sur I de la suite de fonctions (φ_n), où $\varphi_1 = \varphi$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_{n+1} = \varphi \circ \varphi_n$.

2 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe une suite de fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{Z}$ convergeant uniformément vers f sur I.

Exercice 370

Soit (f_n) une suite de fonctions convexes sur le segment $[a,b]$ qui converge simplement vers f. Montrer que la convergence est uniforme sur tout compact de $]a,b[$.

Exercice 371

Soit V un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de V qui converge simplement sur $[0,1]$. Montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 372

Sur $[0,1]$, on considère (p_n) par $p_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], \quad p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}(x - p_n(x)^2).$$

Montrer que (p_n) converge uniformément sur $[0,1]$, et donner sa limite.

Exercice 373

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ telles que $f_0 = f$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], \quad f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\left(f_n\left(\frac{x}{2}\right) + f_n\left(\frac{x+1}{2}\right)\right).$$

Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers une application constante.

Exercice 374

Étudier la convergence de la suite de fonctions $(f_n) \in \left(\mathbb{R}^{[0,1]}\right)^{\mathbb{N}}$, où $f_{n+1}(x) = 2\int_0^x \sqrt{f_n(t)}\mathrm{d}t$.

Exercice 375

Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions continues. On suppose que cette suite converge simplement vers une fonction f et que pour toute suite (x_n) de $[0,1]$ convergente de limite $x \in [0,1]$, la suite $(f_n(x_n))$ converge vers $f(x)$.

1 Prouver la continuité de f.

2 En déduire que la convergence est uniforme.

Exercice 376

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit $f \in E$. Pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, on définit $f_\tau : x \mapsto f(x+\tau)$. On suppose que $V = \mathrm{Vect}(f_\tau, \tau \in \mathbb{R})$ est de dimension finie. Que dire de f ?

Exercice 377

1 Soit $E \subset \mathbb{R}$ dénombrable et (f_n) une suite de fonctions de E dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout n et tout x de E, $|f_n(x)| \leqslant 1$. Montrer qu'il existe une sous-suite de (f_n) qui converge simplement vers une fonction $f : E \to \mathbb{R}$.

2 Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ dans $[-1,1]$. Montrer qu'il existe une sous-suite de (f_n) qui converge simplement vers une fonction $f : \mathbb{R} \to [-1,1]$.

2. Séries de fonctions

Exercice 378

Calculer $I = \int_0^{\pi/2} \cos(\cos(\theta))\,\mathrm{ch}(\sin(\theta))\mathrm{d}\theta$.

Exercice 379

Trouver la limite de

$$u_n \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n$$

Indication : on pourra introduire une série de fonctions $\sum v_k$, et utiliser le théorème de la double limite en $+\infty$.

Exercice 380

1 Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de $S_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}(nx)}$.

2 Même question pour $S_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}^2(nx)}$.

Exercice 381

Étudier $\sum_{n\geqslant 1} f_n \ : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, où

$$\forall\, n \geqslant 1, \forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n n}{x^2+n^2}.$$

Exercice 382

Montrer : $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{x}{n^2}\right) \sim_{+\infty} \pi\sqrt{x}$.

Exercice 383

Pour $n \geqslant 2$, on pose

$$f_n \ : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\sqrt{x}\ln(n)}{1+n^2x} \end{array}$$

Trouver un équivalent de $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ en $+\infty$.

Exercice 384

Pour $x \in \mathbb{R}$, $n \geqslant 2$, on pose $f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$.

1 Donner le domaine de convergence (simple) de $\sum f_n$. On note φ la somme.

2 Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3 La série $\sum f_n$ converge-t-elle normalement ?

4 φ est-elle continue en 0 ?

5 Y a-t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 385

On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+n^2}$.

1 Donner le domaine de définition de f.

2 Y a-t-il continuité ?

3 Y a-t-il convergence normale sur $\mathbb{R}$?

4 Donner la limite de f en $+\infty$.

5 Y a-t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}$?

Exercice 386

Soit

$$f_n : \begin{array}{ccc}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x(1-x)^n}{\ln(x)} \end{array}$$

Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément mais non normalement sur $]0,1[$.

Exercice 387

Trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telles que, pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{f(x^n)}{2^n}$.

Exercice 388

Soit $\alpha \in [1,\infty[$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_\alpha(n) = \sum_{d|n} d^\alpha$. On pose $S_\alpha(n) = \sigma_\alpha(1) + \cdots + \sigma_\alpha(n)$.

1 Prouver que $S_\alpha(n) = \sum_{k=1}^n E(n/k)k^\alpha$.

2 Montrer qu'on a l'équivalent suivant quand $n \to +\infty$:

$$S_\alpha(n) \sim \frac{\zeta(\alpha+1)}{\alpha+1} n^{\alpha+1}.$$

3 En déduire un équivalent quand $\alpha \in \mathbb{N}^*$ de $L_\alpha(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha t^n}{1-t^n}$, lorsque $t \to 1^-$.

Exercice 389

Montrer que $\sum \frac{\sin(nx)}{n}$ converge simplement, puis montrer la convergence uniforme sur tout segment ne rencontrant pas $2\pi\mathbb{Z}$. Y a-t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}$?

CHAPITRE 38

TD 10 : suites et séries de fonctions (corrigés)

Aller aux énoncés 37

1. Suites de fonctions

Corrigé 366 (Convergence simple ou uniforme de suites de fonctions)

1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, si $x = 0$, alors $f_n(x) = 1$, donc $(f_n(x))$ converge vers 1. Si $x \neq 0$, alors $(f_n(x))$ tend vers 0, donc la suite (f_n) tend simplement vers l'indicatrice de $\{0\}$, que nous noterons g.

La convergence n'est pas uniforme, car chaque f_n est continue, mais pas g.

Autre raison : En prenant $x_n = 1/n$, $1 = |f_n(x_n) - g(x_n)| \leqslant \|f_n - g\|_\infty$, donc la suite $(\|f_n - g\|_\infty$ ne tend pas vers 0.

2 f_n est définie sur $\mathbb{R}$ si n est pair, sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ si n est impair. On travaille donc sur cette dernière partie de $\mathbb{R}$.

La suite de fonction (f_n) converge simplement vers g, valant 1 sur $]-1, 1[$, valant $1/2$ en 1, et 0 sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

g n'étant pas continue alors que chaque f_n l'est, la convergence n'est pas uniforme.

3 Chaque f_n est bien sûr définie sur $\mathbb{R}$, mais il n'y a convergence simple que sur $]-1, 1]$, vers la fonction nulle.

Bien que g soit continue, la convergence n'est pas uniforme, car $\|f_n\|_{\infty,]-1,1]} = 2$.

Remarque : on pourrait se demander s'il y a convergence uniforme sur $[0, 1]$ par exemple. Une étude de fonction montre que sur cet intervalle, f_n est positive, et maximale en $\frac{n}{n+1}$:

$$\|f_n\|_{\infty,[0,1]} = f_n(n/(n+1)) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1},$$

de sorte que la convergence est bien uniforme sur $[0, 1]$.

4 C'est presque l'exemple précédent : on montre encore la convergence simple vers la fonction nulle sur $]-1, 1]$, et que la convergence n'est pas uniforme sur $]-1, 1]$.

Contrairement à l'exemple précédent, il n'y a pas convergence uniforme sur $[0, 1]$, puisque

$$\|f_n\|_{\infty,[0,1]} = f_n(n/(n+1)) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \to_n \frac{1}{e}$$

5 $f_n(x) = n^3 x^n (1-x)^4$.

6 $f_n(x) = \cos(x)^n \sin(x)^{2n}$.

Corrigé 367 (Exemple de convergence uniforme)

Corrigé 368 (Une convergence uniforme)

1 On revient à la définition formelle de la convergence (avec ε) : soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme $f(1)$ et que f est continue en 1, il existe $a \in]0, 1[$ tel que, pour tout $x \in [a, 1]$: $|f(x)| \leqslant \varepsilon$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\|f_n\|_{\infty,[a,1]} \leqslant \varepsilon$.

Par ailleurs, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\|f_n\|_{\infty,[0,a]} \leqslant a^n \|f\|_\infty$. Comme $a \in]0,1[$, il existe un rang N à partir duquel $\|f_n\|_{\infty,[0,a]} \leqslant \varepsilon$. Ainsi, à partir du rang N, $\|f_n\|_{\infty,[0,1]} \leqslant \varepsilon$, d'où le résultat.

2 En reprenant l'indication de l'énoncé, U est un ouvert relatif de $[a,b]$ (par continuité de g et car $]-\varepsilon,\varepsilon[$ est ouvert), donc K est une partie fermée du compact $[a,b]$, puis un compact. Sur K, $|f|$ est à valeurs dans $[0,1[$ (par l'hypothèse faite sur f et g), et continue, donc bornée et atteint ses bornes. Par conséquent, $\|f\|_{\infty,\mathbb{K}} < 1$. On obtient donc un rang N à partir duquel $\|f^n g\|_{\infty,K} \leqslant \varepsilon$. Comme $\|f^n g\|_{\infty,U} \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|f^n g\|_\infty \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$, puis le résultat.

Corrigé 369 (Théorème de Chudnosky)

Corrigé 370 (Convergence simple d'une suite de fonctions convexes)

Corrigé 371 (Convergence simple dans un espace de dimension finie)

Quitte à considérer $V + \mathbb{K}f$ au lieu de V, on peut supposer que $f \in V$.

L'idée est de montrer comment la connaissance des évaluations de $g \in V$ sur une certaine partie finie de $[0,1]$ permet de déterminer g. Pour tout $x \in V$, on introduit

$$\begin{array}{rccl} \varphi_x : & V & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \varphi(x) \end{array}$$

Cette application est une forme linéaire sur V, donc un élément du dual $V' = \mathcal{L}(V,\mathbb{R})$ de V. Comme V est de dimension finie, V' est également de dimension finie (et d'ailleurs $\dim(V) = \dim(V')$), et on peut donc trouver un sous-ensemble fini $\{x_1,\dots,x_p\}$ de $[0,1]$ tel que

$$\mathrm{Vect}(\varphi_{x_1},\dots,\varphi_{x_p}) = \mathrm{Vect}(\varphi_x, x \in [0,1])$$

Autrement dit, pour tout $x \in [0,1]$, il existe des réels $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ tels que

$$(\star) \quad \varphi_x = \lambda_1\varphi_{x_1} + \cdots + \lambda_p\varphi_{x_p}$$

Cette relation permet de prouver la séparation de

$$\begin{array}{rccl} N : & V & \to & \mathbb{R}_+ \\ & g & \mapsto & \sum_{i=1}^p |g(x_i)| \end{array}$$

Comme l'homogénéité et l'inégalité triangulaire sont claires, c'est une norme sur V, équivalente à la norme infinie puisque V est de dimension finie. Ainsi, (f_n) converge vers f pour la norme N, puis pour la norme infinie, d'où le résultat.

Remarque : *a posteriori*, f est bien un élément de V, puisque V est un fermé comme sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, et que (f_n) converge vers f dans $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ pour la norme infinie.

Corrigé 372 (Un exemple de convergence uniforme)

Pour l'étude de la limite simple, nous sommes amenés à fixer $x \in [0,1]$, puis à considérer la fonction $f\ : t \mapsto t + \frac{1}{2}(x - t^2)$. La suite $(p_n(x))$ est la suite de terme initial 1 et d'itératrice f. Comme f est croissante sur $[0,1]$, que $f(0) = \frac{1}{2}x$ et que $f(1)\frac{1+x}{2}$, $[0,1]$ est stable par f. De plus, $(p_n(x))$ est monotone car f est croissante sur $[0,1]$, et $p_0(x) = 1 \geqslant p_1(x)$, donc $(p_n(x))$ est décroissante.

La suite $(p_n(x))$ est décroissante et minorée, donc convergente, vers un point fixe de f par continuité de cette fonction : on trouve donc que $(p_n(x))$ tend vers $\sqrt{x}$: la suite de fonction (p_n) converge simplement vers la fonction racine carrée sur $[0,1]$, que nous noterons g

Pour étudier la convergence uniforme, On peut tenter de comparer $\|p_{n+1} - g\|_\infty$ et $\|p_{n+1} - g\|_\infty$. Pour tout $x \in [0,1]$, tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant p_{n+1}(x)-g(x) = p_n(x)-g(x)+\frac{1}{2}(g(x)^2-p_n(x)^2) = (p_n(x)-g(x))(1-\frac{1}{2}(g(x)+p_n(x))) \leqslant (1-\sqrt{x})(p_n(x)-$$

Corrigé 373 (Itérée d'une fonction par un opérateur)

Corrigé 374 (Étude de convergence d'une suite de fonctions)

Corrigé 375 (Condition suffisante de convergence uniforme)

Corrigé 376 (Espace de fonctions de dimension finie invariant par translation)

V est de dimension finie, donc la convergence simple y implique la convergence uniforme. De plus, on montre que V est stable par dérivation. V est donc constitué de combinaisons linéaires d'exponentielles-polynômes.

Corrigé 377 (Théorème de sélection de Helly)

2. Séries de fonctions

Corrigé 378 (Calcul d'intégrale par une série de fonctions)

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} i^n \frac{1+(-1)^n}{2\,n!} \cos(n\theta) \right) \mathrm{d}\theta \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} i^n \int_0^{\pi/2} \frac{1+(-1)^n}{2\,n!} \cos(n\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(2p)!} \cos(2p\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Corrigé 379 (Série de fonctions cachée)

Si de loin u_n ressemble au terme d'une somme de Riemann, l'exposant n nous dissuade d'exploiter cette piste.

Pour introduire une série de fonctions convergente, en écrivant que $u_n = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(n)$, il serait intéressant de réécrire les termes de la somme afin qu'ils décroissent, ou du moins tendent vers 0 lorsque k est grand, d'où le changement d'indice $k \leftarrow n-k$:

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n$$

puis l'introduction, pour tout $k \in \mathbb{N}$, de $v_k \ : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ tel que $v_k(n) = \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n$ si $k \leqslant n$ et $v_k(n) = 0$ si $k > n$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, tout $n \geqslant k$:

$$v_k(n) = \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{k}{n}\right)\right) \leqslant \exp(-n \cdot \frac{k}{n}) = e^{-k}$$

par croissance de l'exponentielle, et l'inégalité $\ln(1+x) \leqslant x$, valable pour tout $x \in]-1,+\infty[$, et provenant de la concavité du logarithme.

Pour $n < k$, on a $v_k(n) = 0$, de sorte que $\|v_k\|_{\infty,\mathbb{N}^*} = e^{-k}$.

Or la série géométrique $\sum e^{-k}$ est convergente (car $|e^{-1}| < 1$), d'où la convergence normale sur $\mathbb{N}^*$ de $\sum v_k$. Comme v_k a pour limite e^{-k} en $+\infty$, le théorème de la double limite assure que (u_n) converge vers $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k}$, c'est-à-dire vers $\frac{e}{e-1}$.

Corrigé 380 (Équivalents de séries de fonctions)

1 On fixe $x > 0$ (S_1 est impaire). Comme $\frac{1}{\mathrm{sh}(nx)} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et que $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série convergente à termes positifs, $S_1(x)$ est bien défini.

En 0, $\frac{1}{\mathrm{sh}(nx)} \sim_{x\to 0} \frac{1}{nx}$ mais $\sum \frac{1}{nx}$ diverge : pas de double limite.

L'application $g : t \mapsto \frac{1}{\mathrm{sh}(tx)}$ est continue, décroissante (pour $x > 0$) et intégrable sur $[1,+\infty[$ (car $t^2 g(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini). De plus, on sait calculer $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{sh}(tx)}$, on peut donc tenter une comparaison série-intégrale : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par décroissance de g :

$$\frac{1}{\mathrm{sh}((n+1)x)} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{sh}(tx)} \leqslant \frac{1}{\mathrm{sh}(nx)}$$

Comme les séries et l'intégrale convergent, on obtient, en sommant sur $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_1(x) - \frac{1}{\mathrm{sh}(x)} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{sh}(tx)} \leqslant S_1(x)$$

Or, en effectuant le changement $u = tx$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{sh}(tx)} = \frac{1}{x}\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{sh}(u)}$$

De plus, $\frac{1}{\mathrm{sh}(u)} \sim_{u\to 0} \frac{1}{u} > 0$, donc, par théorème d'intégration des relations de comparaison (de fonctions de signe constant), dans le cas de la divergence :

$$\int_x^1 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{sh}(u)} \sim_{x\to 0} \int_x^1 \frac{\mathrm{d}u}{u} = -\ln(x)$$

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{sh}(u)}$ est une constante, on obtient

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{sh}(tx)} \sim_{x\to 0} -\frac{\ln(x)}{x}$$

Comme $S_1(x) - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{sh}(tx)} = \mathrm{O}_{x\to 0}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}(x)}\right)$, et comme $\frac{1}{\mathrm{sh}(x)} = \mathrm{o}_{x\to 0}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$, on trouve :

$$S_1(x) \sim_{x\to 0} -\frac{\ln(x)}{x}$$

Remarque : en fait, comme g est décroissante, $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{sh}(tx)}$ a même nature que $\sum \frac{1}{\mathrm{sh}(nx)}$ (se démontre facilement à partir de la proposition sur la comparaison série-intégrale), donc une seule des deux convergences était nécessaire.

Remarque : cette méthode a fonctionné parce que l'écart entre la somme de la série et l'intégrale était bien négligeable devant l'intégrale.

Remarque : on pouvait bien sûr calculer explicitement $\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{sh}(u)}$, mais ce qui compte, c'est de connaître son ordre de grandeur, il est donc naturel d'essayer d'utiliser le théorème d'intégration des relations de comparaison.

Remarque : si on veut un équivalent valable pour x négatif également, on peut prendre $\frac{-\ln(|x|)}{x}$.

2 On passe sur la bonne définition de S_2 sur $\mathbb{R}^*$.

Pour S_2, on a $\frac{1}{\mathrm{sh}^2(nx)} \sim_{x\to 0} \frac{1}{n^2x^2}$, on peut donc tenter d'utiliser le théorème de la double limite à $\sum \frac{x^2}{\mathrm{sh}^2(nx)}$.

Pour tout $x > 0$, tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{sh}(nx) \geqslant nx$ (par convexité de sh sur $\mathbb{R}_+$), donc $\frac{x^2}{\mathrm{sh}^2(nx)} \leqslant \frac{1}{n^2}$. Cette majoration ne dépendant pas de $x \in \mathbb{R}_+^*$, et sachant que $\sum \frac{1}{n^2}$ (série de Riemann avec $2 > 1$), on en déduit la convergence normale donc uniforme de la série de fonctions considérée sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le théorème de la double limite s'applique, et comme $\frac{x^2}{\mathrm{sh}^2(nx)}$ tend vers $\frac{1}{n^2}$ lorsque x tend vers 0, on obtient

$$S_2(x) \sim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6x^2}$$

Remarque : la comparaison série-intégrale ne fonctionne pas, car l'écart entre série et intégrale est du même ordre que l'intégrale.

Corrigé 381 (Encore une étude de somme de série de fonctions)

L'expression incite à utiliser le critère spécial des séries alternées. Vérifions qu'on peut bien l'appliquer : soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$;

$$\frac{n+1}{x^2+(n+1)^2} - \frac{n}{x^2+n^2} = \frac{(n+1)(x^2+n^2) - n(x^2+(n+1)^2)}{(x^2+n^2)(x^2+(n+1)^2)} = \frac{x^2 - n(n+1)}{(x^2+n^2)(x^2+(n+1)^2)}$$

donc, pour x fixé, la suite de terme général $\frac{n}{x^2+n^2}$ est décroissante à partir d'un certain rang (par exemple le rang $E(x)+1$). Elle tend aussi vers 0, donc la série $\sum f_n(x)$ est convergente. La somme S de $\sum f_n$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Il n'y a convergence normale sur auncune partie non vide de $\mathbb{R}$, puisqu'il n'y pas de convergence absolue (pour tout réel x fixé, $\frac{n}{x^2+n^2} \sim_n \frac{1}{n}$, terme général positif d'une série divergente).

On ne peut pas prouver la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ en utilisant le critère spécial des séries alternées, puisque le rang à partir duquel $\frac{n}{x^2+n^2}$ décroît avec n dépend de x.

En revanche, cela permet d'établir la convergence uniforme sur tout segment $[-a, a]$, car, pour tout $x \in [-a, a]$ et tout $n \geqslant a$, on peut appliquer la majoration du reste par le premier terme négligé :

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{n}{x^2+n^2} \leqslant \frac{1}{n}$$

puis $\|R_n\|_{\infty,[-a,a]} \leqslant \frac{1}{n}$, d'où la convergence uniforme sur $[-a, a]$.

Cela suffit à établir la continuité de la somme S sur $\mathbb{R}$ (chaque f_n est évidemment continue).

Remarque : une autre approche aurait consisté à regrouper les termes d'indices $2k+1$ et $2k+2$, pour montrer la convergence uniforme sur tout segment.

Remarque : on aurait aussi pu montrer la convergence uniforme sur tout segment de $\sum f_n'$, et appliquer le théorème de dérivation des séries de fonctions pour trouver la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur tout segment.

Corrigé 382 (Équivalent pour une série de fonctions, encore)

Notons, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n^2}\right)$. Pour tout $x > 0$, $f_n(x) \sim_{n\infty} \frac{x}{n^2}$ et $\sum \frac{x}{n^2}$ est absolument convergente, donc $\sum f_n(x)$ est (absolument) convergente.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé,

$$f_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n^2}\right) \sim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{n^2}\right) \sim_{x\to+\infty} \ln(x),$$

et $\sum \ln(x)$ est divergente pour $x > 0$ fixé (distinct de 1), le théorème de la double limite ne s'applique pas.

Remarque : le premier équivalent s'obtient en constatant que la différence de ces deux logarithmes tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

En revanche, l'application $g\ : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \ln\left(1+\frac{x}{t^2}\right)$ est continue, décroissante car $t \mapsto \frac{x}{t^2}$ est décroissante et $y \mapsto \ln(1+y)$ est croissante) et à valeurs positives pour $x > 0$ fixé : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln\left(1+\frac{x}{(n+1)^2}\right) \leqslant \int_n^{n+1} \ln\left(1+\frac{x}{t^2}\right) \leqslant \ln\left(1+\frac{x}{n^2}\right),$$

d'où, puisque g est intégrable sur $[1,+\infty[$ (g est continue, $g(t) \sim_{t\to\infty} \frac{x}{t^2}$ et $t \mapsto \frac{x}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ d'après l'exemple de Riemann), en sommant pour n décrivant $\mathbb{N}^*$:

$$f(x) - f_1(x) \leqslant \int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{x}{t^2}\right) \mathrm{d}t \leqslant f(x)$$

Intéressons-nous à $\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{x}{t^2}\right) \mathrm{d}t$.

On effectue une intégration par parties, en introduisant les fonctions u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$ données par

$$u(t) = \ln\left(1+\frac{x}{t^2}\right) \qquad \text{et} \qquad v(t) = t$$

pour tout $t \geqslant 1$. La fonction uv a bien une limite finie en $+\infty$, et on peut donc écrire

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{x}{t^2}\right) \mathrm{d}t &= [u(t)v(t)]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} t\left(\frac{2t}{t^2+x} - \frac{2}{t}\right) \mathrm{d}t \\
&= -\ln(1+x) + \int_1^{+\infty} \frac{2x}{t^2+x} \mathrm{d}t \\
&= -\ln(1+x) + 2\sqrt{x}\left[\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{x}}\right)\right]_1^{+\infty} \\
&= -\ln(1+x) + \pi\sqrt{x} - 2\sqrt{x}\arctan(1/\sqrt{x})
\end{aligned}$$

On a donc

$$f(x) = \pi\sqrt{x} - \ln(1+x) - 2\sqrt{x}\arctan(1/\sqrt{x}) + \mathrm{O}_{x\to+\infty}(\ln(1+x))$$

d'où l'équivalent cherché, puisque le premier terme est prépondérant devant les autres en $+\infty$.

Corrigé 383 (Un autre équivalent pour une somme de série de fonctions)

La fonction $f \overset{def}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est définie au voisinage de $+\infty$, car, pour $x > 0$ fixé, $f_n(x) \sim \frac{\ln(n)}{\sqrt{x}n^{3/2}}$ et $\sum \frac{\ln(n)}{\sqrt{x}n^{3/2}}$ est absolument convergente. En effet, il suffit, par comparaison à une série de Riemann, de trouver $\alpha > 1$ tel que

$$\frac{\ln(n)}{\sqrt{x}n^{3/2}} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \textit{i.e.}\ \ln(n) = \mathrm{o}(n^{3/2-\alpha})$$

donc tout $\alpha \in]1, 3/2[$ convient.

Pour $x > 0$ fixé, cet équivalent nous suggère de montre la convergence uniforme, voire normale, de $\sum \sqrt{x} f_n(x)$ sur un voisinage de $+\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $x > 0$

$$0 \leqslant \sqrt{x} f_n(x) = \frac{x\ln(n)}{1+n^2x} \leqslant \frac{x\ln(n)}{n^2x} \leqslant \frac{\ln(n)}{n^2}$$

cette majoration est indépendante de x, et est le terme général d'une série convergente, d'où la convergence normale annoncée, puis, par le théorème de la double limite :

$$f(x) \sim_{x\to+\infty} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}}{\sqrt{x}}$$

Corrigé 384 (Étude d'une série de fonctions)

1 Si $x<0$, $\sum f_n(x)$ diverge grossièrement.
Si $x=0$, $f_n(x)=0$ pour tout n, d'où la convergence.
Si $x>0$, $f_n(x)=\mathrm{o}_{n\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, d'où la convergence absolue puis la convergence.
φ est définie sur $\mathbb{R}_+$.

2 Pour montrer la continuité de φ sur $\mathbb{R}_+^*$, il suffit de montrer que la convergence est uniforme sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, car la continuité est une propriété locale, et car chaque f_n est évidemment continue.

Or, pout tout $x\in[a,b]$:

$$|f_n(x)|\leqslant\frac{be^{-na}}{\ln(n)},$$

donc $\|f_n\|_{\infty,[a,b]}\leqslant\frac{be^{-na}}{\ln(n)}$, puis $\|f_n\|_{\infty,[a,b]}=\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, d'où la convergence normale de $\sum f_n$ sur tout $[a,b]$.

Remarque : ce n'est pas demandé, mais y a-t-il convergence normale sur un voisinage $[a,+\infty[$ de $+\infty$? Il ne faut pas être impressionné par le facteur x : la fonction $h\ :x\mapsto xe^{-x}$ est continue, de limite nulle en $+\infty$, donc bornée. Soit M un majorant de $|h|$. On a

$$\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[}\leqslant\frac{Me^{-(n-1)a}}{\ln(n)}$$

d'où la convergence normale sur $[a,+\infty[$.

3 La convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}_+$, car $f_n(1/n)=\frac{1}{en\ln(n)}$ donc $\frac{1}{en\ln(n)}\leqslant\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+}$.

Or la série $\sum\frac{1}{n\ln(n)}$ est divergente, car $x\mapsto\frac{1}{x\ln(x)}$ est positive continue décroissante au voisinage de $+\infty$, donc $\sum\frac{1}{n\ln(n)}$ a même nature que $\int_2^\infty\frac{\mathrm{d}x}{x\ln(x)}$, qui est clairement divergente (une primitive de $x\mapsto\frac{1}{x\ln(x)}$ est $x\mapsto\ln(\ln(x))$).

Remarque : comment a-t-on eu l'idée d'évaluer en $1/n$? Ici, c'est facile, on a étudié les variations de f_n pour trouver en quel point elle était maximale.

4 Il s'agit de savoir si $\varphi(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.

On peut, pour tout $x>0$, effectuer l'encadrement

$$0\leqslant\varphi(x)\leqslant\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(2)}xe^{-nx}=\frac{xe^{-2x}}{\ln(2)(1-e^{-x})}$$

mais la fonction à droite ne tend pas vers 0 en 0.

Cependant, en étudiant plus attentivement les majorations effectuées, on constate que, pour tout $x>0$:

$$0\leqslant R_n(x)\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n)}xe^{-kx}=\frac{xe^{-(n+1)x}}{\ln(n)(1-e^{-x})}\leqslant\frac{1}{\ln(n)}\cdot\frac{x}{1-e^{-x}}$$

et comme $\psi\ :x\mapsto\frac{x}{1-e^{-x}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et admet une limite finie en 0, elle est bornée au voisinage de 0, d'où la convergence uniforme au voisinage de 0, puis la continuité de φ en 0 (héritée de celles des f_n).

5 En reprenant les dernières majorations de la question précédente, on a, pour tout $n\geqslant2$, et tout $x>0$:

$$0\leqslant R_n(x)\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n)}xe^{-kx}=\frac{xe^{-(n+1)x}}{\ln(n)(1-e^{-x})}\leqslant\frac{1}{\ln(n)}\cdot\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}$$

or $\gamma\ : x \mapsto \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, admet des limites finies en 0 et $+\infty$, et est donc bornée :

$$\|R_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} \leqslant \frac{\|\gamma\|_\infty}{\ln(n)}$$

d'où la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

Corrigé 385 (Toujours une étude de série de fonctions)

1 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, tout $n \in \mathbb{N}^*$, on notera $f_n(x) = \frac{x}{x^2+n^2}$.

f est clairement définie en 0, et, chaque f_n étant impaire, f est définie en $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si elle l'est en $-x$.

Soit $x > 0$. On a $f_n(x) \sim_n \frac{x}{n^2}$, or $\sum \frac{x}{n^2}$ est absolument convergente, donc $\sum f_n(x)$ également, puis f est définie en x : f est définie sur $\mathbb{R}$.

2 Chaque f_n étant continue, il suffit, pour établir la continuité de f, d'établir la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur tout segment de la forme $[-M, M]$, où $M > 0$.

Or, pour tout $x \in [-M, M]$, tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{M}{n^2}$$

donc

$$\|f_n\|_{\infty,[-M,M]} \leqslant \frac{M}{n^2}$$

dont on déduit la convergence normale (puis la convergence uniforme) de $\sum f_n$ sur $[M, M]$.

3 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}} \geqslant f_n(n) = \frac{1}{2n},$$

et $\sum \frac{1}{2n}$ est une série divergente à termes positifs, donc la série $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.

Remarque : : pourquoi évaluer en n ? Ici, $f_n'(x) = \frac{n^2-x^2}{(x^2+n^2)^2}$, donc f_n est maximale en n.

Remarque : : pour montrer que $\sum f_n$ ne convergeait pas normalement sur $\mathbb{R}$ en montrant qu'il existe une suite (x_n) telle que $\sum |f_n(x_n)|$ diverge, il fallait prendre une suite (x_n) non bornée (puiqu'il y a convergence normale sur tout segment).

4 Pour n fixé, $f_n(x) \sim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$, le théorème de la double limite ne semble donc pas adapté ici.

Le fait que f_n ne soit pas monotone empêche *a priori* d'utiliser une comparaison série-intégrale. Cependant, en introduisant, pour tout $n \in \mathbb{N}*$, l'application

$$g_n\ : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{x^2+n^2}$$

on a, pour tout $x > 0$, tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n(x) = xg_n(x)$, et on peut appliquer la comparaison série-intégrale à $\sum g_n$.

En effet, pour $x > 0$ fixé l'application $t \mapsto \frac{1}{x^2+t^2}$ est continue, décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (car $\frac{1}{x^2+t^2} = \mathrm{O}_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{x^2+(n+1)^2} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{x^2+t^2} \leqslant \frac{1}{x^2+n^2}$$

d'où, en sommant pour n décrivant $\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) - g_1(x) \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x^2+t^2} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x^2+t^2} = \frac{1}{x}\left[\arctan(t/x)\right]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2x} - \frac{1}{x}\arctan(1/x)$, de sorte que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) = \frac{\pi}{2x} - \frac{1}{x}\arctan(1/x) + \mathrm{o}_{x\to+\infty}(g_1(x))$$

or le premier terme du membre de droite est prépondérant devant les autres en $+\infty$, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) \sim_{x\to+\infty} \pi/(2x)$, puis $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ tend vers $\frac{\pi}{2}$ en $+\infty$.

5 Si la convergence était uniforme, alors (R_n) convergerait uniformément vers 0, donc $(R_{2n} - R_n)$ également. Or

$$\begin{aligned} \|R_{2n} - R_n\|_{\infty,\mathbb{R}} &\geqslant R_{2n}(n) - R_n(n) \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{k^2+n^2} \\ &\geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{(2n)^2+n^2} \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

d'où une absurdité.

Corrigé 386 (Une convergence uniforme non normale)

Étude de la (non) convergence normale : pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est dérivable sur $]0,1[$, et, pour tout $x \in]0,1[$:

$$f_n'(x) = \frac{((1-x)^n - nx(1-x)^{n-1})\ln(x) - (1-x)^n}{\ln(x)^2} = \frac{(1-x)^{n-1}}{\ln(x)^2}\left((1-(n+1)x)\ln(x) - (1-x)\right)$$

La détermination de $\|f_n\|_\infty$ est ardue, on va plutôt chercher une série minorante à termes positifs divergente sous la forme $\sum |f_n(x_n)|$. Pour que $(1-x_n)^n$ ne tende pas vers 0, il est naturel de faire tendre x_n vers 0. On prend $x_n = \frac{1}{n}$:

$$f_n(x_n) = \frac{(1-1/n)^n}{-n\ln(n)} \sim \frac{1}{-en\ln(n)},$$

d'où la divergence de $\sum |f_n(x_n)|$, puis la non convergence normale.

Étude de la convergence uniforme : pour tout $x \in]0,1[$, tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} f_k(x) = \frac{x}{\ln(x)} \cdot \frac{1-(1-x)^{n+1}}{1-(1-x)} = \frac{1-(1-x)^{n+1}}{\ln(x)}$$

d'où la convergence simple vers $x \mapsto \frac{1}{\ln(x)}$.

Reste à montrer que $\sup_{x\in]0,1[} \{(1-x)^{n+1}\ln(x)\}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Cela rentre dans le cadre de l'exercice 1 (et on recourt donc à ε dans une preuve à la Cesàro).

Corrigé 387 (Équation fonctionnelle et séries de fonctions)

Analyse. Soit f une telle fonction : continue sur le segment $[0,1]$, f est bornée et atteint ses bornes inférieure et supérieure, mettons en c et d respectivement.

Traitons d'abord le cas où c et d sont distincts de 1.

On a

$$f(c) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{f(c^n)}{2^n}$$

or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{f(c)}{2^n} \leqslant \frac{f(c^n)}{2^n}$ et

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{f(c)}{2^n} = f(c)$$

On a donc, nécessairement, $f(c^n) = f(c)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis $f(0) = f(c)$ par continuité de f en 0.

De la même manière, $f(0) = f(d)$, et donc f est constante.

Cette démonstration convient si on peut prendre c et d distincts de 1, mais il se peut *a priori* que f atteigne par exemple son maximum en 1 uniquement. On peut reprendre la démonstration et travailler sur $[0, \alpha]$, où $\alpha \in]0, 1[$, pour montrer que f est constante sur $[0, \alpha]$. Ceci valant pour tout $\alpha \in]0, 1[$, f est constante sur $[0, 1[$, puis sur $[0, 1]$ par continuité en 1.

Dans tous les cas, f est constante.

Synthèse. Réciproquement, les fonctions constantes conviennent clairement : ce sont les fonctions cherchées.

Remarque : les notions classiques sur les séries de fonctions ne sont pas utiles (cet exercice peut être posé en MPSI).

Corrigé 388 (Équivalent faisant intervenir la fonction ζ)

Corrigé 389 (Étude d'une série de fonctions par transformation d'Abel)

CHAPITRE 39

Oraux 10 : suites et séries de fonctions (énoncés)

Aller aux corrigés 40

Exercice 390

(Navale 13) Pour n dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $\mathbb{R}^+$, soit $u_n(x) = \frac{x}{1+n^2x}$. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et de $(u'_n)_{n\geqslant 1}$.

Exercice 391

(CCP MP 13) Soit $f_n : x \mapsto \cos\left(\frac{nx}{n+1}\right)$.

1 Étudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}$.

2 Étudier la convergence uniforme sur tout segment $[-a, a]$.

3 Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

Indication : utiliser $x_n = (n+1)x$.

Exercice 392

Soit, pour $n \geqslant 2$: $u_n : x \in [0,1] \mapsto \frac{1}{\ln n}\, x^n(1-x)$. Étudier la convergence de la série de fonctions de terme général u_n.

Exercice 393

(CCP MP 13) Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \frac{1}{1+e^{nx}}$.

1 Étudier la convergence de la série de fonctions de terme général f_n.

2 Montrer que $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 394

(CCP MP 13) Soit $f : x \mapsto \sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{-n^2x}}{1+n^2}$.

1 Déterminer l'ensemble de définition D de f.

2 Montrer que f est continue sur D.

3 La fonction f est-elle dérivable sur D ? intégrable sur D ?

Exercice 395

(CCP MP 13) Soit E l'ensemble des $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f(x+1) - f(x) = 1/x$; $f(1) = 0$; f est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1 On pose $u_n : x \mapsto \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$. Montrer que $u : x \mapsto -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $u \in E$.

2 Soient f et g deux fonctions de E, et $\delta = f - g$. Montrer que δ est 1-périodique. Quelle est la limite de δ en $+\infty$?

3 En déduire que $f = g$. Que vaut E ?

Exercice 396

(CCP MP 13) Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-x)^n}{n^2}$.

1 Déterminer le domaine de définition de f. En quels points f est-elle dérivable ?

2 Calculer f' puis f.

CHAPITRE 40

Oraux 10 : suites et séries de fonctions (corrigés)

Aller aux énoncés 39

Corrigé 390 (Convergence simple et uniforme d'une suite de fonctions et de sa dérivée)

La suite (u_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$. La convergence est en fait uniforme, car, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$|u_n(x)| = \frac{x}{1+n^2x} \leqslant \frac{x}{n^2x} = \frac{1}{n^2}$$

et cette inégalité est vraie en 0, de sorte que $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} \leqslant \frac{1}{n^2}$.

u_n est bien sûr dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et, pour tout $x \geqslant 0$:

$$u_n'(x) = \frac{1}{(1+n^2x)^2}$$

La suite de fonctions (u_n') converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$, mais non uniformément, car $\|u_n'\|_{\infty,\mathbb{R}_+} = u_n'(0) = 1$.
Remarque : : en revanche, il y a convergence uniforme sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ (mais pas sur $\mathbb{R}_+^*$).

Corrigé 391 (Convergence uniforme sur tout segment mais non uniforme)

1 La suite de fonction (f_n) converge simplement vers la fonction cosinus (par continuité de cette dernière).

2 Soit $a > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $x \in [-a, a]$, on a, grâce au caractère 1-lipschitzien de cos :

$$|f_n(x) - \cos(x)| = \left|\cos\left(\frac{nx}{n+1}\right) - \cos(x)\right| \leqslant \left|\frac{nx}{n+1} - x\right| = \frac{|x|}{(n+1)} \leqslant \frac{a}{n+1}$$

donc $\|f_n - \cos\|_{\infty,[-a,a]} \leqslant \frac{a}{n+1}$, puis la convergence uniforme de (f_n) vers cos sur $[-a, a]$.
Remarque : plus généralement, si $(g_n\ : I \to J)$ converge uniformément vers $g\ : I \to J$, et si $h\ : J \to \mathbb{R}$ est uniformément continue, alors $(h \circ g_n)$ converge uniformément vers $h \circ g$.

3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n - \cos\|_\infty \geqslant |f_n((n+1)\frac{\pi}{2}) - \cos((n+1)\frac{\pi}{2}| = |\cos(n\frac{\pi}{2}) - \cos((n+1)\frac{\pi}{2})| = \frac{\pi}{2}$, ce qui montre que la convergence n'est pas uniforme.

Corrigé 392 (Convergence d'une série de fonctions (CCP MP 13))

La série $\sum u_n(1)$ est convergente (son terme général est nul), et, pour tout $x \in [0, 1[$, $u_n(x) = o_{n\infty}(x^n)$, or la série géométrique $\sum x^n$ est absolument convergente, donc $\sum u_n(x)$ l'est également.

Y a-t-il convergence normale sur $[0, 1]$? La fonction positive u_n prend son maximum en $\frac{n}{n+1}$, donc

$$\|u_n\|_{\infty,[0,1]} = u_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n}{(n+1)\ln(n)} \sim \frac{1}{en\ln(n)}$$

il n'y a donc pas convergence normale.

En revanche, pour tout $x \in [0,1[$, tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leqslant R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{\ln(k)} x^k(1-x) \leqslant \frac{1}{\ln(n+1)} \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k(1-x) = \frac{x^{n+1}}{\ln(n+1)} \leqslant \frac{1}{\ln(n+1)}$$

et $R_n(1) = 0$, donc $\|R_n\|_{\infty,[0,1]} \leqslant \frac{1}{\ln(n+1)}$: il y a bien convergence uniforme.

Corrigé 393 (Continuité de la somme d'une série de fonctions)

1 Le domaine de convergence simple est $\mathbb{R}_+^*$.

Il n'y a pas convergence normale sur $\mathbb{R}_+^*$, puisque $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+^*} = \frac{1}{2}$.

La convergence n'est pas non plus uniforme pour la même raison (on rappelle que si $\sum f_n$ converge uniformément, alors le terme général f_n converge uniformément vers 0.

Remarque : on aurait aussi pu utiliser le théorème de la double limite.

2 Montrons la convergence normale (et donc uniforme) sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$, où $a > 0$ (chaque f_n étant continue, et la continuité étant une notion locale, cela prouvera bien la continuité de la somme sur $\mathbb{R}_+^*$).

Soit donc $a > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $x \in [a,+\infty[$:

$$|f_n(x)| \leqslant f_n(a)$$

par positivité et décroissance de f_n sur $\mathbb{R}_+$, donc $\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = f_n(a)$, la convergence normale sur $[a,+\infty[$ s'ensuit.

Corrigé 394 (Régularité de la somme d'une série de fonctions)

Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, tout $n \in \mathbb{N}$: $f_n(x) = \frac{e^{-n^2x}}{1+n^2}$.

1 $D = \mathbb{R}_+$.

2 $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$, d'où la continuité de f sur D (héritée par convergence uniforme de celle des f_n).

3 On montre facilement que $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$ où $a > 0$, ce qui prouve la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}_+^*$ (car la dérivabilité en un point est une notion locale). Cela établit aussi que, pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n^2}{1+n^2} e^{-n^2x}$$

Il reste cependant le problème en 0. On peut observer que f' est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, et donc que f' admet en 0 soit une limite finie (auquel cas f sera dérivable en 0, par le théorème de la classe $\mathcal{C}^1$), soit $-\infty$ pour limite (auquel cas f ne sera pas dérivable en 0, par une démonstration analogue à celle du théorème de la classe $\mathcal{C}^1$). Notons l cette limite. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f'(x) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k'(x)$$

d'où, en faisant tendre x vers 0 : $l \leqslant -\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{1+k^2} \leqslant -\frac{n}{2}$.

On obtient donc $l = -\infty$.

Pour l'intégrabilité, on sait que f est continue sur $\mathbb{R}_+$, le point crucial est donc le comportement asymptotique en $+\infty$.

Intuitivement, la suite de fonction (f_n) est à décroissance rapide, dans le sens où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_{n+1}(x) = \mathrm{o}_{x\to+\infty}(f_n(x))$.

On peut formaliser cette idée : on montre facilement que la série de fonctions $\sum e^x f_n(x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$, et donc, par théorème de la double limite, que $f(x) = \mathrm{o}_{x\to+\infty}(e^{-x})$, ce qui suffit à établir l'intégrabilité de f.

Remarque : on peut aussi montrer ce résultat à la main, par des majorations explicites (rédaction rapide) : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $x > 0$, $f_n(x) \leqslant e^{-nx}$, donc :

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \mathrm{o}_{x\to+\infty}(e^{-x})$$

Remarque : pour ceux qui connaissent le résultat, le théorème d'intégration terme à terme permettait de conclure immédiatement.

Corrigé 395 (Équation fonctionnelle et série de fonctions)

1 Montrons tout d'abord que u est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, et $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$u_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)} \sim_n \frac{x}{n^2}$$

or $\sum \frac{x}{n^2}$ est absolument convergente (exemple de Riemann), donc $\sum u_n(x)$ également.

Pour montrer que u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, il suffit de montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\sum u_n^{(k)}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$. Or, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}k!}{(n+x)^k}$$

et donc :

$$\left\|u_n^{(k)}\right\|_{\infty,\mathbb{R}_+^*} \leqslant \frac{k!}{n^k}$$

d'où la convergence normale, puis uniforme, de $\sum u_n^{(k)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

f est bien croissante car sa dérivée est positive (ou parce que $x \mapsto -\frac{1}{x}$ et les u_n le sont), et $f(1) = 0$ par télescopage.

Enfin, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}
u(x+1) - u(x) &= -\frac{1}{x+1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x+1}\right) + \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right) \\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+x}\right) \\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+1}\right) \\
&= \frac{1}{x},
\end{aligned}$$

à nouveau par télescopage.

2 δ est 1-périodique. Si sa limite en $+\infty$ existe, c'est celle de $(\delta(n))$, suite constante de valeur 0, donc c'est 0.

Reste cependant à établir l'existence de cette limite (l'énoncé est d'ailleurs pousse-au-crime à cet égard).

Pour ce faire, on se fonde sur les croissances de f et g, et sur le fait qu'elles coïncident sur les entiers : soit $x \in [1, +\infty[$. On a $E(x) \leqslant x \leqslant E(x) + 1$, donc

$$f(E(x)) \leqslant f(x) \leqslant f(E(x)+1) \quad \text{et} \quad g(E(x)) \leqslant g(x) \leqslant g(E(x)+1)$$

donc

$$f(E(x)) - g(E(x)+1) \leqslant \delta(x) \leqslant f(E(x)+1) - g(E(x))$$

soit, puisque f et g coïncident sur les entiers (par une récurrence immédiate) :

$$-\frac{1}{E(x)} \leqslant \delta(x) \leqslant \frac{1}{E(x)}$$

Cet encadrement montre que δ tend effectivement vers 0 en $+\infty$.

Étant en outre périodique, δ est identiquement nulle (pour tout $x > 0$, $(\delta(x+n))$ est constante et tend vers 0), *i.e.* $f = g$. E est donc le singleton $\{u\}$.

Corrigé 396 (Régularité d'une série de fonctions puis détermination de la somme)

CHAPITRE 41

TD 11 : réduction des endomorphismes (énoncés)

Aller aux corrigés 42

1. Diagonalisabilité, diagonalisation pratique, éléments propres

Exercice 397

Réduire la matrice J (carrée de taille n) dont tous les coefficients valent 1.

Exercice 398

Soit $f : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(1-X)$. f est-il diagonalisable ? Trouver une base de vecteurs propres.

Exercice 399

L'application $u : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto X^n P(1/X) \in \mathbb{R}_n[X]$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 400

L'application $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M + ({}^t M)$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 401

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 402

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ (où $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$) tel que p^2 soit un projecteur. Montrer que p est diagonalisable si et seulement si $p^3 = p$.

Exercice 403

Soit $a \in \mathbb{C}$ et soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles M est diagonalisable.

Exercice 404

La matrice (i/j) est-elle diagonalisable ?

Exercice 405

Soit $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer l'existence de scalaires α, β, γ non tous nuls, tels que $\alpha A + \beta B + \gamma C$ admette une valeur propre double.

Exercice 406

Montrer qu'une matrice diagonale par blocs si et seulement si chacun de ses blocs diagonaux est diagonalisable.

Exercice 407

Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si il existe $k \geqslant 2$ tel que M^k soit diagonalisable.
Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que tous ses éléments sont diagonalisables.
Soit G un groupe multiplicatif fini inclus dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que tous ses éléments sont diagonalisables.

Exercice 408

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$, $f \ : u \mapsto \left(\frac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n^2}\right)$. Quelles sont les valeurs propres de f ?

2. Polynômes d'endomorphismes, de matrices carrées

Exercice 409

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, P son polynôme minimal et p l'ordre de 0 dans P.

1 Si $p = 0$, que dire de u ?

2 Si $p = 1$, montrer : $E = \mathrm{Im}(u) \oplus \ker(u)$.

3 Dans le cas général, montrer : $E = \mathrm{Im}(u^p) \oplus \ker(u^p)$.

Exercice 410

Existe-t-il $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de polynôme minimal $X^2 + X + 1$? dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

3. Polynôme caractéristique, trigonalisation, endomorphismes nilpotents

Exercice 411

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!], \mathrm{tr}(A^i) = 0$. Montrer que A est nilpotente. Réciproque ?

Exercice 412

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telles que $AB = BA$ et B nilpotente. Montrer que A est inversible si et seulement si $A + B$ l'est.

Exercice 413

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et $B = A^{-1}$, $C = A^2$. Exprimer les polynômes caractéristiques de B et C en fonction de celui de A.

Exercice 414

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) de dimension n, $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v - v \circ u = kv$, où $k \in \mathbb{K}^*$.

1 Montrer que v n'est pas inversible.

2 Montrer que pour tout p, $u \circ v^p - v^p \circ u = pkv^p$.

3 Montrer qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{rg}(v^q) = \mathrm{rg}(v^{q+1})$.

4 Montrer que v est nilpotent.

5 Retrouver ce résultat directement par l'absurde.

Exercice 415

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $A^n = AB = 0_n$. Montrer que B et $A + B$ ont même polynôme caractéristique.

4. Applications concrètes de la réduction

Exercice 416

Que dire d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$ et $\mathrm{tr}(A) = 0$?

Exercice 417

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$. Que vaut $\operatorname{tr}(A)$?

Exercice 418

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0_n$. Montrer que A est de rang pair.

Exercice 419

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ($n \geqslant 2$) telle que $A^n = I_n$, et telle que $(I, A, \ldots, A^{n-1})$ soit libre. Montrer que $\operatorname{tr}(A) = 0$.

Exercice 420

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, $B = A^3 + A + I_n$. Montrer que A est un polynôme en B.

Exercice 421

Soit $u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ diagonalisables, tels que $u^3 = v^3$. montrer que $u = v$.

Exercice 422

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. Montrer que $\det(A) > 0$.

5. Aspects théoriques

Exercice 423

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables. On suppose $e^A = e^B$. Montrer $A = B$.

Exercice 424

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. À quelle condition l'équation $Y = AX - XB$ admet-elle une solution $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, pour tout $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 425

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace vectoriel de E stable par u admet un supplémentaire stable par u.

Exercice 426

(Mines MP 10) Donner la dimension du commutant d'un endomorphisme diagonalisable.

Exercice 427

1 Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les spectres de A et de B sont disjoints si et seulement si $\chi_A(B)$ est inversible.
Soit A, B, P trois matrices carrées complexes avec $P \neq 0$ telles que $AP = PB$. Montrer que A et B ont une valeur propre commune.
2 Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence entre :

(1) $\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exists! X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AX - XB = C$.

(2) $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AX = XB \Rightarrow X = 0$.

(3) $\chi_A(B)$ est inversible.

(4) A et B n'ont pas de valeur propre en commun.

Exercice 428

Soit $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, commutant. Montrer que l'une est polynôme de l'autre.

Exercice 429

Soit $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A^2 = B^2 = I_2$, $AB + BA = 0$. Montrer l'existence de $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 430

Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$ distincts. Montrer que $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ne sont pas isomorphes.
Indication : on pourra étudier les sous-groupes d'involutions maximaux dans les groupes linéaires.

Exercice 431

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A appartient à un groupe multiplicatif matriciel si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^2)$.

Exercice 432

Déterminer les $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telles que $A \sim A^2$.

CHAPITRE 42

TD 11 : réduction des endomorphismes (corrigés)

Aller aux énoncés 41

1. Diagonalisabilité, diagonalisation pratique, éléments propres

Corrigé 397 (Réduction de J)

$J^2 = nJ$ (cas particulier de $A^2 = \mathrm{tr}(A)A$ pour une matrice carrée de rang 1), donc $X^2 - nX$ annule J, et est scindé à racines simples, donc J est diagonalisable, et son spectre est inclus dans $\{0, n\}$.

Or $\dim E_0(J) = n - \mathrm{rg}(J) = n - 1$, donc J est semblable à $\mathrm{Diag}(n, 0, \dots, 0)$ (cela pouvait aussi se voir par la trace).

Un vecteur directeur de $E_n(J)$ est $\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$, et une base de $E_0(J)$ est $\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$,

donc, en posant

$$P = \begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & \dots & -1\\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1\end{pmatrix}$$

on a $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(n, 0, \dots, 0)$.

Corrigé 398 (Diagonalisabilité d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$)

f est un endomorphisme involutif de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$, *i.e.* une symétrie vectorielle, et est donc diagonalisable.

Pour trouver une base de vecteurs propres, on peut s'inspirer de la diagonalisation de $P \mapsto P(-X)$: la base $\left((X - \frac{1}{2})^k\right)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une base de vecteurs propres.

Corrigé 399 (Diagonalisabilité d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$)

u est une symétrie vectorielle, donc diagonalisable.

Corrigé 400 (Diagonalisabilité de la transposition)

$T \ : M \mapsto^t M$ est une symétrie vectorielle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et est donc diagonalisable. Ainsi, f, qui est égal à $\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} + T$, est également diagonalisable. (en tant que polynôme de T par exemple, pas en tant que somme d'endomorphismes diagonalisables !)

Corrigé 401 (Diagonalisabilité d'une matrice de taille 3)

Corrigé 402 (Une CNS de diagonalisabilité pour un certain endomorphisme)

Le fait que p^2 soit un projecteur se traduit par $p^4 = p^2$, ou encore par le fait que $X^4 - X^2$ annule p.

Si p est diagonalisable, son polynôme minimal μ est scindé à racines simples, et annule $X^4 - X^2$, donc μ divise $X^3 - X$, puis $p^3 = p$.

Si $p^3 = p$, alors le polynôme $X^3 - X$, scindé et à racines simples sur $\mathbb{K}$, annule p, qui est donc diagonalisable.

Corrigé 403 (Étude de diagonalisabilité en fonction d'un paramètre)

Corrigé 404 (Diagonalisabilité d'une matrice de fractions)

C'est une matrice de rang 1 et de trace non nulle, donc diagonalisable.

Corrigé 405 (Valeur propre double pour une combinaison linéaire)

Le résultat est trivial si (A, B, C) est liée : supposons (A, B, C) libre. $\mathrm{Vect}(A, B, C)$ est donc un sous-espace vectoriel de dimension 3 dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Comme $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{K}^2 \right\}$ est de dimension 2, et comme $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est de dimension 4, il existe des scalaires α, β, γ non tous nuls, des scalaires a et b, tels que

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Remarque : cette solution est un peu parachutée, mais les opérations algébriques ne respectant pas la réduction (la somme de deux matrices diagonalisables ne l'est pas toujours, etc.), et travaillant en basse dimension, il était assez naturel de se diriger vers un argument dimensionnel.

Corrigé 406 (Diagonalisabilité d'une matrice diagonale par blocs)

Le sens indirect est clair, en conjuguant par une matrice diagonale par blocs.

Le sens direct provient de ce que si un endomorphisme diagonalisable laisse stable un sous-espace vectoriel, alors l'endomorphisme qu'il induit sur ce sous-espace vectoriel est diagonalisable.

Corrigé 407 (Diagonalisabilité des puissances d'une matrice inversible)

Corrigé 408 (Valeurs propres d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$)

2. Polynômes d'endomorphismes, de matrices carrées

Corrigé 409 (Valuation du polynôme minimal)

Corrigé 410 (Matrice de polynôme minimal imposé)

Voyons une telle matrice A comme à coefficients complexes : son polynôme minimal étant scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, semblable à une matrice diagonale dont les coefficients valent $\pm j$. Comme sa trace est en outre réelle, on obtient une contradiction si A est de taille 3.

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, il suffit de trouver une matrice réelle dont le polynôme caractéristique est égal à X^2+X+1 (en effet, son polynôme minimal ne peut pas être de degré 1, car elle ne peut pas être scalaire), c'est-à-dire de trace -1 et de déterminant 1 : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ convient.

3. Polynôme caractéristique, trigonalisation, endomorphismes nilpotents

Corrigé 411 (Caractérisation de la nilpotence par la trace des puissances)

Corrigé 412 (Ajout à une matrice d'un nilpotent avec lequel elle commute)

Si A est inversible, alors $A+B=A(I_n+A^{-1}B)$, donc $A+B$ est inversible si et seulement si $I_n+A^{-1}B$ l'est. Or $A^{-1}B$ est nilpotente car B l'est et commute avec A, donc est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte : $I_n+A^{-1}B$ est semblable à une matrice triangulaire de coefficients diagonaux égaux à 1, donc $I_n+A^{-1}B$ est inversible.

Si $A+B$ est inversible, le raisonnement ci-dessus appliqué au couple $(A+B,-B)$ plutôt qu'au couple (A,B) montre que A est inversible, d'où l'équivalence demandée.

Remarque : on a prouvé ce résultat en trigonalisant, mais il est valable dans n'importe quel anneau (le point clé étant la formule de Bernoulli).

Corrigé 413 (Polynômes caractéristiques de l'inverse et du carré)

Corrigé 414 (Vecteur propre pour un crochet de Lie)

Corrigé 415 (Égalité de polynômes caractéristiques)

4. Applications concrètes de la réduction

Corrigé 416 (Réduction d'un projecteur)

Corrigé 417 (Trace d'une racine carrée de $-I_n$)

Corrigé 418 (Rang et polynôme annulateur)

Corrigé 419 (Polynôme minimal et trace nulle)

Corrigé 420 (Polynôme du polynôme)

Corrigé 421 (Égalité des cubes pour des endomorphismes diagonalisables)

Corrigé 422 (Déterminant et polynôme annulateur)

5. Aspects théoriques

Corrigé 423 (Matrices diagonalisables dont les exponentielles sont égales)

Corrigé 424 (Une équation d'inconnue matricielle)

Corrigé 425 (Semi-simplicité et diagonalisabilité)

Corrigé 426 (Commutant d'un endomorphisme diagonalisable)

Corrigé 427 (Une condition nécessaire et suffisante pour que les spectres soient disjoints)

Corrigé 428 (Matrices de taille 2 commutant)

Corrigé 429 (Réduction de Frobénius simultanée)

Corrigé 430 (Non isomorphie entre groupes linéaires complexes)

Corrigé 431 (Appartenance à un groupe multiplicatif matriciel)

Corrigé 432 (Matrices de taille 2 semblables à leur carré)

CHAPITRE 43

Oraux 11 : réduction des endomorphismes (énoncés)

Aller aux corrigés 44

Exercice 433

(TPE PSI 08) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, et que $\det(A)$ est un réel strictement positif.

Exercice 434

(CCP MP 13) Trouver les $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^3 - 2M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 435

(Mines-Ponts PSI 10) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

1 Montrer que AB et BA ont même spectre.

2 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que P annule AB si et seulement si P annule BA.

3 Montrer que AB est diagonalisable si et seulement si BA est diagonalisable.

Exercice 436

(Télécom Sud Paris) Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On suppose M^2 diagonalisable. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Exercice 437

(Centrale PSI 10) Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\dim(\ker(u)) = 1$, $u^2 \neq 0$ et $u^3 = 0$.

1 Montrer $\ker(u) \subset \mathrm{Im}(u)$.

2 Montrer que $\dim(\ker u^2) = 2$.

3 Montrer qu'il existe une base dans laquelle u est représenté par $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4 Soit $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de polynôme caractéristique $(X-1)^3$ et tel que $(v - \mathrm{Id})^2 \neq 0$. Montrer qu'il existe une base dans laquelle v est représenté par $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 438

(Centrale PSI 10) Soit $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M + ({}^tM)$. Déterminer les valeurs propres de f. L'application est-elle diagonalisable ?

Exercice 439

(TPE 13) Montrer qu'en posant $f(P) = (X^3 + X)P' - (3X^2 - 1)P$, on définit un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. En déterminer les éléments propres.

Exercice 440

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et g_A l'endomorphisme $M \mapsto AM$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1 Calculer le rang de g_A en fonction de celui de A.

2 Montrer que g_A est diagonalisable si et seulement si A l'est.

Exercice 441

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $d \in \mathbb{N}^*$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A^d l'est.

Exercice 442

(CCP) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline I_n & 0 \end{array}\right)$. On suppose B diagonalisable. Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 443

(CCP MP 13) Soient E un espace vectoriel, p un projecteur de E et Q un polynôme. À quelle condition $Q(p)$ est-il un projecteur ?

Exercice 444

(CCP MP 13) Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont distincts. Montrer que $(I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1})$ est une base de l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(K)$.

Exercice 445

(TPE MP 13) Soient $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $m_{i,j} = a_j$ si $i \neq j$ et $m_{i,i} = 0$. Calculer : $P(X) = \det(M + XI_n)$.

Exercice 446

(Navale MP 13) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $(A-I_n)^2 \neq 0$, $A(A-I_n) \neq 0$ et $A(A-I_n)^2 = 0$.

1 Montrer que $\operatorname{Sp} A = \{0, 1\}$.

2 Montrer que A n'est pas diagonalisable.

3 Pour $n = 3$, donner un exemple de matrice vérifiant ces hypothèses.

Exercice 447

(ENSAM MP 13) Donner les éléments propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et de $B = \begin{pmatrix} A & A & A \\ A & A & A \\ A & A & A \end{pmatrix}$.

Exercice 448

1 (CCP) Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/a & 1/a^2 \\ a & 1 & 1/a \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

2 (CCP) Soient $n \geqslant 2$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad u(P) = P(-4)\, X + P(6).$$

a Déterminer l'image et le noyau de u.

b Déterminer les valeurs propres de u. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Exercice 449

(ENSEA) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - A - I_n = 0$. Montrer que $\det A > 0$.

Exercice 450

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.

1 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall\, k \in [\![1, n]\!], \operatorname{tr}(u^k) = 0$. Montrer que u est nilpotent.

2 Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall\, k \in [\![1, n]\!], \operatorname{tr} v^k = n$. Montrer que $v - \operatorname{Id}_E$ est nilpotent.

Exercice 451

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A et B ont une valeur propre commune si et seulement s'il existe $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AU = UB$.

Exercice 452

(ENSAM MP 13) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs. On suppose que la somme des coefficients de chaque ligne de A vaut 1.

1 Montrer que le vecteur colonne dont tous les coefficients valent 1 est propre pour A.

2 Montrer que, si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de A, alors $|\lambda| \leqslant 1$.

3 On suppose que A est diagonalisable. Soient $p \in \mathbb{N}$ et X un vecteur colonne. On considère la suite $Y_p = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} A^k X$. Montrer que cette suite est convergente et donner sa limite, en commençant par le cas où X est un vecteur propre de A.

Exercice 453

(TPE MP 13) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence des conditions suivantes :

(1) $\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AX - XB = C$,

(2) $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\},\ AX \neq XB$,

(3) $\chi_B(A)$ est inversible,

(4) A et B n'ont pas de valeur propre commune.

Exercice 454

$P = (p_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *stochastique* si ses coefficients sont positifs ou nuls, et si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = 1$.
Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices stochastiques.

1 Montrer que les éléments de $\mathcal{S}$ ont une valeur propre commune.

2 $\mathcal{S}$ est-il stable par produit ?

3 Soit λ une valeur propre complexe de $P \in \mathcal{S}$. Montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.

4 Montrer que si $\lambda \in \mathbb{U}$ est valeur propre de $P \in \mathcal{S}$, alors λ est une racine m-ième de l'unité avec $m \leqslant n$.

5 Montrer que si les coefficients diagonaux sont tous non nuls, alors la seule valeur propre de module 1 est 1.

6 Montrer que $\mathcal{S}$ est convexe compact.

Exercice 455

1 Soient $a_0, \dots, a_n$ distincts dans $\mathbb{C}$, $L_0, \dots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés à $(a_0, \dots, a_n)$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, exprimer χ_A à l'aide de $(L_0, \dots, L_n)$.

2 En déduire que $A \mapsto \chi_A$ est continue.

3 Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. On suppose A inversible. Montrer que AB est semblable à BA. En déduire : $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

4 Si $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$, montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Exercice 456

(Mines-Ponts PSI 08) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, $B = A^3 + A + I_n$. Montrer que A est un polynôme en B.

Exercice 457

(CCP PSI 08) Comparer la diagonalisabilité d'une matrice carrée et celle de la transposée de sa comatrice.

Exercice 458

(Mines-Ponts PSI 10) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} A & 2A \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$. À quelle condition B est-elle diagonalisable ?

Exercice 459

(CCP MP 13) Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

1 Soient u et v dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que u et v ont un vecteur propre commun.

2 Soient $u_1, \dots, u_p$ des endomorphismes de E qui commutent deux à deux. Montrer que les u_i ont un vecteur propre commun.

Exercice 460

(CCP MP 13) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\chi_A(0) \neq 0$. Justifier que A est inversible. Exprimer $\chi_{A^{-1}}$ en fonction de χ_A.

Exercice 461

(TPE MP 13) Soient $A_1, \dots, A_p$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et M une matrice diagonale par blocs avec pour blocs diagonaux : $A_1, \dots, A_p$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.

Exercice 462

(ENSAM PSI 08) Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1, \dots, C_n$, on note M' la matrice de colonnes $C'_1, \dots, C'_n$, où $C'_i = S - C_i$ avec $S = C_1 + \cdots + C_n$.

1 Exprimer $\det(M')$ en fonction de $\det(M)$.

2 L'application qui envoie M sur M' est-elle diagonalisable ?

Exercice 463

On veut déterminer les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $(*)\ :\quad A^2 = (\operatorname{tr} A)A + I_n$.

1 Montrer que les matrices A vérifiant $(*)$ sont diagonalisables. Que dire de A si $\operatorname{tr}(A) = 0$?

2 Pour $n = 2$, montrer qu'il existe des solutions de trace non nulle. Discuter l'existence de solutions pour $n = 3$ ou $n \geqslant 4$.

Exercice 464

(Centrale PSI 10) Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $t \in]-1, 1[\setminus\{0\}$. Pour $f \in E$, on définit

$$u(f)\ : x \mapsto f(tx + (1 - t)).$$

1 Montrer que u est un automorphisme de E.

2 Montrer que le spectre de u est inclus dans $]-1, 1]$. Si g est vecteur propre de u, montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^{(k)} = 0$. En déduire les éléments propres de u.

Exercice 465

(Mines MP 10) Soit $A \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ telles que $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice AB est-elle diagonalisable ?

Exercice 466

(ENSAM) Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et A sa matrice dans la base canonique.

1 Montrer que la droite engendrée par un vecteur non nul u est stable par f si et seulement si u est un vecteur propre de f.

2 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Montrer que le plan d'équation $ax + by + cz = 0$ est stable par f si et seulement si le vecteur ${}^t\,(a, b, c)$ est vecteur propre pour ${}^t\,A$.

3 Montrer l'équivalence entre les trois assertions suivantes :

(1) f admet une unique droite stable.

(2) f admet un unique plan stable.

(3) Le polynôme caractéristique de f admet une seule valeur propre réelle, de multiplicité 1 ou 3, et l'espace propre correspondant est une droite.

4 Déterminer les sous-espaces stables par f quand $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 467

Soit $A \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{tr} A = 2$ et $A^3 + A^2 - 2A = 0$. Déterminer le polynôme caractéristique de A.

Exercice 468

(CCP MP 13) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^4 = f^2$ et $\{-1, 1\} \subset \operatorname{Sp} f$. Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 469

(ENSAM MP 13) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A - I_n = 0$.

1 La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$? sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

2 Montrer que $\det A > 0$.

Exercice 470

(CCP MP 13) Soient $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{C}^*)^2$ avec $\alpha \neq \beta$ et A, B, M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que : $M = \alpha A + \beta B$, $M^2 = \alpha^2 A + \beta^2 B$ et $M^3 = \alpha^3 A + \beta^3 B$.
Montrer que M est diagonalisable.

Exercice 471

(CCP MP 13) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{tr} A \neq 0$. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme $\Phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto (\operatorname{tr} A)\, M - (\operatorname{tr} M)\, A$.

Exercice 472

(ENSAM MP 13) Soit $f : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto -A + \operatorname{tr}(A) I_n$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer ses éléments propres.

Exercice 473

(CCP MP 13) Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \operatorname{tr}(A^n)$.

1 Déterminer le polynôme caractéristique de A. Que peut-on dire des valeurs propres de A ?

2 Donner un équivalent de u_n. Nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 474

Soit $A \in \mathrm{GL}_6(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$ et $\operatorname{tr} A = 8$. Déterminer le polynôme caractéristique de A.

Exercice 475

(CCP MP 13) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 - 2A^3 + 2A^2 = 0$. Montrer que $\operatorname{tr}(A) \in 2\mathbb{N}$.

Exercice 476

(Télécom Sud Paris) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $\operatorname{tr}(A^n)z^n$.

Exercice 477

Soit A, B et C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose $CA = BC$ et que $\operatorname{rg} C = r$. Montrer que A et B ont au moins r valeurs propres (comptées avec multiplicité) en commun.

Exercice 478

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, f et g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1 $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Ker}(g) = \{0\}$.

2 $\operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g) = E$.

3 Pour tout t dans $\mathbb{C}$ privé d'un ensemble fini, $f + tg \in \mathrm{GL}(E)$.

Exercice 479

(ENSAM MP 12) Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Si $f \in E$, soit $\Phi(f) \ : x \in [0,1] \mapsto \int_0^1 \min\{x, t\}\, f(t)\mathrm{d}t$.

1 Vérifier que Φ est un endomorphisme E.

2 Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de Φ.

Exercice 480

Soit $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que : $P(B) = A$ et $\exp(A) = B$.

Exercice 481

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On dit que $A \in \mathcal{E}$ si pour tout vecteur colonne X, il existe un plan affine Π tel que, pour tout réel t, $\exp(tA)X \in \Pi$.

1 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(tA)$. A-t-on $A \in \mathcal{E}$?

2 Montrer que si $\det(A) = 0$, alors $A \in \mathcal{E}$.

3 Caractériser, parmi les matrices inversibles et diagonalisables, celles qui appartiennent à $\mathcal{E}$.

4 Déterminer $\mathcal{E}$.

Exercice 482

Soient p un nombre premier impair et $n \in \mathbb{N}^*$.

1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $\mathrm{tr}(A^p) \equiv (\mathrm{tr}\, A)^p\ [p]$.

2 Déterminer le cardinal de $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}),\ A^p = I_n\}$.

CHAPITRE 44

Oraux 11 : réduction des endomorphismes (corrigés)

Aller aux énoncés 43

Corrigé 433 (Déterminant strictement positif pour une matrice diagonalisable dans $\mathbb{C}$)

Corrigé 434 (Équation polynomiale d'inconnue matricielle)

Corrigé 435 (Équivalence de diagonalisabilité pour AB et BA dans le cas inversible)

Corrigé 436 (Matrice inversible dont le carré est diagonalisable)

Corrigé 437 (Représentation matricielle de $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\chi_v = \mu_v = (X-1)^3$)

Corrigé 438 (Étude de diagonalisabilité de $M \mapsto M + ({}^tM)$)

Corrigé 439 (Éléments propres d'un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$)

Corrigé 440 (Liens entre A et $g_A \ : M \mapsto AM$ (ENS MP 10))

Corrigé 441 (Lien entre la diagonalisabilité de A et de A^d (ENS MP 10))

Corrigé 442 (Diagonalisabilité et matrices par blocs)

Corrigé 443 (Quand un polynôme d'un projecteur est-il un projecteur ?)

Corrigé 444 (Matrice diagonale à termes diagonaux distincts)

Corrigé 445 (Calcul de déterminant se ramenant à un calcul de polynôme caractéristique)

Corrigé 446 (Exemple de matrice non diagonalisable)

Corrigé 447 (Réduction d'une matrice par blocs)

Corrigé 448 (Étude concrète de diagonalisabilité)

Corrigé 449 (Condition suffisante pour que le déterminant soit strictement positif)

Corrigé 450 (Caractérisation de la nilpotence par nullité de traces (X MP 10))

Corrigé 451 (CNS d'existence d'une valeur propre commune)

Corrigé 452 (Matrices stochastiques)

Corrigé 453 (Matrices sans valeur propre commune)

Corrigé 454 (Matrice stochastique)

Corrigé 455 (Polynôme caractéristique d'un produit (Centrale MP 12))

Corrigé 456 (Matrice diagonalisable polynôme de l'un de ses polynômes)

Corrigé 457 (Diagonalisabilité de la transposée de la comatrice)

Corrigé 458 (Diagonalisabilité d'une matrice par blocs)

Corrigé 459 (Vecteurs propres communs à des endomorphismes commutant deux à deux)

Corrigé 460 ($\chi_{A^{-1}}$ en fonction de χ_A)

Corrigé 461 (CNS de diagonalisabilité d'une matrice diagonale par blocs)

Corrigé 462 (Étude de diagonalisabilité d'un opérateur sur les matrices)

Corrigé 463 (Résolution de $A^2 = (\operatorname{tr} A)A + I_n$)

Corrigé 464 (Éléments propres d'un opérateur fonctionnel)

Corrigé 465 (Étude de diagonalisabilité de AB connaissant explicitement BA)

Corrigé 466 (Sous-espaces stables d'une matrice compagnon)

Corrigé 467 (Polynôme caractéristique d'une certaine matrice inversible)

Corrigé 468 (Diagonalisabilité d'un endomorphisme particulier)

Corrigé 469 (Informations sur une matrice réelle dont on connaît un polynôme annulateur)

Corrigé 470 (Condition suffisante de diagonalisabilité)

Corrigé 471 (Réduction d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

Corrigé 472 (Encore une réduction d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

Corrigé 473 (Nature de $\sum \operatorname{tr}(A^n)$ pour une matrice particulière A)

Corrigé 474 (Détermination d'un polynôme caractéristique)

Corrigé 475 (Condition suffisante pour que la trace soit paire)

Corrigé 476 (Rayon de convergence de $\sum \mathrm{tr}(A^n)z^n$)

Corrigé 477 (Valeurs propres en commun pour deux matrices (X MP 10))

Corrigé 478 (Lorsque $fg = gf$, équivalence de conditions sur images et noyaux)

Corrigé 479 (Éléments propres d'un opérateur sur les fonctions continues)

Corrigé 480 (Surjectivité de l'exponentielle matricielle complexe)

Corrigé 481 (Trajectoires planes de sous-groupes à un paramètre)

Corrigé 482 (Cardinal d'unipotentes dans un anneau matriciel fini (ENS MP))

CHAPITRE 45

TD 12 : convergence dominée et intégrales à paramètres (énoncés)

Aller aux corrigés 46

1. Le théorème de convergence dominée

Exercice 483

$\lim_{x \to 0} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t^2+1}-1}{(t^2+1)\sqrt{t^2+x}} \mathrm{d}t$.

Exercice 484

Déterminer $\lim_{n\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)} \mathrm{d}x$.

Exercice 485

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+^*$ continue. Montrer : $\left(\int_0^1 ((f(x))^{1/n} \mathrm{d}x\right)^n \to \exp(\int_0^1 \ln(f(x)))$.

Exercice 486

Soit φ 1-périodique sur $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = (t - \frac{1}{2})^2$ sur $[0,1]$.
Existence et calcul de $\int_{t=1}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} \mathrm{d}t$.

Exercice 487

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, $I_n = \int_0^1 f(t) \ln(1+t^n) \mathrm{d}t$.
1 Montrer que (I_n) converge et déterminer sa limite l.
2 On suppose $f(1) \neq 0$. Montrer l'existence de $C \neq 0$ tel que $I_n - l \sim \frac{C}{n}$.
Indication : effectuer le changement de variable $u = t^n$.
3 Sachant $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, trouver C.

Exercice 488

Soit $u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t+\cdots+t^n}}$.
1 Montrer que (u_n) est bien définie, calculer u_1.
2 Montrer que (u_n) converge vers $2/3$.
3 Montrer que $u_n - \frac{2}{3} \sim \frac{I}{n^{3/2}}$, où I est un réel strictement positif que l'on ne cherchera pas à calculer.
Indication : effectuer le changement de variable $u = t^{n+1}$.

Exercice 489

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n \overset{def}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{1+n^4x^3}\mathrm{d}x$.
1 Vérifier que (I_n) converge vers 0.
2 Donner un équivalent simple de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{1+n^4x^3}\mathrm{d}x$.
Indication : effectuer le changement de variable $u = n^4x^3$.

Exercice 490

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$I_k \overset{def}{=} \int_0^{+\infty} \frac{t^k}{e^t - 1}\mathrm{d}t$$

Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$I_k = k!\,\zeta(k+1)$$

Indication : On pourra partir du fait que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{1}{e^t - 1} = \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt}$$

et faire intervenir la fonction Γ d'Euler.

Exercice 491

On note, pour $(a, b) \in]-1, +\infty[\times]0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^a e^{-nt}}{\sqrt{1 + t^b}}\mathrm{d}t.$$

1 Étudier l'existence de I_n.
2 Déterminer la limite de (I_n).
3 Déterminer un équivalent simple de I_n (la réponse fera intervenir la fonction Γ d'Euler).

Exercice 492

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue. Déterminer :

$$\lim_{n} n \int_0^1 f(x) \ln(1+x^n) \mathrm{d}x.$$

On admet : $\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y} \mathrm{d}y = \frac{\pi^2}{12}$.

2. Intégrales à paramètres

Exercice 493

On pose, pour tout réel x pour lequel cela a un sens :

$$F(x) \stackrel{def}{=} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}} \mathrm{d}t$$

1 Montrer que le domaine de définition de F est $\mathbb{R}_+^*$.
2 Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3 Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4 Montrer :

$$F(x) \sim_{0^+} -\ln(x).$$

Indication : effectuer le changement de variable $u = xt$, et regarder les forces en présence.

Exercice 494

Existence et calcul, pour $x \in \mathbb{R}$, de :

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}-1}{t} e^{-t} \mathrm{d}t.$$

Exercice 495

On pose, pour tout réel positif ou nul x :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad g(x) = \lim_{n\infty} \int_{t=0}^{n} \frac{\sin(t)}{x+t}\mathrm{d}t.$$

1 *(Étude de f)*

a Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$, et qu'elle y est continue.

b Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et qu'elle est solution sur ce domaine de

$$(\mathcal{E}) \quad y'' + y = \frac{1}{x}$$

c Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

2 *(Étude de g)* Vérifier que g est aussi définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, solution de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et de limite nulle en $+\infty$.

3 En déduire que $f = g$, puis la valeur de l'*intégrale de Dirichlet* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$.

Exercice 496

Soit $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^x}\mathrm{d}t$. Déterminer le domaine de définition de f, puis analyser sa continuité, sa dérivabilité et sa limite quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 497

Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer sans symbole d'intégration

$$u(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\cos(xt)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad v(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(xt)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$

Exercice 498

Calculer $\int_0^{\pi} \ln\left(\frac{b-\cos(x)}{a-\cos(x)}\right)\mathrm{d}x$.

Exercice 499

Montrer :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{x}{t}\right)}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^{x} \frac{\ln(t)}{t^2-1}\mathrm{d}t.$$

Exercice 500

1 Donner le domaine de définition de $S\ : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^{xt}-1} \mathrm{d}t$.

2 Soit $f\ : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t+x} \mathrm{d}t$. Donner le domaine de définition de f, et étudier son comportement en 0.

3 On pose $f(x) = \int_1^x \frac{e^{-t^2x^2}}{t} \mathrm{d}t$. Donner le domaine de définition, tracer le graphe, effectuer l'étude en 0, en $+\infty$.

4 On pose $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^3}} \mathrm{d}t$. Limite ?

5 Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha < \beta$. Déterminer

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon\alpha}^{\varepsilon\beta} \frac{\cos(t)}{t} \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \lim_{M \to +\infty} \int_{M\alpha}^{M\beta} \frac{\cos(t)}{t} \mathrm{d}t$$

Exercice 501

On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2} \mathrm{d}t$.

1 Existence et continuité de f sur $\mathbb{R}$.

2 Montrer que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^*)$, calculer $f'(x)$ sur ce domaine.

3 En déduire $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t^2} \mathrm{d}t$.

Exercice 502

Existence et calcul, pour $x \in]-1, 1[$ de :

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + x\cos(t))}{\cos(t)} \mathrm{d}t.$$

Exercice 503

1 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction d'une variable réelle par

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + xt^2)}{t(1+t^2)} \mathrm{d}t.$$

2 Montrer : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = -\frac{1}{2} \int_0^x \frac{\ln(t)}{1-t} \mathrm{d}t$.

3 Existence et calcul de : $\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2(1+t^2)}{t^3} \mathrm{d}t$.

(On utilisera $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t} \mathrm{d}t = -\frac{\pi^2}{6}$.)

Exercice 504

Étude et représentation graphique de la fonction f d'une variable réelle donnée par :

$$f(x) = \int_0^1 t^x \sqrt{1+t} \mathrm{d}t.$$

Exercice 505

Former un développement asymptotique à trois termes en 0^+ de :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{x+t}\mathrm{d}t.$$

On admettra $\int_0^{+\infty} e^{-u}\ln(u)\mathrm{d}u = -\gamma$ et $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Exercice 506

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}_+^*)$.

1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une unique subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[0,1]$ telle que

$$\forall\, k \in [\![1, n]\!], \qquad \int_{x_{k-1}}^{x^k} = \frac{1}{n}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

2 Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)$ tende vers $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$. Le pas de la subdivision tend-il vers 0 ?

Exercice 507

Équivalent en $+\infty$ de $\phi(t) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x+x^2)^t}$.

CHAPITRE 46

TD 12 : convergence dominée et intégrales à paramètres (corrigés)

Aller aux énoncés 45

1. Le théorème de convergence dominée

Corrigé 483 (Limite d'intégrales)

Appliquer le théorème de convergence dominée à paramètre réel (ou théorème de continuité des intégrales à paramètre).

Pour calculer $I \overset{def}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t^2+1}-1}{(t^2+1)t}\mathrm{d}t$, effectuer $u = \sqrt{t^2+1}$:

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{u-1}{u^2\sqrt{u^2-1}} \frac{u}{\sqrt{u^2-1}}\mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} \frac{1}{u(u+1)}\mathrm{d}u = [\ln(u/(u+1))]_1^{+\infty} = \ln(2)$$

Corrigé 484 (Limite d'intégrales, encore)

Soit $f_n(x) = \frac{n!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}$ pour tout $(x,n) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}^*$.

(f_n) est une suite de fonctions continues (par morceaux) convergeant simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction identiquement nulle car, pour $x > 0$ fixé, $\ln\left(1+\frac{x}{k}\right) \sim_{k\infty} \frac{x}{k} > 0$, donc $\sum \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)$ diverge, puis la suite des sommes partielles tend vers $+\infty$ car la série est à termes positifs.
Remarque : on aurait aussi pu utiliser la sommation des relations de comparaison (cas de la divergence) pour obtenir directement $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{x}{k}\right) \sim_{n\infty} x\ln(n)$.
Remarque : l'idée de prendre le logarithme provient de l'écriture de $f_n(x)$ comme un produit et quotient de réels strictement positifs.

$\ln(f_n(x))$ tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers l'infini, donc, par composition des limites, $(f_n(x))_n$ converge vers 0.

De plus, pour $x > 0$ fixé, on a $0 \leqslant \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{n+1}{x+n+1} \leqslant 1$, puis, en multipliant par $f_n(x)$ (qui est positif), $0 \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$. Par conséquent on a $|f_n| \leqslant f_2$ pour tout $n \geqslant 2$, et f_2 est intégrable. D'après le théorème de convergence dominée, la limite cherchée (existe et) vaut 0.

Corrigé 485 (Toujours une limite d'intégrales)

Montrer d'abord par convergence dominée que $\int_0^1 (f(x))^{1/n}\mathrm{d}x \to 1$.

Ensuite on prend le logarithme :

$$\ln\left(\left(\int_0^1 ((f(x))^{1/n}\mathrm{d}x\right)^n\right) = n\ln\left(\int_0^1 ((f(x))^{1/n}\mathrm{d}x\right) \sim_n n\left(\int_0^1 ((f(x))^{1/n}\mathrm{d}x - 1\right) = \int_0^1 n(f(x)^{1/n}-1)\mathrm{d}x$$

Or pour tout $y > 0$, $\frac{y^{1/n}-1}{1/n}$ tend vers $\ln(y)$ lorsque n tend vers l'infini. Si en outre $y < 1$, alors

$$\left|\frac{y^{1/n}-1}{1/n}\right| = \frac{1-y^{1/n}}{1/n} \leqslant -\ln(y)$$

par l'inégalité $e^u \geqslant 1+u$ pour tout $u \in \mathbb{R}$ (appliquée ici à $u = \frac{\ln(y)}{n}$).

Comme $y \mapsto -\ln(y)$ est intégrable sur $]0,1]$, on peut à nouveau appliquer le théorème de convergence dominée. On conclut aisément par continuité de l'exponentielle.

Corrigé 486 (Existence et calcul d'une intégrale)

Cette intégrale (que l'on notera I) converge, puisque $t \mapsto \frac{\varphi(t)}{t^2}$ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$, et que, φ étant bornée, $\frac{\varphi(t)}{t^2} = \mathrm{O}_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

La 1-périodicité de φ nous incite à utiliser la relation de Chasles :

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{\varphi(t)}{t^2}\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{(t+k)^2}\mathrm{d}t$$

par changement de variable.

Corrigé 487 (Développement asymptotique d'une suite d'intégrales)

1 Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $t \in]0,1[$, $g_n(t) = f(t)\ln(1+t^n)$. Les fonctions g_n sont continues (par morceaux) sur $]0,1[$, et la suite (g_n) converge simplement sur $]0,1[$ vers la fonction nulle (évidemment continue par morceaux).

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $t \in]0,1[$:

$$|g_n(t)| \leqslant \ln(2)|f(t)|$$

or $\ln(2)|f|$ est intégrable sur $]0,1[$ (car f est continue sur $[0,1]$).

Le théorème de convergence dominée montre alors que (I_n) tend vers 0.

2 On effectue le changement de variable $u = t^n$ (polynomial donc de classe $\mathcal{C}^1$), induisant une bijection strictement croissante de $]0,1[$ sur lui-même, d'où :

$$I_n = \int_0^1 \ln(1+u)\left(\frac{1}{n}f(u^{1/n})\frac{u^{1/n}}{u}\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}f(u^{1/n})u^{1/n}\mathrm{d}u$$

Posons, pour tout $(n,u) \in \mathbb{N}\times]0,1[$: $h_n(u) = \frac{\ln(1+u)}{u}f(u^{1/n})u^{1/n}$.

Les fonctions h_n sont continues (par morceaux) sur $]0,1[$, et la suite (h_n) converge simplement vers $h\ : u \mapsto f(1)\frac{\ln(1+u)}{u}$ sur $]0,1[$.

De plus, si on note M un majorant de $|f|$ (f est bornée car continue sur le segment $[0,1]$), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $u \in]0,1[$:

$$|h_n(u)| \leqslant M\frac{\ln(1+u)}{u}$$

et $u \mapsto M\frac{\ln(1+u)}{u}$ est intégrable sur $]0,1[$ (elle est prolongeable en une fonction continue sur $[0,1]$) : le théorème de convergence dominée assure que $\int_0^1 h_n(u)\mathrm{d}u$ tend vers $C \overset{def}{=} \int_0^1 f(1)\frac{\ln(1+u)}{u}\mathrm{d}u$.

Or C est non nul car $u \mapsto \frac{\ln(1+u)}{u}$ est continue positive et non identiquement nulle sur $]0,1[$, d'où le résultat souhaité.

3 On écrit, pour tout $u \in]0,1[$: $\frac{\ln(1+u)}{u} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^n}{n+1}$.

Comme $\int_0^1 \left|\frac{(-1)^n u^n}{n+1}\right|\mathrm{d}u = \frac{1}{(n+1)^2}$, $\sum \int_0^1 \left|\frac{(-1)^n u^n}{n+1}\right|\mathrm{d}u$ converge, donc, d'après le théorème d'intégration terme à terme, il vient :

$$C = f(1)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$$

En formant $C - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(1)}{n^2}$, on trouve que $C = \frac{f(1)\pi^2}{12}$.

Remarque : pour cette question, un argument de convergence uniforme de $\sum \frac{(-1)^n u^n}{n+1}$ (par majoration du reste grâce au critère spécial des séries alternées) aurait été recevable.

Corrigé 488 (Étude d'une suite d'intégrales)

1 u_n est défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

$$u_1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t}} = \left[2(1+t)^{1/2}\right]_0^1 = 2(\sqrt{2}-1)$$

2 On a, d'après la formule de Bernoulli :

$$u_n = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{1-t^{n+1}}}\mathrm{d}t$$

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $t \in]0,1[$: $g_n(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1-t^{n+1}}}$. La suite (g_n) de fonctions continues par morceaux converge simplement vers $g \ : t \mapsto \sqrt{1-t}$, également continue par morceaux. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant g_n \leqslant g_1$, et g_1 est intégrable sur $]0,1[$, donc le théorème de convergence dominée assure que (u_n) converge vers $\int_0^1 \sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{2}{3}(1-t)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$.

3 Reformulons l'objectif : on cherche à montrer que la suite de terme général $J_n \overset{def}{=} n^{3/2}(u_n - 2/3)$ converge vers un certain réel strictement positif I.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} n^{3/2}(u_n - 2/3) &= n^{3/2}\int_0^1 \left(\sqrt{\frac{1-t}{1-t^{n+1}}} - \sqrt{1-t}\right)\mathrm{d}t \\ &= n^{3/2}\int_0^1 \sqrt{1-t}\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^{n+1}}} - 1\right)\mathrm{d}t \\ &= n^{3/2}\int_0^1 \frac{\sqrt{1-t}\,t^{n+1}}{\sqrt{1-t^{n+1}}\left(1+\sqrt{1-t^{n+1}}\right)}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

en multipliant par la quantité conjuguée.

Pour compenser le terme en $n^{3/2}$, on effectue le changement de variable $u = t^{n+1}$:

$$\begin{aligned} J_n &= n^{3/2}\int_0^1 \frac{\sqrt{1-u^{1/(n+1)}}}{\sqrt{1-u}(1+\sqrt{1-u})}\,\frac{u^{1/(n+1)}}{(n+1)}\mathrm{d}u \\ &= \frac{n^{3/2}}{n+1}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u}(1+\sqrt{1-u})}\,u^{1/(n+1)}\,\sqrt{1-u^{1/(n+1)}}\mathrm{d}u \end{aligned}$$

Analysons les différentes termes : le facteur devant l'intégrale équivaut à $\sqrt{n}$, donc à $\sqrt{n+1}$, le terme $\frac{1}{\sqrt{1-u}(1+\sqrt{1-u})}$ ne dépend pas de n, $u^{1/(n+1)}$ tend à u fixé vers 1 et se domine bien.

Reste le terme $\sqrt{1-u^{1/(n+1)}}$, qui tend vers 0 à u fixé lorsque n tend vers l'infini : il va falloir d'une manière ou d'une autre montrer que les termes qui tendent respectivement vers l'infini et 0 se « compensent », d'où l'idée d'écrire

$$J_n \sim \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u}(1+\sqrt{1-u})}\,u^{1/(n+1)}\,\sqrt{\frac{1-u^{1/(n+1)}}{1/(n+1)}}\mathrm{d}u$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $u \in]0,1[$, étudions $\sqrt{\frac{1-u^{1/(n+1)}}{1/(n+1)}}$:

$$\sqrt{1-u^t} = \sqrt{1-\exp(t\ln(u))} = \sqrt{1-1-t\ln(u)+\mathrm{o}_{t\to 0}(t)} = \sqrt{-t\ln(u)+\mathrm{o}_{t\to 0}(t)} \sim_{t\to 0} \sqrt{t}\,\sqrt{-\ln(u)}$$

donc $\sqrt{\frac{1-u^{1/(n+1)}}{1/(n+1)}}$ tend vers $\sqrt{-\ln(u)}$ lorsque n tend vers l'infini.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant 1 + x$ (par convexité de l'exponentielle), donc $u^{1/(n+1)} \geqslant 1 + \frac{\ln(u)}{n+1}$, puis

$$0 \leqslant \sqrt{\frac{1 - u^{1/(n+1)}}{1/(n+1)}} \leqslant \sqrt{-\ln(u)}$$

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in]0,1[$,

$$0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-u}(1+\sqrt{1-u})}\, u^{1/(n+1)} \sqrt{\frac{1 - u^{1/(n+1)}}{1/(n+1)}} \leqslant \frac{\sqrt{-\ln(u)}}{\sqrt{1-u}(1+\sqrt{1-u})}$$

et cette fonction par laquelle on domine est bien intégrable sur $]0,1[$ (faussement impropre en 1, et on exploite $\lim_{u\to 0} \sqrt{u}\sqrt{-\ln(u)} = 0$ en 0).

Le théorème de convergence dominée prouve alors que (J_n) converge vers $\int_0^1 \frac{\sqrt{-\ln(u)}}{\sqrt{1-u}(1+\sqrt{1-u})}\mathrm{d}u$.
En conclusion,

$$I_n - \frac{2}{3} \sim_n \frac{1}{n^{3/2}} \int_0^1 \frac{\sqrt{-\ln(u)}}{\sqrt{1-u}(1+\sqrt{1-u})}\mathrm{d}u$$

Corrigé 489 (Équivalent d'une suite d'intégrales)

1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $x \in \mathbb{R}_+$, posons $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+n^4x^3}$: on a

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{1+x^3}$$

or $x \mapsto \frac{1}{1+x^3}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, et, les f_n sont continues (par morceaux) et la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$ (évidemment continue par morceaux) : le théorème de convergence dominée fournit alors le résultat souhaité.

2 On effectue le changement de variable indiqué : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u^{1/3}/n^{1/3})}{1+u} \frac{1}{3n^{4/3}u^{2/3}}\mathrm{d}u$$

Pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{\sin(u^{1/3}/n^{1/3})}{1+u} \frac{1}{3n^{4/3}u^{2/3}} \sim_n \frac{1}{3n^{5/3}u^{1/3}(1+u)}$$

Il est donc naturel d'étudier $n^{5/3}I_n$, c'est-à-dire $\int_0^{+\infty} \frac{n^{1/3}\sin(u^{1/3}/n^{1/3})}{1+u} \frac{1}{3u^{2/3}}\mathrm{d}u$.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $u \in \mathbb{R}_+$:

$$\left| n^{1/3}\frac{\sin(u^{1/3}/n^{1/3})}{1+u} \frac{1}{3u^{2/3}} \right| \leqslant \frac{1}{3u^{1/3}(1+u)}$$

(grâce à la majoration $|\sin(\alpha)| \leqslant |\alpha|$ pour tout réel α) et $\varphi : u \mapsto \frac{1}{3u^{1/3}(1+u)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, car continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et vérifiant

$$\varphi(u) \sim_{u\to 0} \frac{1}{3u^{1/3}} \quad \text{et} \quad \varphi(u) \sim_{u\to+\infty} \frac{1}{3u^{4/3}}$$

(on a bien $1/3 < 1$ et $4/3 > 1$).

Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée :

$$I_n \sim \frac{C}{n^{5/3}}, \text{ où } C = \int_0^{+\infty} \frac{1}{3u^{1/3}(1+u)}\mathrm{d}u$$

On peut calculer C, en effectuant le changement de variable $v = u^{1/3}$:

$$C = \int_0^{+\infty} \frac{3v^2 \mathrm{d}v}{3v(1+v^3)} = \int_0^{+\infty} \frac{v\mathrm{d}v}{1+v^3}$$

Or

$$\frac{X}{X^3+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{1+X} + \frac{X+1}{X^2-X+1}\right)$$

(de la forme $\frac{\alpha}{1+X} + \frac{\beta X+\gamma}{X^2-X+1}$, on trouve α en multipliant par $1+X$ puis en évaluant en 0, β en multipliant par X puis en regardant la limite en $+\infty$, et γ en évaluant en 0), d'où

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{3}\left[-\ln(1+v) + \frac{1}{2}\ln(v^2-v+1) + \frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(2(v-1/2)/\sqrt{3})\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9} \end{aligned}$$

Remarque : le changement de variable $v = n^{4/3}x$ aurait clairement été plus judicieux.

Corrigé 490 (Une application du théorème d'intégration terme à terme)

Tout d'abord I_k est bien définie car la fonction intégrée est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, admet une limite finie en 0, et car $\frac{t^k}{e^t-1} = o_{t\to+\infty}(1/t^2)$.

Grâce à l'indication, on peut écrire

$$I_k = \int_0^{+\infty} t^k \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} t^k e^{-nt}\right)\mathrm{d}t$$

Il paraît naturel d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme (et ce d'autant plus que $t^k e^{-nt}$ est positif pour tout $t > 0$).

La série de fonctions $\sum_n (t \mapsto t^k e^{-nt})$ de fonctions continues converge simplement vers la fonction continue $t \mapsto \frac{t^k}{e^t-1}$.

De plus, si $n \in \mathbb{N}^*$, alors, en effectuant le changement de variable $u = nt$, on constate que $\int_0^{+\infty} \left|t^k e^{-nt}\right| \mathrm{d}t$ a même nature que $\int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{n}\right)^k e^{-u}\frac{\mathrm{d}u}{n} = \frac{1}{n^{k+1}}\int_0^{+\infty} u^k e^{-u}\mathrm{d}u$.

Or on reconnaît en cette dernière intégrale la fonction Γ évaluée en $k+1$. On a donc

$$\int_0^{+\infty} \left|t^k e^{-nt}\right| \mathrm{d}t = \frac{\Gamma(k+1)}{n^{k+1}} = \frac{k!}{n^{k+1}}$$

Comme la fonction ζ est bien définie en $k+1 (> 1)$, on a bien convergence de $\sum_n \int_0^{+\infty} \left|t^k e^{-nt}\right| \mathrm{d}t$, et le théorème d'intégration terme à terme donne bien :

$$I_k = k!\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{k+1}}\right) = k!\,\zeta(k+1)$$

Remarque : le théorème d'intégration terme à terme est au programme (bien qu'admis), on peut donc l'appliquer sans problème. On aurait toutefois pu s'en passer par un argument de type convergence monotone pour produire une preuve à partir du seul théorème de convergence dominée (en dominant les sommes partielles par la limite simple), car la série de fonctions est à termes positifs.

Remarque : en variante de cet exercice, on peut montrer que pour tout réel $x > 1$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t-1}\mathrm{d}t = \Gamma(x)\zeta(x)$$

Corrigé 491 (Équivalent d'une suite d'intégrales faisant intervenir Γ)

Corrigé 492 (Calcul d'une limite d'intégrales)

2. Intégrales à paramètres

Corrigé 493 (Fonction définie par une intégrale)

1 Soit $f\ : (x,t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}}$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^2$ par opérations algébriques, donc $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Fixons $x \in \mathbb{R}$. Le seul problème d'intégrabilité se pose en $+\infty$.

Si $x > 0$, alors $f(x,t) = \mathrm{o}_{t\to+\infty}(1/t^2)$, donc $F(x)$ est bien définie.

Si $x \leqslant 0$, alors $0 \leqslant \frac{1}{t} \leqslant f(x,t)$ pour tout $t \geqslant 1$, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t$ diverge.

Le domaine de définition de F est donc bien $\mathbb{R}_+^*$.

2 Soit $a > 0$. Nous allons utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres sur $[a,+\infty[$. Pour tout $x \geqslant a$, tout $t \geqslant 1$:

$$0 \leqslant f(x,t) \leqslant e^{-at}$$

or $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, et f est continue par rapport à ses deux variables.

Ceci prouve que $F_{|[a,+\infty[}$ est continue, puis, ceci valant pour tout $a > 0$, que F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3 Pour $t \geqslant 1$ fixé, l'application $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = (-t)^k \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}}$$

L'application $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ est de continue sur $\mathbb{R}^2$, donc elle est continue par rapport à sa première variable et continue par morceaux par rapport à sa seconde variable.

Pour tout segment $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, tout $(x,t) \in [a,b] \times [1,+\infty[$:

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant t^k e^{-at}$$

Cette domination par une fonction intégrable (et ce qui précède) prouve que F est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (et que $F^{(k)}$ s'obtient en dérivant k fois sous le signe somme).

4 On a, en faisant le changement de variable $u = xt$:

$$F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{x^2+u^2}}\mathrm{d}u$$

Face à cette intégrale, le x dans la borne intégrale nous incite à utiliser l'intégration des relations de comparaison, tandis que le x^2 dans l'intégrande incite plutôt à utiliser le théorème de convergence dominée dans le cas d'un paramètre réel.

Comme il n'y a pas de théorème unifiant les deux résultats mentionnés, nous allons écrire

$$F(x) = \int_x^{+\infty} e^{-u}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+u^2}} - \frac{1}{u}\right)\mathrm{d}t + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\mathrm{d}t$$

On peut appliquer le théorème d'intégration des relations de comparaison pour la seconde intégrale : $e^{-u}/u \sim_{u\to 0} 1/u$ et $u \mapsto 1/u$ est positive non intégrable sur $]0,1]$, donc

$$\int_x^1 \frac{e^{-u}}{u}\mathrm{d}t \sim_{x\to 0} \int_x^1 \frac{1}{u}\mathrm{d}u = -\ln(x)$$

et comme $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} \mathrm{d}t$ est une constante, on a

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} \mathrm{d}t \sim_{x \to 0} -\ln(x)$$

Concernant la première intégrale, nous avons

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+u^2}} - \frac{1}{u} = \frac{u - \sqrt{x^2+u^2}}{u\sqrt{x^2+u^2}} = \frac{-x^2}{u\sqrt{x^2+u^2}(u+\sqrt{x^2+u^2})}$$

On a donc $\left| e^{-u} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+u^2}} - \frac{1}{u} \right) \right| \leqslant \frac{x^2}{2u^3}$ donc

$$\left| \int_x^{+\infty} e^{-u} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+u^2}} - \frac{1}{u} \right) \mathrm{d}u \right| \leqslant x^2 \int_x^{+\infty} \frac{1}{2u^3} \mathrm{d}u = 1$$

On obtient donc bien le résultat.

Corrigé 494 (Existence et calcul d'une intégrale à paramètre)

Notons, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$: $f(x,t) = \frac{e^{ixt}-1}{t} e^{-t}$.

Pour x fixé, $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, admet une limite finie en 0 et $f(x,t) = \mathrm{o}_{t \to +\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc $I(x)$ est bien définie (et l'intégrale définissant $I(x)$ est absolument convergente).

On observe que f admet une dérivée partielle première par rapport à sa première variable, et que l'on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = ie^{ixt}e^{-t} = ie^{(ix-1)t}$, et $t \mapsto ie^{(ix-1)t}$ est bien intégrable sur $\mathbb{R}_+$ pour tout réel x.

Or, pour tout réel non nul x :

$$\int_0^{+\infty} e^{(ix-1)t} \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{ix-1} e^{(ix-1)t} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1-ix} = \frac{1+ix}{1+x^2}$$

Nous allons essayer d'appliquer le théorème de Leibniz. La fonction $(x,t) \mapsto ie^{(ix-1)t}$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, et, pour tout réel x, tout $t > 0$:

$$\left| i(e^{(ix-1)t} \right| \leqslant e^{-t}$$

(il y a en fait égalité).

Cette domination permet d'affirmer que I est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que, pour tout réel x :

$$I'(x) = \frac{i}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2}$$

En outre, $I(0) = 0$, d'où, en intégrant :

$$I(x) = -\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + i \arctan(x)$$

Corrigé 495 (Égalité entre deux fonctions)

1

a Posons $a(x,t) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$. Comme $0 \leqslant a(x,t) \leqslant \frac{1}{1+t^2}$ pour tout $(x,t) \in (\mathbb{R}_+)^2$, f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ (et ne l'est pas en $x < 0$ car dans ce cas, $1 = \mathrm{o}_{t \to +\infty}(a(x,t))$).

De plus, a est continue sur $\mathbb{R}^2$, donc elle est continue par rapport à chacune de ses variables. La majoration de $a(x,t)$ proposée ci-dessus montre que l'hypothèse de dérivation du théorème de continuité des intégrales à paramètres s'applique, d'où la continuité de f.

b Soit $b > 0$. Sur $[b, +\infty[$, on a

$$\left| \frac{\partial a}{\partial x}(x,t) \right| \leqslant e^{-bt} \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}(x,t) \right| \leqslant e^{-bt}$$

donc on peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme, obtenant le fait que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, mais aussi que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

On a donc

$$f''(x) + f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

2 On montre que g est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ grâce à une intégration par parties (comme pour l'intégrale de Dirichlet).

Remarque : l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\mathrm{d}t$ est toutefois semi-convergente (convergente mais pas absolument convergente). Cette semi-convergence fait que le théorème de continuité des intégrales à paramètres ne s'applique pas directement.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On effectue le changement de variable $u = x + t$ dans l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\mathrm{d}t$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\mathrm{d}t &= \int_{u=x}^{+\infty} \frac{\sin(u-x)}{u}\mathrm{d}u \\
&= \int_{u=x}^{+\infty} \frac{\sin(u)\cos(x) - \sin(x)\cos(u)}{u}\mathrm{d}u \\
&= \cos(x)\int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u - \sin(x)\int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}\mathrm{d}u \quad (\star)
\end{aligned}$$

cette dernière égalité se justifie en montrant la convergence des intégrales engagées (toujours par une intégration par parties).

Or $x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u$ est la primitive de $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ de limite nulle en $+\infty$. De même pour $x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}\mathrm{d}u$. Ceci montre par opérations algébriques que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le fait que g soit de limite nulle en $+\infty$ s'obtient aisément par la relation $\star$ (le produit d'une fonction bornée par une fonction tendant vers 0 en $+\infty$ tend vers 0 en $+\infty$).

Reste à établir la continuité en 0 : la relation $\star$ la justifie, en observant que $x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u$ est continue en 0 (par définition et existence de l'intégrale de Dirichlet). Le même raisonnement ne s'applique pas à $x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}\mathrm{d}u$, car $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}\mathrm{d}u$ est divergente (problème en 0). Cependant, pour tout $x \in]0,1]$

$$\left|\int_x^1 \frac{\cos(u)}{u}\mathrm{d}u\right| \leqslant \int_x^1 \frac{1}{u}\mathrm{d}u = -\ln(x)$$

et $\sin(x) \sim_{x\to 0} x$, donc

$$\sin(x)\int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}\mathrm{d}u \to_{x\to 0} 0$$

ce qui montre que g admet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u$ pour limite à droite en 0, soit sa valeur en 0 : g est continue en 0.

Remarque : on aurait pu établir la continuité de g en 0 en reprenant la formule initiale : (preuve rapide)

$$\begin{aligned}
|g(x) - g(0)| &= \left|\int_0^{+\infty} \frac{x\sin(t)}{t(x+t)}\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant x\left|\int_0^1 \frac{1}{x+t}\mathrm{d}t\right| + \left|x\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant x\ln\left(\frac{1+x}{x}\right) + x\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

qui tend bien vers 0 lorsque x tend vers 0.

3 $f-g$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $y''+y=0$, donc $f-g \in \mathrm{Vect}(\cos,\sin)$. Comme elle est en outre de limite nulle en $+\infty$, $f-g$ est identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, puis sur $\mathbb{R}_+$ par continuité en 0.

On a en particulier $f(0)=g(0)$, d'où

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

Corrigé 496 (Étude fonctionnelle d'une intégrale à paramètre)

Corrigé 497 (Simplification d'expressions intégrales à paramètres)

Corrigé 498 (Un calcul d'intégrale via une intégrale à paramètre)

Corrigé 499 (Égalité entre deux intégrales)

Le fait de devoir montrer cette égalité pour tout x donne l'idée de montrer que les fonctions sont deux primitives d'une même fonction, coïncidant en un point.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, posons

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{x}{t}\right)}{1+t^2}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^{x} \frac{\ln(t)}{t^2-1}\mathrm{d}t$$

La fonction F est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ grâce à l'encadrement

$$\forall x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \frac{\arctan\left(\frac{x}{t}\right)}{1+t^2} \leqslant \frac{\pi}{2(1+t^2)}$$

Cette domination (associée à la continuité de $x \mapsto \frac{\arctan\left(\frac{x}{t}\right)}{1+t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$) permet au passage d'établir la continuité de F sur $\mathbb{R}_+$.

G est également définie sur $\mathbb{R}_+$. En effet, la fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2-1}$ sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ admet une limite finie en 1 et se prolonge donc par continuité en une fonction g continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, en 0, $\frac{\ln(t)}{t^2-1} \sim_{t\to 0} -\ln(t)$, et $-\ln$ est intégrable sur $]0,1]$.

En outre $F(0)=G(0)(=0)$. Il reste à montrer que F et G ont même dérivée.

G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $G'(x)=g(x)$ (théorème fondamental de l'analyse).

Pour la dérivabilité de F on utilise bien sûr le théorème de dérivation sous le signe somme : posons $h(x,t) = \frac{\arctan\left(\frac{x}{t}\right)}{1+t^2}$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{t(1+(x/t)^2)(1+t^2)} = \frac{t}{(x^2+t^2)(1+t^2)}$$

En particulier, $\frac{\partial h}{\partial x}$ est continue par rapport à sa première variable, et continue par morceaux par rapport à sa seconde variable.

Soit $a>0$. Pour tout $(x,t) \in [a,+\infty[\times\mathbb{R}_+^*$:

$$0 \leqslant \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) \leqslant \frac{t}{(a^2+t^2)(1+t^2)}$$

et cette domination (associée à ce qui précède) par la fonction intégrable $t \mapsto \frac{t}{(a^2+t^2)(1+t^2)}$ justifie le caractère $\mathcal{C}^1$ de F sur $\mathbb{R}_+^*$, et le fait que, pour tout $x > 0$:

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(x^2+t^2)(1+t^2)}\mathrm{d}t$$

Or pour tout réels distincts α et β,

$$\frac{1}{(X+\alpha)(X+\beta)} = \frac{1}{\beta-\alpha}\left(\frac{1}{X+\alpha} - \frac{1}{X+\beta}\right)$$

donc pour tout $t > 0$, tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$:

$$\frac{t}{(x^2+t^2)(1+t^2)} = \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{t}{t^2+x^2} - \frac{t}{t^2+1}\right)$$

de sorte que si $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

$$F'(x) = \frac{1}{2(1-x^2)}\left[\ln\left(\frac{t^2+x^2}{t^2+1}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\ln(x)}{x^2-1} = g(x)$$

La continuité de F' en 1 montre que cette relation est valable en 1.

Pour résumer, F et G sont nulles en 0, dérivables de même dérivée sur $\mathbb{R}_+^*$, et F est continue sur $\mathbb{R}_+$. Pour s'assurer que $F = G$ sur $\mathbb{R}_+$, il suffit de montrer que G aussi est continue en 0. Or cela résulte de la définition d'une intégrale impropre : par exemple, $\int_0^{1/2} g(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0}\int_x^{1/2} g(t)\mathrm{d}t$, d'où $\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

Le résultat est donc bien établi.

Corrigé 500 (Études d'intégrales à paramètre)

Corrigé 501 (Calcul d'une intégrale via une intégrale à paramètre)

(Preuve rapide)

1 Provient de la domination

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+, \qquad \left|\frac{\arctan(tx)}{1+t^2}\right| \leqslant \frac{\pi}{2(1+t^2)}$$

2 En posant $g(x,t) = \frac{\arctan(tx)}{1+t^2}$, on a existence de $\frac{\partial g}{\partial x}$, continuité (resp. continuité par morceaux) de cette fonction par rapport à sa première (resp. sa seconde) variable, et, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)}$$

On domine facilement sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$ (par $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)$), d'où le caractère $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et le fait que, pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)}\mathrm{d}t$$

Pour $x \neq 1$, on obtient par une décomposition en éléments simples

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\left(-\frac{t}{1+t^2} + \frac{x^2t}{1+t^2x^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2(x^2-1)}\left[\ln\left(\frac{1+x^2t^2}{1+t^2}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\ln(x)}{x^2-1}$$

Par continuité de f' en 1, $f'(1) = \frac{1}{2}$.

3 On a

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t^2}\mathrm{d}t = -\int_0^1 f'(t)\mathrm{d}t = f(0) - f(1) = -f(1) = -\left[\frac{1}{2}(\arctan(t))^2\right]_0^{+\infty} = -\frac{\pi^2}{8}$$

Remarque : pour calculer cette intégrale, une autre approche possible consistait à partir de $\frac{1}{1-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}$ pour tout $t \in [0,1[$, puis d'appliquer le théorème d'intégration terme à terme (voir un exocours).

Corrigé 502 (Existence et calcul d'une intégrale à paramètre, encore)

Notons $g(x,t) = \frac{\ln(1+x\cos(t))}{\cos(t)}$ pour tout $(x,t) \in]-1,1[\times[0,\frac{\pi}{2}[$. La fonction g admet une dérivée partielle première par rapport à sa première variable, et

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{1+x\cos(t)}$$

De plus, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+x\cos(t)}\mathrm{d}t$ se calcule : la piste naturelle consiste donc à utiliser le théorème de dérivation sous le signe intégrale.

Sur $]-1,1[\times[0,\frac{\pi}{2}[$:

(1) la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ (faussement impropre en $\frac{\pi}{2}$).

(2) $\frac{\partial g}{\partial x}$ est continue par rapport à sa première variable, et intégrable par rapport à sa seconde variable.

(3) Pour tout $a \in]0,1[$, tout $(x,t) \in [-a,a]\times[0,\frac{\pi}{2}[$:
$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{\max(|\ln(1-a\cos(t))|,|\ln(1+a\cos(t))|)}{\cos(t)}$$
et $t \mapsto \frac{\max(|\ln(1-a\cos(t))|,|\ln(1+a\cos(t))|)}{\cos(t)}$ est intégrable sur $[0,\frac{\pi}{2}[$

Par conséquent, f est dérivable sur $]-1,1[$, et, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$f'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+x\cos(t)}\mathrm{d}t$$

On effectue le changement de variable $u = \tan(t/2)$ ($t \mapsto \tan(t/2)$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,\pi/2[$ sur $[0,1[$), de sorte que

$$f'(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+x\frac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{2}{1+x+(1-x)u^2}\mathrm{d}u$$
$$= \frac{1}{1-x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left[\arctan\left(u\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\right]_0^1$$

d'où

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$$

En fait, en posant $\theta = \arccos(x)$, on peut vérifier que

$$f'(x) = \frac{\theta}{\sin(\theta)} = \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos'(x)\arccos(x)$$

Comme $f(0) = 0$, on obtient

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4} - \arccos(x)^2\right)$$

Corrigé 503 (Existence et calcul d'une intégrale à paramètre, toujours)

Corrigé 504 (Représentation graphique d'une fonction définie par une intégrale)

Corrigé 505 (Développement asymptotique d’une fonction intégrale)

Corrigé 506 (Subdivision d’une intégrale)

Corrigé 507 (Équivalent en $+\infty$ d’une intégrale à paramètre)

CHAPITRE 47

Oraux 12 : convergence dominée et intégrales à paramètres (énoncés)

Aller aux corrigés 48

Exercice 508

1 Pour n dans $\mathbb{N}^*$, justifier l'existence de

$$u_n = (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}.$$

2 Montrer que (u_n) tend vers 0.

3 Nature de la série de terme général u_n.

Exercice 509

Domaine de définition et calcul de $f \ : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} \ \frac{\sin(xt)}{t}\mathrm{d}t$.

Exercice 510

(Centrale MP 10) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit : $u_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \sin(nt)\mathrm{d}t$.

1 Convergence et limite de (u_n).

2 Nature de la série de terme général u_n.

Exercice 511

Soit (u_n) une suite croissante d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$, tendant vers l'infini. Montrer l'existence des deux quantités écrites et l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-u_n x} \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{u_n}.$$

Exercice 512

(TPE) Limite et équivalent de $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1+x}\mathrm{d}x$.

Exercice 513

(CCP) Existence et limite de $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^n}{\sqrt{t}+t^{2n}} \mathrm{d}t$.

Exercice 514

(CCP)

1

a Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1/n} \mathrm{d}x$. Calculer I_n puis $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On suppose $x \mapsto f(x)/x^2$ intégrable sur $]0,1]$.

b Montrer que $x \mapsto f(x)/x$ est intégrable sur $]0,1]$.

c Déterminer la limite de la suite de terme général $J_n = \int_0^1 \frac{f(x)}{x+1/n} \mathrm{d}x$.

2

a (TPE) Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Déterminer la limite de la suite de terme général $I_n = n \int_0^1 t^n \, f(t) \mathrm{d}t$.

b Montrer que le résultat obtenu la question précédente est encore vrai pour f seulement continue.

Exercice 515

1 Pour $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, calculer $J_{n,k} = \int_0^{+\infty} t^k e^{-nt} \mathrm{d}t$.

2 Donner un équivalent de $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^3 e^{-nt}}{\sqrt{1+t^4}} \mathrm{d}t$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 516

(CCP) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ bornée.

1 Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto e^{-|t|} f(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

2 Montrer que $g : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} \, f(x-t) \mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie $g'' = g - 2f$.

Exercice 517

(CCP) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{+\infty} \sqrt{t} \, e^{-nt} \mathrm{d}t$. Calculer I_n et en déduire : $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$.

Remarque : On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 518

(CCP) Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} e^{-\sqrt{n}x}$. Montrer que f est définie et intégrable sur $]0,+\infty[$. Calculer $\int_0^{+\infty} f$.

Exercice 519

1 (ENSAM) Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite strictement positive, strictement croissante, de limite infinie. Montrer : $\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{-a_n t}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a_n}$.

2 (TPE) Justifier la convergence et montrer : $\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n!}{(2n)!}$.

3 (CCP) Soient $r>0$ et $z\in\mathbb{C}$ tels que $|z|<r$. Montrer que $\int_0^{2\pi}\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2}\mathrm{d}\theta = 2\pi$.

4 (TPE) Montrer : $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{e^x-1}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}$.

Exercice 520

(CCP)

1 Étudier la convergence de la série de terme général $(-1)^n/(3n+1)$.

2 Développer en série entière $f : x\mapsto \frac{1}{1+x^3}$ au voisinage de 0.

3 Calculer de deux façons $\int_0^1 f$ et en déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Exercice 521

(ENSAM) Soit $F : x\mapsto \int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

1 Déterminer l'ensemble de définition de F. Montrer que F est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.

2 Vérifier que F est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle $y''+y=1/x$. En déduire : $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}$, $F(x)=\int_x^{+\infty}\frac{\sin(t-x)}{t}\mathrm{d}t$.

3 Qu'obtient-on en faisant tendre x vers 0 ?

Exercice 522

(TPE) Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ non constant. On suppose par l'absurde que P ne possède pas de racine complexe. Soit $I : r\in\mathbb{R}^+\mapsto\int_0^{2\pi}\frac{1}{P(re^{i\theta})}\mathrm{d}\theta$.

1 Montrer que I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et que I est constante.

2 Déterminer la limite de $I(r)$ quand $r\to+\infty$. Conclure.

Exercice 523

1 (Centrale PSI 10) Soit, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $I_n=\int_0^{+\infty}\frac{t^2e^{-nt}}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t$. Déterminer la limite de (I_n). Donner un équivalent de I_n.

2 (Mines MP 10) Donner un équivalent simple de $I_n=\int_0^{+\infty}e^{-x^n}\mathrm{d}x$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 524

(Centrale MP 10) On pose $u(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)\mathrm{d}t$ et $v(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\sin(xt)\mathrm{d}t$.
1 Déterminer le domaine de définition D de u et v. Montrer que u et v sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D.
2 Exprimer u et v au moyen des fonctions usuelles.

Exercice 525

(CCP MP 13) Soit $f : x \mapsto \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\cos(xy)}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y$.
1 Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$; calculer $f(0)$.
2 Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(x\sin t)\mathrm{d}t$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
3 Montrer que f est solution de $x\,y'' + y' + x\,y = 0$.

Exercice 526

Soit $f : x \mapsto \int_0^{\pi/2}(\sin t)^x\mathrm{d}t$.
1 Montrer que f est définie et continue sur $]-1,+\infty[$.
2 Calculer $f(1)$. Montrer : $\forall x > -1,\ (x+2)\,f(x+2) = (x+1)f(x)$. En déduire un équivalent de $f(x)$ quand $x \to -1^+$.
3 Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$.
4 Justifier : $\int_0^{\pi/2}\ln(\sin t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2}\ln(\cos t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right)\mathrm{d}t$. En déduire $f'(0)$.

Exercice 527

(CCP MP 13) Pour x dans $\mathbb{R}$, soit $F(x) = \int_0^{\pi}\frac{\sin t\mathrm{d}t}{1+(\cos(xt))^2}$.
1 Calculer $F(1/2)$. Indiquer une méthode permettant de calculer $F(n)$ si $n \in \mathbb{N}$.
2 La fonction F est-elle continue sur $\mathbb{R}$? uniformément continue ?

Exercice 528

(Navale 13) Déterminer la limite de $a \mapsto a\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{a+1}}$ quand $a \to 0^+$ et la limite de $a \mapsto a\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^{a+1}}$ quand $a \to +\infty$.

Exercice 529

1 (TPE) Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{e^t+t^n}$. Déterminer la limite de (I_n).

2 Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : t \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \frac{n}{\sqrt{t}} \ln\left(1+\frac{1}{nt}\right)$.

a Montrer que f_n est intégrable sur $]0,+\infty[$.

b Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$.

3 (CCP) Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \frac{\ln(1+x/n)}{x(1+x^2)}$.

a La fonction f_n est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Montrer qu'elle est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b Déterminer la limite de la suite de terme général $I_n = n\int_0^{+\infty} f_n$.

Exercice 530

(CCP MP 13) Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$.

1 Montrer que (a_n) converge et déterminer sa limite.

2 Donner un développement asymptotique à trois termes de a_n.

CHAPITRE 48

Oraux 12 : convergence dominée et intégrales à paramètres (corrigés)

Aller aux énoncés 47

Corrigé 508 (Nature d'une série alternée d'intégrales (CCP MP 13))

Corrigé 509 (Étude d'une intégrale à paramètre (ENSEA 13))

Corrigé 510 (Nature d'une série dont le terme général est une intégrale)

Corrigé 511 (Une interversion somme-intégrale (Centrale PSI 10))

Le membre de droite existe par application du critère spécial des séries alternées ($(1/u_n)$ est bien décroissante de limite nulle).

Ce même critère montre que pour tout $x > 0$, $\sum(-1)^n e^{-u_n x}$ converge. Il fournit aussi une majoration du reste, en particulier

$$\forall\, x > 0, \quad 0 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{-u_n x} \leqslant e^{-u_0 x}$$

Il manque la continuité par morceaux de la somme pour justifier l'existence du membre de gauche, que l'on obtient par exemple par un argument de convergence sur tout $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$ grâce à la majoration du reste :

$$\forall\, x \geqslant a, \forall\, N \in \mathbb{N}, \quad \left|\sum_{n=N+1}^{\infty}(-1)^n e^{-u_n x}\right| \leqslant e^{-u_{N+1}x} \leqslant e^{-u_{N+1}a}$$

Pour montrer l'égalité entre ces deux expressions, il n'est pas possible d'appliquer directement le théorème d'intégration terme à terme car il n'est pas sûr que $\sum \frac{1}{u_n}$ converge.

Cependant, on a, pour tout $x > 0$, tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\left|\sum_{n=0}^{N}(-1)^n e^{-u_n x}\right| \leqslant e^{-u_0 x}$$

car à x fixé, les suites des sommes partielles des rangs pairs et impairs respectivement sont adjacentes.

Cette domination légitime l'emploi du théorème de convergence dominée à la suite des sommes partielles, qui conduit bien au résultat voulu.

Corrigé 512 (Limite et équivalent d'une suite d'intégrales)

Corrigé 513 (Existence et limite d'une suite d'intégrales)

Corrigé 514 (Limite d'une suite d'intégrales dépendant d'une fonction)

Corrigé 515 (Équivalent d'une suite d'intégrales (Télécom Sud Paris))

Corrigé 516 (Expression sous forme intégrale d'une solution d'une équation différentielle)

Corrigé 517 (Information sur $\zeta(3/2)$)

Corrigé 518 (Intégrale sur $\mathbb{R}_+$ d'une série de fonctions)

Corrigé 519 (Interversion série-intégrale)

Corrigé 520 (Intégration d'une série entière pour déterminer la somme d'une série)

Corrigé 521 (Résolution d'une équation différentielle via une intégrale à paramètre)

Corrigé 522 (Le théorème fondamental de l'algèbre par les intégrales)

Corrigé 523 (Équivalents de suites d'intégrales)

Corrigé 524 (Simplification de fonctions définies par des intégrales à paramètres)

Corrigé 525 (Intégrale à paramètre et équation différentielle)

Corrigé 526 (Étude d'une intégrale à paramètre)

Corrigé 527 (Uniforme continuité d'une intégrale à paramètre)

Corrigé 528 (Limite de séries de Riemann)

Corrigé 529 (Limite d'une suite d'intégrales)

Corrigé 530 (Développement asymptotique d'une suite d'intégrales)

CHAPITRE 49

TD 13 : dénombrabilité et familles sommables (énoncés)

Aller aux corrigés 50

1. Ensembles finis

Exercice 531

1 Soit $E = [\![1, 6]\!]$. Combien peut-on former de nombres différents avec trois chiffres distincts choisis dans E ? Quelle est la somme de ces nombres ?

2 Une urne contient 6 boules blanches numérotées de 1 à 6 et 5 boules noires numérotées de 1 à 5. On tire successivement 4 boules sans remise. Combien de résultats amènent 3 boules blanches et une boule noire ?

3 Combien y a-t-il de mots :

a de 6 lettres écrits avec les lettres A à F ?

b de 5 lettres écrits avec deux A et trois B ?

c de 6 lettres écrits avec exactement deux A et trois B ?

d de 6 lettres écrits avec deux A, trois B, un C ?

4 Combien existe-t-il d'anagrammes du mot chaise ? d'anagrammes du mot anagramme ?

5 Un jeu comporte 32 cartes dont 8 par couleur. Une main est constituée de 8 cartes non ordonnées.

a Quel est le nombre de mains possibles ?

b Combien de mains contiennent au moins un as ?

c Combien contiennent exactement un roi ?

d Combien contiennent au moins un coeur ou une dame ?

e Combien ne contiennent que des cartes de 2 couleurs au plus ?

6 Un tiroir contient 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures vertes et 2 paires de chaussures rouges. On choisit deux chaussures au hasard et simultanément.

a Combien y a t-il de tirages possibles ?

b Combien amènent deux chaussures de la même couleur ?

c Combien amènent un pied gauche et un pied droit ?

d Combien permettent de reconstituer une vraie paire de chaussures ?

Exercice 532

Soit E un ensemble fini non vide. On appelle *dérangement* de E toute permutation f de E sans point fixe, c'est-à-dire telle que :

$$\forall\, k \in E, \quad f(k) \neq k$$

Bien entendu, le nombre de dérangements d'un ensemble fini ne dépend que de son cardinal.
Pour tout entier naturel non nul n, on note Der_n l'ensemble des dérangements de $[\![1, n]\!]$, et d_n son cardinal.

1 Soit n un entier naturel non nul. Donner le cardinal de l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$.

2 Calculer d_1 et d_2.

3 On fixe un entier naturel $n \geqslant 3$, et, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on considère les ensembles

$$X_k = \{f \in Der_n, f^{-1}(n) = f(n) = k\} \quad \text{et} \quad Y_k = \{f \in Der_n, f^{-1}(n) = k, f(n) \neq k\}$$

Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Calculer les cardinaux de X_k et de Y_k en fonction de d_{n-2} et d_{n-1}.
Indication : on pourra établir une bijection entre Y_k et Der_{n-1}.

4 En déduire, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, la formule :

$$d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2})$$

5 Montrer, pour tout $n \geqslant 2$:

$$d_n = n d_{n-1} + (-1)^n$$

6 En déduire que pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$d_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} (-1)^k \frac{n!}{k!}$$

Exercice 533

On appelle *monoïde* un ensemble muni d'une loi de composition interne associative, admettant un élément neutre pour cette loi. Montrer qu'un monoïde fini et régulier (*i.e.* tout élément est simplifiable à gauche et à droite) est un groupe.

Exercice 534

Soit n un entier naturel non nul. On choisit $n+1$ nombres quelconques (distincts deux à deux) dans $[\![1, 2n]\!]$. Montrer qu'il en existe deux qui sont premiers entre eux. Montrer qu'il en existe deux tels que l'un divise l'autre.

Exercice 535

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$.

1 Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?

2 Combien y a-t-il d'applications croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?

Exercice 536

Par combien de zéros se termine le nombre $1000000!$?

Exercice 537

1 Montrer :

$$\forall (p,q,r) \in \mathbb{N}^3, \quad \sum_{i=0}^{r} \binom{p}{i}\binom{q}{r-i} = \binom{p+q}{r}.$$

2 En déduire une expression plus simple de $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$.

Exercice 538

1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer

$$\operatorname{Card}\left\{(A,B) \in \mathcal{P}([\![1,n]\!])^2, A \subset B\right\}.$$

2 Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$. Calculer

$$\sum_{A \subset E} \operatorname{Card}(A), \quad \sum_{A,B \subset E} \operatorname{Card}(A \cap B) \quad \text{et} \quad \sum_{A,B \subset E} \operatorname{Card}(A \cup B).$$

Exercice 539

On fixe un entier $n \geqslant 1$, et $p \in [\![1,n]\!]$. Calculer :

$$\operatorname{Card}\{(a_1,\ldots,a_p) \in \mathbb{N}^p, a_1 + \cdots + a_p = n\}.$$

Exercice 540

Soit S un ensemble de 10 entiers distincts choisis parmi les nombres $1, 2, \ldots, 99$. Montrer que S contient toujours deux sous-ensembles disjoints dont la somme de leurs éléments respectifs est la même.

2. Dénombrabilité

Exercice 541

Soit (A_n) une suite de points du plan, tous distincts de l'origine. Montrer l'existence d'une droite passant par l'origine, et ne passant par aucun des points A_n.

Exercice 542

Montrer qu'il n'existe pas de fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et $f(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

Exercice 543

Montrer qu'on peut [a] dessiner un nombre non dénombrable de O disjoints dans le plan, mais qu'on ne peut dessiner qu'un nombre au plus dénombrable de 8 disjoints dans le plan.

a. Enfin, façon de parler ...

Exercice 544

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit U est un ouvert dense de $\mathbb{R}^n$. Soit X est une partie dénombrable de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $U \setminus X$ est dense. Est-ce nécessairement un ouvert ?

Exercice 545

Montrer que l'ensemble des nombres algébriques sur $\mathbb{Q}$ est dénombrable. Qu'en déduire sur l'ensemble des nombres complexes transcendants ?

3. Familles sommables, produit de Cauchy

Exercice 546

1 Existence et calcul de

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$$

2 Existence et calcul de $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k!}$.

Exercice 547

Pour tout $(n,p)\in\mathbb{N}^2$, on pose $a_{n,n} \overset{def}{=} 0$, et, si $n\neq p$: $a_{n,p} \overset{def}{=} \frac{1}{n^2-p^2}$.

1 Montrer que la famille $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ n'est pas sommable.

2 Calculer $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p}$ et $\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,p}$.

Exercice 548

Montrer que si les deux séries de nombres complexes $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent et une au moins converge absolument, alors leur produit de Cauchy converge, et que sa somme est le produit des sommes.

Exercice 549

Le produit de Cauchy de deux séries divergentes est-il nécessairement divergent ? Que dire si les deux séries sont en outre de termes généraux strictement positifs ?

CHAPITRE 50

TD 13 : dénombrabilité et familles sommables (corrigés)

Aller aux énoncés 49

1. Ensembles finis

Corrigé 531 (Dénombrement concret)

Corrigé 532 (Dérangements)

1 $n!$ (cours).

2 $d_1 = 0$ et $d_2 = 1$.

3 Se donner un élément de X_k, c'est se donner un dérangement de $[\![1, n-1]\!] \backslash \{k\}$: X_k est donc de cardinal d_{n-2}.

On définit une application ψ de Y_k vers Der_{n-1}, de la façon suivante : à tout élément f de Y_k, on associe le dérangement de $[\![1, n-1]\!]$, coïncidant avec f sur $[\![1, n-1]\!] \backslash \{k\}$, et envoyant k sur $f(n)$.

On définit également une application ϕ de Der_{n-1} vers Y_k envoyant un dérangement g de $[\![1, n-1]\!]$ sur le dérangement de $[\![1, n]\!]$ coïncidant avec g sur $[\![1, n-1]\!] \backslash \{k\}$, envoyant k sur n, et n sur $g(k)$. On vérifie aisément que :

$$\phi \circ \psi = \mathrm{Id}_{Y_k} \quad \text{et} \quad \psi \circ \phi = \mathrm{Id}_{Der_{n-1}}$$

Ainsi, Y_k et Der_{n-1} sont en bijection, et ont donc même cardinal d_{n-1}.

4 Comme Der_n est la réunion disjointe des ensembles $X_1, \ldots, X_{n-1}, Y_1, \ldots, Y_{n-1}$, la question précédente prouve que :

$$d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2}).$$

5 Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2, on formule l'hypothèse :

$$(\mathcal{H}_n): \quad d_n = nd_{n-1} + (-1)^n$$

L'amorçage pour $n = 2$ est aisé.

Fixons un entier $n \geqslant 2$, supposons $\mathcal{H}_n$, et déduisons-en $\mathcal{H}_{n+1}$: $n+1 \geqslant 3$, donc on a $d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$ d'après la question précédente. D'après l'hypothèse de récurrence, $d_{n-1} = \frac{d_n - (-1)^n}{n}$, ce qui donne en remplaçant dans l'expression précédente :

$$d_{n+1} = (n+1)d_n + (-1)^{n+1}$$

La propriété est donc héréditaire.

En conclusion, la propriété est vérifiée, pour tout entier $n \geqslant 2$.

6 Pour tout entier naturel non nul n, on formule l'hypothèse de récurrence :

$$(\mathcal{H}_n): \quad d_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} (-1)^k \frac{n!}{k!}$$

On vérifie aisément que $\mathcal{H}_1$ est vraie.

Fixons un entier naturel non nul n, supposons $\mathcal{H}_n$, et montrons $\mathcal{H}_{n+1}$:

$$d_{n+1} = (n+1)d_n + (-1)^{n+1} = (n+1)\left(\sum_{0\leqslant k\leqslant n}(-1)^k\frac{n!}{k!}\right) + (-1)^{n+1}$$

$$= \left(\sum_{0\leqslant k\leqslant n}(-1)^k\frac{(n+1)!}{k!}\right) + (-1)^{n+1}\frac{(n+1)!}{(n+1)!} = \sum_{0\leqslant k\leqslant n+1}(-1)^k\frac{(n+1)!}{k!}$$

La propriété est donc héréditaire.

En conclusion, la formule est bien vérifiée pour tout entier naturel non nul n.

Corrigé 533 (Monoïde fini et régulier)

Soit $(G,\cdot)$ un tel monoïde, d'élément neutre e.

Il s'agit de montrer que tout élément a de G admet un symétrique, *i.e.* l'existence de $x \in G$ tel que $ax = xa = e$.

On introduit l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & ax \end{array}$$

Puisque a est simplifiable à gauche, φ est injective. Puisque G est en outre fini, φ est bijective : en particullier, e admet un antécédent par φ, donc a admet un symétrique à droite. Par un argument similaire (en considérant $x \mapsto xa$), a est symétrisable à gauche, donc a admet un bien un symétrique : ceci valant pour tout $a \in G$, G est un groupe.

Remarque : plutôt que d'introduire une application bijective, on aurait pu introduire ψ : $k \in [\![0, \mathrm{Card}(G)]\!] \mapsto a^k$, et utiliser sa non injectivité. Cette idée est liée au fait que dans un groupe fini, tout élément est d'ordre fini, donc son symétrique est l'une de ses puissances (à un exposant naturel).

Remarque : souvent, pour passer d'un résultat d'unicité à un résultat d'existence, il y a une application pour ça.

Corrigé 534 (Utilisation du principe des tiroirs)

Pour la première question, deux des entiers considérés sont consécutifs donc premiers entre eux.

Pour la seconde, si on note $v(n)$ la « partie impaire » de n (*i.e.* $\frac{n}{2^{v_2(n)}}$), alors deux des entiers considérés ont même partie impaire.

Corrigé 535 (Nombre d'applications (strictement) croissantes)

Corrigé 536 (Nombre de zéros)

Corrigé 537 (Formules de convolution de Vandermonde)

1 Il suffit de fixer deux ensembles disjoints A et B de cardinaux respectifs p et q, et d'écrire $\mathcal{P}_r(A \cup B)$ comme la réunion disjointe des

$$\mathcal{P}i, r-i \overset{def}{=} \{X \in \mathcal{P}(A\cup B), \mathrm{Card}(X\cap A) = i \quad \text{et} \quad \mathrm{Card}(X \cap B) = r-i\}$$

lorsque i décrit $[\![0, r]\!]$, et d'observer que $\mathcal{P}_{i,r-i}$ est équipotent à $\mathcal{P}_i(A) \times \mathcal{P}_{r-i}(B)$.

Remarque : on peut aussi trouver le résultat en égalant les coefficients dans devant X^r à partir de la relation

$$(1+X)^p(1+X)^q = (1+X)^{p+q}$$

2 Appliquant la formule précédente lorsque $p = q = r = n$, on obtient

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \binom{2n}{n}$$

Corrigé 538 (Dénombrement lié à des parties)

1 Notons Ω l'ensemble dont on cherche le cardinal.
Première approche
Ω est la réunion disjointe des

$$\Omega_k = \{(A,B) \in \Omega, \mathrm{Card}(B) = k\}$$

où k décrit $[\![0,n]\!]$. Or Ω_k est lui-même réunion disjointe des

$$\Omega_B = \{(A,B) \in CP([\![1,n]\!])^2, A \subset B\}$$

où B décrit $\mathcal{P}_k([\![0,n]\!])$.
Comme $\mathrm{Card}(\Omega_B) = 2^k$ si $\mathrm{Card}(B) = 2^k$, on obtient

$$\mathrm{Card}(\Omega) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = (2+1)^n = 3^n$$

Deuxième approche
Le résultat trouvé est si simple qu'on se dit qu'un autre argument, plus direct, devait être possible. Comme le 3^n rappelle le $2^n = \mathrm{Card}(\mathcal{P}([\![1,n]\!])$, on a l'idée d'introduire

$$\begin{array}{rrcl} \varphi : & \Omega & \to & \{0,1,2\}^{[\![1,n]\!]} \\ & (A,B) & \mapsto & f \ : k \mapsto 2 \text{ si } k \in A, 1 \text{ si } k \in B \setminus A, 0 \text{ si } k \notin B \end{array}$$

et on vérifie qu'il s'agit d'une bijection (son inverse bilatéral pour la composition est $\psi \ : f \mapsto (f^{-1}(\{2\}), f^{-1}(\{1,2\})))$.

2 Notons $S \overset{def}{=} \sum_{A \subset E} \mathrm{Card}(A)$.
Première approche : sommer à cardinal de A constant

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{A \in \mathcal{P}_k(E)} \mathrm{Card}(A) \\ &= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} n \binom{n-1}{k} \quad \text{par la formule du pion} \\ &= n 2^{n-1} \end{aligned}$$

Deuxième approche : compliquer (provisoirement) la somme

$$\begin{aligned} S &= \sum_{A\subset E}\sum_{a\in A} 1 \\ &= \sum_{a\in A}\sum_{A\in\mathcal{P}(E), a\in A} 1 \\ &= \sum_{a\in A} \operatorname{Card}(\mathcal{P}(E\setminus\{a\}) \\ &= \sum_{a\in A} 2^{n-1} \\ &= n2^{n-1} \end{aligned}$$

Troisième approche : changer d'indice l'application $A \mapsto E\setminus A$ est une permutation de $\mathcal{P}(E)$, donc

$$\begin{aligned} S &= \sum_{A\subset E} Card(E\setminus A) \\ &= \sum_{a\in A} \operatorname{Card}(E) - S \\ &= 2^n - S \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corrigé 539 (Décomposition d'un entier en somme)

Corrigé 540 (Parties disjointes de même somme)

2. Dénombrabilité

Corrigé 541 (Droite évitant un nombre dénombrable de points)

Corrigé 542 (Fonction continue passant d'un rationnel à un irrationnel, et réciproquement)

Corrigé 543 (Dessiner des 8 dans le plan)

Corrigé 544 (Enlever un nombre dénombrable de points à un ouvert dense)

Corrigé 545 (Existence non constructive de nombres transcendants)

3. Familles sommables, produit de Cauchy

Corrigé 546 (Familles sommables et calculs de somme)

Corrigé 547 (Une famille non sommable)

1 La sous-famille[1] $(a_{p+1,p})_{p\in\mathbb{N}}$ n'est pas sommable, donc $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ ne l'est pas non plus.

2 Fixons $p\in\mathbb{N}$.
Si $p=0$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,p} = \zeta(2)$.

1. Ou plutôt $(a_{p+1,p})_{\Omega}$ où $\Omega = \{(p+1,p), p\in\mathbb{N}\}$

Si $p \in \mathbb{N}^*$, on part de
$$\frac{1}{n^2-p^2} = \frac{1}{2p}\left(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p}\right)$$
valable pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{p\}$.

Ainsi, en notant $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (avec la convention $H_0 = 0$) :
$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n,p} &= \frac{1}{2p}\sum_{n\in\mathbb{N}, n\neq p}\left(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p}\right)\\
&= \frac{1}{2p}\sum_{n=0}^{p-1}\left(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p}\right) + \frac{1}{2p}\sum_{n=p+1}^{\infty}\left(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p}\right)\\
&= \frac{1}{2p}(-H_p - (H_{2p-1} - H_{p-1})) + \frac{1}{2p}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2p}\right)\\
&= \frac{1}{2p}\left(-\frac{1}{p} - H_{2p-1} + H_{2p}\right)\\
&= \frac{-1}{4p^2}
\end{aligned}$$
de sorte que $\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n,p} = \frac{-\zeta(2)}{4}$, puis
$$\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n,p} = \frac{3}{4}\zeta(2) = \frac{\pi^2}{8}$$
En observant que $a_{n,p} = -a_{p,n}$ pour tout $(p,n) \in \mathbb{N}^2$, on obtient
$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p\in\mathbb{N}} a_{n,p} = \frac{3}{4}\zeta(2) = \frac{-\pi^2}{8}$$
Remarque : ceci prouve à nouveau que la famille n'est pas sommable puisque dans le cas contraire, le théorème de Fubini s'appliquerait.

Corrigé 548 (Théorème de Mertens)

Corrigé 549 (Produit de Cauchy de séries divergentes)

CHAPITRE 51

Oraux 13 : dénombrabilité et familles sommables (énoncés)

Aller aux corrigés 52

Exercice 550

Soit X et Y deux ensembles finis. Dénombrer :
1 Les fonctions de X dans Y.
2 Les injections de X dans Y.
3 Les bijections de X sur Y.
4 Les surjections de X sur Y.

Exercice 551

1 (Mines MP 93) Soit E un ensemble à n éléments. Trouver le nombre de relations binaires sur E. Combien d'entre elles sont réflexives ? symétriques ? réflexives et symétriques ?
2 (X MP 90) Soit A un ensemble de cardinal n, R une relation d'équivalence sur A avec k classes. Soit m le cardinal du graphe de R. Montrer que $n^2 \leqslant km$.

Exercice 552

(Mines PSI 08, X PC 08) Soit E un ensemble fini, A et B des parties de E.
1 Combien y a-t-il de parties X de E telles que $A \cup X = B$?
2 Soit E un ensemble de cardinal n et $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. Déterminer le nombre de $X \in \mathcal{P}(E)$ telles que $A \cap X = B$.

Exercice 553

Calculer $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$ par trois méthodes différentes.

Exercice 554

Étudier $\sum_{p,q\in\mathbb{N}^*, p\wedge q=1} \frac{1}{p^2q^2}$. On donne $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Exercice 555

1 (Mines MP 00) Pour quelles valeurs du réel α la famille $\left(\frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}}$ est-elle sommable ?
2 (Mines MP 98) Trouver un équivalent simple de $s_n = \frac{1}{n^3}\sum_{p,q\in[\![1,n]\!]}\frac{pq}{p+q}$.
3 (Mines MP 98) Calculer

$$\sum_{(k,n)\in\mathbb{N}^{*2}}\frac{1}{k(2k+1)(2n)^{2k}}$$

4 (Mines MP 97) Sommabilité et somme de $\left(\frac{(-1)^p}{q^p}\right)_{p,q\geqslant 2}$.
5 (Mines MP 92) Nature de la série $\sum n^\alpha \sum_{k=2}^n (\ln k)^2$.

Exercice 556

(ENS MP 10) Soit $\sigma\ :\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ bijective et $A=\{n\in\mathbb{N},\sigma(n)\geqslant n\}$ et $B=\{n\in\mathbb{N},\sigma(n)<n\}$.
1 Est-il possible que A soit infini et B fini ?
2 Est-il possible que A et B soient infinis ?
3 Est-il possible que A soit fini et B infini ?

Exercice 557

(X MP 97) Soit (a_n) une suite de $\mathbb{R}_+$.
1 On suppose que la série $\sum a_n$ converge. Montrer que $\sum \frac{a_n}{n(n+1)}$ converge.
Montrer que $\sum k\sum_{n=k}^{\infty}\frac{a_n}{n(n+1)}$ converge, et comparer sa valeur à $\sum a_n$.
2 On suppose que $\sum\sqrt{n}a_n$ converge, et on pose $w_n=\sum_{p=n}^{\infty}a_p^2$. Montrer l'existence de w_n et la convergence de la série de terme général $\sqrt{\frac{w_n}{n}}$.

CHAPITRE 52

Oraux 13 : dénombrabilité et familles sommables (corrigés)

Aller aux énoncés 51

Corrigé 550 (Divers dénombrements d'ensembles d'applications (X MP 10))

Corrigé 551 (Dénombrement de relations binaires)

Corrigé 552 (Parties donnant une intersection fixée avec une partie fixée)

Notons N le nombre cherché.

Si B n'est pas inclus dans A, alors $N = 0$.

Supposons désormais B inclus dans A. Notons Ω l'ensemble des parties X de E telles que $A \cap X = B$. Une partie X de E appartient à Ω si et seulement si elle contient B, et est disjointe de $A \setminus B$.

L'application

$$\begin{array}{cccc} \Phi & : & \Omega & \to & \mathcal{P}(E \setminus A) \\ & & X & \mapsto & X \cap (E \setminus A) \end{array}$$

est bijective, d'application inverse

$$\begin{array}{cccc} \Psi & : & \mathcal{P}(E \setminus A) & \to & \Omega \\ & & H & \mapsto & H \cup B \end{array}$$

Ω est donc de cardinal $N = 2^{n-\mathrm{Card}(A)}$.

Corrigé 553 (Trois calculs d'une même somme (X MP 08))

Corrigé 554 (Une sommabilité arithmétique (Centrale MP 99))

Considérons la famille $\mathcal{F} \overset{def}{=} \left(\frac{1}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$.

Le théorème de Fubini montre que cette famille est sommable, et que sa somme vaut $\zeta(2)^2$.

La famille $\left(\frac{1}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2, p\wedge q=1}$ étant une sous-famille de $\mathcal{F}$, elle est également sommable. Notons S sa somme.

L'idée consiste alors à utiliser le théorème de sommation par paquets à $\mathcal{F}$, en posant, pout tout $\delta \in \mathbb{N}^*$:

$$I_\delta = \{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2, p \wedge q = \delta\}$$

On a

$$\zeta(2)^2 = \sum_{\delta\in\mathbb{N}^*} \sum_{(p,q)\in I_\delta} \frac{1}{p^2q^2}$$

or, pour tout $\delta \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{(p,q)\in I_\delta} \frac{1}{p^2q^2} = \frac{1}{\delta^4} S$$

d'où

$$S = \frac{\zeta(2)^2}{\zeta(4)} = \frac{90}{36} = \frac{5}{2}$$

Corrigé 555 (Études diverses de sommabilité)

Corrigé 556 (Points sous la première bissectrice d'une permutation de $\mathbb{N}$)

Corrigé 557 (Étude difficile de famille sommable)

CHAPITRE 53

TD 14 : séries entières (énoncés)

Aller aux corrigés 54

1. Rayon de convergence d'une série entière, domaine de convergence

Exercice 558

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.

1 $\sum \frac{n!}{(2n)!}x^n$; $\sum \ln n x^n$; $\sum \frac{\sqrt{n}x^{2n}}{2^n+1}$.

2 $\sum \frac{(1+i)^n z^{3n}}{n.2^n}$; $\sum_n \frac{(-1)^n}{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}z^n$.

3 $\sum a^{\sqrt{n}}z^n$; $\sum z^{n^n}$; $\sum(\exp(1/n)-1)z^n$; $\sum \ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)z^n$

4 $\sum d_n z^n$ où d_n est le nombre de diviseurs de n.

5 (Mines) Soit $\theta, \alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer le RCV de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}x^n$.

Exercice 559

1 Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, telle que $a_n > 0$ pour tout entier n et soit $\alpha > 0$. Quel est le rayon de convergence de la série $\sum a_n^\alpha x^n$?

2 Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$. Montrer que $\sum \frac{a_n}{n!}x^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$.

3 Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. Comparer R avec les rayons de convergence des séries entières :

$$\sum a_n e^{\sqrt{n}} z^n \ ; \quad \sum a_n z^{2n} \ ; \quad \sum a_n z^{n^2}$$

2. Étude de la somme de séries entières

Exercice 560

Pour les séries entières suivantes, donner le rayon de convergence et exprimer leur somme en termes de fonctions usuelles :

1 $\sum \frac{n+2}{n+1}x^n$.

2 $\sum \frac{n^3}{n!}x^n$.

3 $\sum(-1)^{n+1}nx^{2n+1}$.

Exercice 561

Calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{3n}}{(3n)!}$ lorsque z est complexe.

Exercice 562

Pour $n \geqslant 1$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et on s'intéresse à la série entière $\sum_{n\geqslant 1} H_n x^n$. On note R son rayon de convergence.

1 Montrer que $R = 1$.

2 On pose, pour $x \in]-1,1[$, $F(x) = \sum_{n\geqslant 1} H_n x^n$.

a Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$(1-x)F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

b En déduire la valeur de $F(x)$ sur $]-1,1[$.

3 On pose, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \ln(n) x^n$$

Montrer que $G(x) \sim_{x\to 1^-} F(x)$.

Exercice 563

On pose $a_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad a_{n+1} = \frac{2n+3}{n+2} a_n$.

1 Donner le rayon de convergence R de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On note f sa somme.

2 Trouver une équation différentielle linéaire dont f est solution sur $]-R,R[$, puis déterminer f.

Exercice 564

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \int_0^{\pi/2} \sin(t)^n \mathrm{d}t$.

Exercice 565

$a_n = \int_0^{\pi/4} \tan(t)^n \mathrm{d}t$.
On étudie la série entière $\sum a_n z^n$.

1 Donner le rayon de convergence R de cette série entière.

2 Y a-t-il convergence en 1 ? en -1 ?

3 Calculer $f(x)$ lorsque x appartient à l'intervalle ouvert de convergence.

Exercice 566

Soit (a_n) la suite définie par $a_1 = 1$ et $a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$. Donner le domaine de définition et effectuer le calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ pour les valeurs de x qui rendent la série entière convergente.

Exercice 567

1 Déterminer le domaine de convergence de la série entière $\sum z^{n^2}$.
2 Donner un équivalent de la somme en $1-$.

Exercice 568

On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{2}{n+2} u_n,$$

la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$, et on note R son rayon de convergence, S sa somme.
1 Déterminer R.
2 Former une équation différentielle linéaire du premier ordre satisfaite par S, et en déduire l'expression de S à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 569

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 x^n \ln(1-x) \mathrm{d}x$.
1 Déterminer le rayon de convergence R de $\sum u_n x^n$.
2 Comportement en R ?

3. Développement en série entière

Exercice 570

Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions suivantes. On précisera le rayon de convergence de la série entière obtenue.
1 $x \mapsto \ln(1+2x^2)$.
2 $x \mapsto \frac{1}{x-a}$ (où $a \in \mathbb{C}^*$).
3 $x \mapsto \ln(a+x)$ (où $a > 0$).
4 $x \mapsto \frac{e^x}{1-x}$.
5 $x \mapsto \ln(1+x-2x^2)$.
6 $x \mapsto \ln(1+x+2x^2)$.
7 $x \mapsto (4+x^2)^{-3/2}$.
8 $x \mapsto \frac{x^2+x-3}{(x-2)^2(2x-1)}$.

Exercice 571

Soit f une fonction complexe, continue sur disque unité fermé D' et nulle sur le cercle unité. On suppose que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Montrer que $f = 0$.

Exercice 572

On considère une suite réelle bornée $(a_n)_{n\geqslant 1}$. Pour $x \in]-1,1[$, on pose $f(x) = \sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n.$$

Montrer que pour tout $x > 1$:

$$\frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} g(t) \mathrm{d}t.$$

Exercice 573

1 Développer $f \ : t \mapsto \arctan(1+t)$ en série entière au voisinage de 0.

2 Développer en série entière au voisinage de 0 la fonction $F \ : t \mapsto \int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t^4+t^2+1}$.

Exercice 574

1 Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$ est développable en série entière en 0, et calculer le rayon de convergence et les coefficients de cette série entière.

2 Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1+x+x^2}$ est développable en série entière en 0, et déterminer le rayon de convergence.

Exercice 575

(Mines-Ponts PSI 10) On note, pour $x \in \mathbb{R}$, et sous réserve d'existence :

$$f(x) = \exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}\right).$$

1 Quel est l'ensemble de définition D de f ?

2 Montrer que f est continue sur D.

3 Montrer que f est développable en série entière en 0 et déterminer le rayon de ce DSE en 0.

Exercice 576

Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$.
Montrer que l'application $f\ : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ donnée par :

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(a^n z)$$

est définie sur $\mathbb{C}$, développable en série entière en 0, et déterminer le rayon et les coefficients de ce DSE en 0.

CHAPITRE 54

TD 14 : séries entières (corrigés)

Aller aux énoncés 53

1. Rayon de convergence d'une série entière, domaine de convergence

Corrigé 558 (Détermination de rayon de convergence)

1 $R=+\infty$ par la règle de d'Alembert, par $0 \leqslant \frac{n!}{(2n)!} \leqslant \frac{1}{n!}$, par un retour à la définition éventuellement avec Stirling, etc.

$R=1$ par $\mathcal{B}_a=[0,1[$, par la règle de d'Alembert, par l'encadrement $1 \leqslant \ln(n) \leqslant n$ au voisinage de $+\infty$, etc.

$R=\sqrt{2}$ par $\mathcal{B}_a=[0,\sqrt{2}[$, par d'Alembert pour les séries numériques, ou car elle a le rayon de convergence de $\sum \frac{x^{2n}}{2^n+1}$, puis de $\sum \left(\frac{x^2}{2}\right)^2$ par le lemme pour la dérivation des séries entières et l'égalité du rayon de convergence de séries entières de termes équivalents. On pouvait aussi appliquer la règle de d'Alembert pour les séries entières à $\sum \frac{\sqrt{n}x^n}{2^n+1}$, puis substituer x^2 à x.

2 $\sum \frac{(1+i)^n z^{3n}}{n.2^n}$ a même rayon que $\sum \frac{(1+i)^n z^{3n}}{2^n}$, puis que $\sum \frac{\sqrt{2}^n z^{3n}}{2^n}$ car $\sum a_n z^n$ a même rayon que $\sum |a_n| z^n$ (évident par définition du rayon de convergence). On trouve donc $R=2^{1/6}$.

$\left|\frac{(-1)^n}{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}\right| \leqslant \frac{1}{n!}$, donc $R=+\infty$.

3 Par croissances comparées, $\mathcal{B}_a=[0,1[$ (si $a>1$) ou $\mathcal{B}_a=[0,1]$ (si $a\in]0,1]$) donc $R=1$.

$\mathcal{B}_a=[0,1[$, donc $R=1$.

$\exp(1/n)-1 \sim \frac{1}{n}$, donc $R=1$.

$\ln(1+\sin(1/n)) \sim \frac{1}{n}$, donc $R=1$.

4 $1 \leqslant d_n \leqslant n$ (ou $1 \leqslant d_n \leqslant 2n$ si on prend les diviseurs relatifs), donc $R=1$.

5 C'est au moins 1 car $\mathcal{B}_a$ contient $[0,1[$. Si c'était plus, alors il existerait $r>1$ pour lequel $\cos(n\theta)=\mathrm{O}(nr^{-n})$, donc $\lim\cos(n\theta)=0$; ce qui est absurde (considérer $\sin(2n\theta)$.)

Corrigé 559 (Rayon de convergence d'une série entière modifiée)

2. Étude de la somme de séries entières

Corrigé 560 (Calculs de sommes élémentaires)

Corrigé 561 (Série exponentielle tronquée)

$\frac{1}{3}\left(e^z+e^{jz}+e^{j^2z}\right)$.

Corrigé 562 (Série entière et série harmonique)

1 On a $1 \leqslant H_n \leqslant n$ d'où $R=1$.

Remarque : on pouvait bien sûr utiliser $H_n \sim \ln(n)$.

2

a Immédiat par calcul et changement d'indice.
Remarque : comment a-t-on eu cette idée ? On a reconnu en $\sum H_n x^n$ le produit de Cauchy de $\sum x^n$ et $\sum \frac{x^n}{n}$.
b On a donc $F(x) = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$ pour tout $x \in]-1,1[$.

Corrigé 563 (Somme d'une série entière par la méthode de l'équation différentielle)

1 (a_n) n'est pas bornée donc $R \leqslant 1$.
Par le critère de d'Alembert, $R = 1/2$.
2 Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(n+2)a_{n+1}x^n = (2n+3)a_n x^n \text{ soit } (n+1)a_{n+1}x^n + a_{n+1}x^n = 2na_n x^n + 3x^n$$

d'où, en sommnant sur $\mathbb{N}$, et en prenant $x \in]-1/2, 1/2[\setminus\{0\}$:

$$f'(x) + \frac{f(x) - a_0}{x} = 2xf'(x) + 3f(x)$$

puis

$$x(1-2x)f'(x) + (1-3x)f(x) = 1$$

formule également valable en 0.
f est donc l'unique solution sur $]-1/2, 1/2[$ du problème de Cauchy

$$(\mathcal{C}) \quad x(1-2x)y' + (1-3x)y = 1 \quad \text{ et } \quad y(0) = 1$$

Attention cependant : cette équation différentielle n'étant pas du type vu en cours, nous ne sommes pas assurés de l'unicité d'une solution à ce problème.
Sur un intervalle ne comprenant pas 0, l'équation différentielle

$$y' + \frac{1-3x}{x(1-2x)}y = 0$$

a pour solution générale réelle $x \mapsto K\frac{1}{x\sqrt{|1-2x|}}$ où K décrit $\mathbb{R}$ car

$$\int \frac{1-3x}{x(1-2x)}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{1-2x} = \ln(|x|) + \frac{1}{2}\ln(|1-2x|) + C$$

En utilisant la méthode de variation de la constante, $x \mapsto \frac{K(x)}{x\sqrt{1-2x}}$ est solution de $y' + \frac{1-3x}{x(1-2x)}y = \frac{1}{x(1-2x)}$ sur $I \in \{]-1/2, 0[,]0, 1/2[\}$ si et seulement si

$$\frac{K'(x)}{x\sqrt{1-2x}} = \frac{1}{x(1-2x)}, i.e. K'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$$

soit $K(x) = -\sqrt{1-2x} + C$. La solution générale de $y' + \frac{1-3x}{x(1-2x)}y = 1$ sur I est donc

$$x \mapsto \frac{C}{x\sqrt{1-2x}} - \frac{1}{x}$$

La seule solution sur $]-1/2, 1/2[$ au problème de Cauchy considéré est

$$x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{1-2x}} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x\sqrt{1-2x}}\left(1 - \sqrt{1-2x}\right) = \frac{2}{\sqrt{1-2x}(1+\sqrt{1-2x})}$$

d'où l'expression de f sur $]-1/2, 1/2[$.
Remarque : l'équation différentielle trouvée pour f est peu pratique à cause notamment du problème de raccord en 0. En fait, on aurait pu observer que $x \mapsto xf(x)$ est solution d'une équation différentielle d'ordre 1 sans problème de raccord en 0, mais cela demandait de l'astuce.

Corrigé 564 (Rayon de convergence et somme d'une série entière)

Par le théorème de convergence dominée, (a_n) converge vers 0, donc le rayon vaut au moins 1.

Remarque : inutile d'ailleurs d'appliquer le théorème de convergence dominée, il suffit de préciser que (a_n) est bornée.

Cependant, pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$0 \leqslant \cos(t)\sin(t)^n \leqslant \sin(t)^n$$

d'où, en intégrant sur $[0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\frac{1}{n+1} \leqslant a_n$$

Comme $\sum \frac{x^n}{n+1}$ est de rayon 1, $\sum a_n x^n$ est de rayon au plus 1 : il est donc égal à 1.

Remarque : si on connaît les intégrales de Wallis, on sait que $a_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, et donc le rayon de convergence vaut 1, mais cet argument culturel est un peu trop évolué.

Pour calculer la somme S en $x \in]-1,1[$, on utilise par exemple le théorème d'intégration terme à terme sur le segment d'extrémités 0 et x (ou la convergence normale sur ce même segment), obtenant

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t)x)^n \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (\sin(t)x)^n \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - x\sin(t)} \mathrm{d}t \quad (\star)$$

Pour calculer cette intégrale, on effectue le changement de variable $u = \tan(t/2)$ (de classe $\mathcal{C}^1$), obtenant

$$\begin{aligned}
S(x) &= \int_0^1 \frac{1}{1 - x\frac{2u}{1+u^2}} \frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2} \\
&= 2\int_0^1 \frac{1}{1 - 2ux + u^2} \mathrm{d}u \\
&= 2\left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \arctan\left(\frac{u-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \left(\arctan\left(\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\right) + \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \left(\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) + \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right)
\end{aligned}$$

Remarque : en utilisant le fait que $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^n \mathrm{d}t$ (ou en effectuant le changement de variable $s = \frac{\pi}{2} - t$ dans $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\sin(t)}$), on serait tombé sur une expression plus agréable de $S(x)$ ($\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$).

On peut faire l'étude aux bornes : en 1, il y a divergence par $\frac{1}{n+1} \leqslant a_n$ et en -1, il y a convergence par le critère spécial des séries alternées.

On peut utiliser un argument de convergence dominée sur la suite des sommes partielles de $\sum t \mapsto (-\sin(t))^n$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ pour vérifier que la formule $\star$ reste valable pour $x = -1$:

$$S(-1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin(t)} \mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{1}{(1+u)^2} \mathrm{d}u = 2\left[-\frac{1}{1+u}\right]_0^1 = 1$$

Remarque : un argument de majoration du reste par le CSSA montre qu'en fait S est continue en -1. La formule pour $S(x)$ lorsque $x \in]-1,1[$ doit donc tendre vers 1 lorsque x tend vers -1. Pour s'entraîner au calcul asymptotique, on peut le vérifier à la main : pour un tel x, en posant $x=-1+h$ *i.e.* $h=x+1$, il vient $\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \sim_{x\to -1} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{h}}$, et

$$\begin{aligned}
\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)+\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) &= \arctan\left(\sqrt{\frac{2-h}{h}}\right)+\arctan\left(\frac{-1+h}{\sqrt{h(2-h)}}\right)\\
&= \frac{\pi}{2}-\arctan\left(\sqrt{\frac{h}{2-h}}\right)-\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{\sqrt{h(2-h)}}{-1+h}\right)\\
&= -\sqrt{\frac{h}{2-h}}+\mathrm{o}(h^{1/2})-\frac{\sqrt{h(2-h)}}{-1+h}+\mathrm{o}(h^{1/2})\\
&= -\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{2}}+\sqrt{2h}+\mathrm{o}(h^{1/2})\\
&\sim \frac{\sqrt{2h}}{2}
\end{aligned}$$

d'où $S(x)\sim_{x\to -1^+} 1$.

Remarque : en posant $\theta=\arccos(x)$ pour $\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$ et $\alpha=\arcsin(x)$ pour $\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$, on peut donner d'autres expressions de $S(x)$:

$$S(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(\arccos(x)+2\arcsin(x))=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(\frac{\pi}{2}+\arcsin(x))=\frac{\arccos(-x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

Remarque : cette expression permet d'ailleurs de calculer (par produit de Cauchy) les intégrales de Wallis, et elles donnent même immédiatement les termes d'indices pairs en observant que

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot (2n-1)}{2^n\,n!}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{4^n\,(n!)^2}x^{2n}$$

d'où, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(t)^{2n}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\,\frac{(2n)!}{4^n\,(n!)^2}$$

Corrigé 565 (Série entière dont le terme général est défini par une intégrale)

1 La suite (a_n) est bornée car positive et majorée par $\pi/4$ (et tend même vers 0 par le théorème de convergence dominée), donc $R\geqslant 1$.

Reste à avoir une estimation de a_n pour bien avoir $R=1$.

On peut observer que $a_n+a_{n+2}=\frac{1}{n+1}$ (car $\tan'=1+\tan^2$), puis, par décroissance de (a_n) :

$$\forall\, n\geqslant 2,\quad \frac{1}{2(n+1)}\leqslant a_n\leqslant\frac{1}{2(n-1)}$$

On en déduit que $R=1$ (seule l'inégalité de gauche était utile puisqu'on savait que $R\geqslant 1$).

Remarque : l'encadrement ci-dessus donne notamment $a_n\sim\frac{1}{2n}$.

Remarque : dans la même veine, on aurait pu écrire que, puisque $(1+\tan^2(t))/2\leqslant 1$ pour tout $t\in[0,\pi/4]$:

$$\frac{1+\tan^2(t)}{2}\tan(t)^n\leqslant\tan(t)^n$$

puis intégrer sur $[0,\pi/4]$.

Remarque : on aurait aussi pu faire le changement de variable $u=\tan(t)$:

$$a_n=\int_0^1\frac{u^n}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

afin d'obtenir un encadrement de façon peut-être plus standard. D'ailleurs, ce changement de variable suivi de $v = u^n$ nous aurait permis de retrouver (par convergence dominée) l'équivalent de a_n donné ci-dessus.

2 Il y a divergence en 1 car $\frac{1}{n} = \mathrm{O}(a_n)$ et $a_n > 0$.

Il y a convergence en -1 par application du CSSA ((a_n) est bien décroissante (positive) et tend vers 0).

3 Pour $x \in]-1,1[$, on a, par exemple par convergence normale de $\sum t \mapsto \tan(t)^n x^n$ sur $[0,\pi/4]$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi/4}(\tan(t)x)^n\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{\pi/4}\sum_{n=0}^{\infty}(\tan(t)x)^n\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{\pi/4}\frac{1}{1-x\tan(t)}\mathrm{d}t\\
&= \int_0^{1}\frac{1}{(1+u^2)(1-xu)}\mathrm{d}u\\
&= \int_0^{1}\frac{x^2}{1+x^2}\frac{1}{1-xu}+\frac{x}{1+x^2}\frac{u}{1+u^2}+\frac{1}{1+x^2}\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u\\
&= \left[-\frac{x}{1+x^2}\ln|1-xu|+\frac{x}{2(1+x^2)}\ln(1+u^2)+\frac{\arctan(u)}{1+x^2}\right]_{u=0}^{1}\\
&= -\frac{x}{1+x^2}\ln(1-x)+\frac{\ln(2)x}{2(1+x^2)}+\frac{\pi}{4(1+x^2)}
\end{aligned}$$

Remarque : on peut prouver que cette formule reste valable pour $x = -1$ (par un argument de convergence dominée pour la suite des sommes partielles, ou par convergence uniforme, mais pas par intégration terme à terme).

Corrigé 566 (Série entière dont le coefficient général suit une relation de récurrence)

$a_n \geqslant 1/n(n+1)$ donc $R \leqslant 1$. $a_n \leqslant 1$ donc $R \geqslant 1$. En ± 1, convergence par $a_n \leqslant 1/n$ puis $a_n \leqslant 2/(n(n+1))$.

$f'(x) = 1 + f(x) - \ln(1-x)$ donc $f(x) = e^x - 1 - e^x\int_0^x e^{-t}\ln(1-t)\mathrm{d}t.$, y compris en 1 et -1.

Corrigé 567 (Domaine de convergence d'une série entière)

1 En revenant à la définition, on constate que le rayon de convergence vaut 1. Le domaine de convergence est le disque unité ouvert.

2 En faisant une comparaison série-intégrale, on trouve $F(x) \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$.

Corrigé 568 (Somme d'une série entière par la méthode de l'équation différentielle)

Corrigé 569 (Étude au bord d'une série entière)

3. Développement en série entière

Corrigé 570 (Développements élémentaires en série entière)

Corrigé 571 (Fonction développable en série entière nulle sur le cercle unité)

$\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-ip\theta}\mathrm{d}\theta = 2\pi a_p r^p$. On fait tendre r vers 1, obtenant $a_p = 0$.

Corrigé 572 (Relation intégrale entre deux fonctions développables en séries entières)

Corrigé 573 (Développement en série entière d'une fonction par intégration)

1 On dérive, on décompose en éléments simples, et on trouve $f(t) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{-n/2}}{n} \sin(3n\pi/4)t^n$.

2 On dérive, observe que $\frac{1}{1+x^2+x^4} = \frac{1-x^2}{1-x^6}$, d'où $F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^{6n+1}}{6n+1} - \frac{x^{6n+3}}{6n+3}\right)$.
On calcule

$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln\frac{a^2+a+1}{a^2-a+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{2a+1}{\sqrt{3}} + \arctan\frac{2a-1}{\sqrt{3}}\right),$$

d'où $F(0) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

Corrigé 574 (Fonction définie par radicaux développable en série entière)

Corrigé 575 (Développement en série entière d'une exponentielle d'une série entière)

Corrigé 576 (Développement en série entière et calcul des coefficients)

CHAPITRE 55

Oraux 14 : séries entières (énoncés)

Aller aux corrigés 56

Exercice 577

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \ln(1 - 2x\cos(\theta) + x^2)$. Développer f en série entière en 0 et donner le rayon de convergence de cette série.

Exercice 578

(Mines-Ponts PSI 10) Soit $F : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_0^x \sin(t^2)\mathrm{d}t$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(t^2)\mathrm{d}t$.

1 Montrer que la série de terme général a_n est convergente.

2 Montrer que F admet une limite en $+\infty$.

3 Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n x^n$.

Exercice 579

1 Montrer que la série de terme général $1/(1 + k^2)$ converge.

2 Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{1+k^2}$. Montrer que le rayon de la série entière de terme général $a_n x^n$ est $\geqslant 1$.

Exercice 580

Soit $(d_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $d_0 = 1, d_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$.

1 Montrer que, pour $n \geqslant 2$, $n!/3 \leqslant d_n \leqslant n!$. En déduire le rayon de convergence de $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$.

2 Montrer que S est solution de l'équation différentielle $(1 - x)y' - xy = 0$.

3 Exprimer S à l'aide de fonctions usuelles. Exprimer d_n en fonction de n.

Exercice 581

Soient $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(ax)$.

1 Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

2 Exprimer $f^{(n)}$ en fonction de f. En déduire $f^{(n)}(0)$.

3 Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $\frac{1}{n!}a^{(n-1)n/2}x^n$.

4 On suppose $a \in]0, 1[$.

a Soit $g : x \mapsto \sum_{n\geqslant 0} \frac{a^{(n-1)n/2}}{n!}x^n$. Montrer que g est définie, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(ax)$.

b Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(ax)$. Montrer que f est nulle.

c Déterminer l'ensemble des $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(ax)$.

Exercice 582

Pour n dans $\mathbb{N}$, soit $I_n = \int_1^e (\ln x)^n \mathrm{d}x$.

1 Montrer que (I_n) converge vers une limite à préciser.

2 Nature des séries $\sum(-1)^n I_n, \sum I_n^\alpha$ où $\alpha > 0$.

3 Rayon de convergence de $\sum I_n x^n$.

Exercice 583

1 Donner l'ensemble de définition de $\Phi\ : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$.

2 Donner un équivalent de $\Phi(x)$ lorsque x tend vers 1.

Exercice 584

Pour x dans $]-1, 1[$, soit $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1 Trouver une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont f est solution. En déduire le développement en série entière de f sur $]-1, 1[$.

2 Calculer $1 + \frac{2.4}{2^2.1.3} + \frac{2.4.6}{2^3.1.3.5} + \dots$.

Exercice 585

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1 Exprimer u_n en fonction de n.

2 Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière de terme général $u_n z^n$.

Exercice 586

Soit $f : x \mapsto \ln(x^2 - 5x + 6)$.

1 Déterminer le domaine de définition de f.

2 Développer f en série entière au voisinage de 0 en précisant l'intervalle maximal de convergence.

Exercice 587

Rayon de convergence et somme de $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{(-1)^n n} x^n$.

Exercice 588

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{n+2}$.

1 Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant a_n \leqslant n^2$.

2 Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$. Déterminer le domaine de définition de f. Donner une équation différentielle vérifiée par f et en déduire une expression simple de f.

Exercice 589

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t$.

1 Déterminer la limite de (a_n).

2 Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n x^n$.

Exercice 590

Soit $S : x \mapsto \sum_{n\geqslant 1} x^n \sin(1/\sqrt{n})$.

1 Déterminer le rayon de convergence de S.

2 Déterminer le comportement de S au bord de l'intervalle de convergence.

3 Montrer que la somme est continue sur $[-1, 1[$.

4 Montrer que $x \mapsto \sum_{n\geqslant 2} \left(\sin(1/\sqrt{n}) - \sin(1/\sqrt{n-1})\right) x^n$ converge normalement sur $[-1, 1]$. En déduire la limite de $(1-x)\,S(x)$ quand $x \to 1^-$.

Exercice 591

1 Montrer que $\tan^{(n)}$ est un polynôme à coefficients entiers en tan.

2 Montrer que la série entière de terme général $\frac{\tan^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

Exercice 592

1 (CCP) Soit $f : x \mapsto \int_0^{\pi} \cos(x\cos\theta)\mathrm{d}\theta$.

a Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b Si $x \in \mathbb{R}$, calculer $x\,f''(x) + f'(x) + x\,f(x)$.

c La fonction f est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?

2 (CCP) Soit $f : x \mapsto e^{x^2/2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t$.

a Déterminer le domaine de définition D de f. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

b Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et expliciter son développement.

3 (ENSAM) Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\mathrm{ch}(t)}\mathrm{d}t$. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Développer F en série entière au voisinage de 0 et préciser le rayon de convergence.

CHAPITRE 56

Oraux 14 : séries entières (corrigés)

Aller aux énoncés 55

Corrigé 577 (Un développement en série entière (CCP PSI 08))

Corrigé 578 (Détermination délicate de rayon de convergence)

Corrigé 579 (Minoration d'un rayon de convergence (Mines-Ponts PSI 10))

Corrigé 580 (Combinatoire et séries entières (CCP MP 13))

Corrigé 581 (Équation fonctionnelle et série entière (CCP MP 13))

Corrigé 582 (Détermination d'un rayon de convergence (Mines d'Alès))

Corrigé 583 (Équivalent en 1 de la somme d'une série entière (TPE MP 13))

Corrigé 584 (DSE et application au calcul de la somme d'une série (TPE 13))

Corrigé 585 (Série entière et suite de Fibonacci (CCP MP 13))

Corrigé 586 (Un DSE avec du logarithme (CCP MP 13))

Corrigé 587 (Somme d'une série entière)

Corrigé 588 (Somme d'une série entière (ENSEA))

Corrigé 589 (Encore un rayon de convergence (CCP MP 13))

Corrigé 590 (Étude au bord d'une série entière (CCP MP 13))

Corrigé 591 (Minoration du rayon de convergence d'une série entière (Télécom Sud Paris))

Corrigé 592 (Développements en série entière)

CHAPITRE 57

TD 15 : variables aléatoires discrètes (énoncés)

Aller aux corrigés 58

1. Probabilité sur un univers fini

Exercice 593

1 Au Tarot, à cinq joueurs, quelle est la probabilité d'obtenir au moins un bout dans une main ? *On rappelle qu'un jeu de Tarot est constitué de* 78 *cartes dont* 3 *cartes appelées « bout », et qu'à* 5 *joueurs, les mains sont de* 15 *cartes.*

2 On considère un jeu de 52 cartes dont on pioche 5 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir un full (3 cartes d'une même hauteur et 2 autres d'une autre et même hauteur) ?

Exercice 594

1 On lance deux dés équilibrés. Montrer que la probabilité qu'au moins l'un de ces deux dés donne un nombre pair est égale à $\frac{3}{4}$.

2 On lance un dé équilibré 2 fois de suite.

a Quelle est la probabilité que la somme des numéros obtenus soit égale à 8 ?

b Il y a 11 sommes possibles. Pourquoi la réponse à la question précédente n'est-elle pas $\frac{1}{11}$?

3 On lance 3 dés distincts. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 faces identiques ? Et 3 faces distinctes ?

4 On lance un dé équilibré jusqu'à obtenir un 6 pour la troisième fois. Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :

a A_n : « le troisième 6 apparait au n-ième lancer » (où $n \geqslant 3$)

b B_n : « au n-ième lancer le troisième 6 n'est toujours pas apparu » (où $n \geqslant 3$)

c C : « le troisième 6 n'apparait jamais. »

5 On lance un dé équilibré jusqu'à obtenir un 6 pour la quatrième fois. Déterminer la probabilité de l'événement A_n : « le quatrième 6 apparait au n-ième lancer » (où $n \geqslant 4$).

Exercice 595

1 Un tiroir contient 15 paires de chaussettes toutes différentes. On prend 6 chaussettes. Quelle est la probabilité d'obtenir :

a 3 paires complètes ?

b au moins une paire ?

c exactement une paire ?

2 Un tiroir contient n chaussettes dont 3 rouges. Quelle doit être la valeur de n pour qu'en prenant au hasard 2 chaussettes, la probabilité qu'on obtienne 2 chaussettes rouges soit égale à $\frac{1}{2}$?

Exercice 596

1 On range les 20 tomes d'une encyclopédie sur une étagère, complètement au hasard. Quelle est la probabilité que les tomes 1 et 2 se trouvent côte à côte ?

2 Une loterie compte 1000 billets dont 2 gagnants. Combien faut-il acheter de billets, pour avoir au moins une chance sur deux de gagner quelque chose ?

3

a On choisit au hasard une partie à 3 éléments de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ avec $n \geqslant 3$. Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :
– A : « la partie contient 1 et 2 »
– B : « la partie ne contient ni 1 ni 2 »
– C : « la partie contient 1 ou 2 »

b Reprendre les trois questions précédentes, lorsque l'on choisit au hasard une partie quelconque de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ avec $n \geqslant 3$.

Exercice 597

Un randonneur emporte 6 rations, prises au hasard dans un stock de 18 rations, 6 avec un menu A, 6 avec un menu B, et 6 avec un menu C. Quelle est la probabilité que les 6 rations emportées soient composées d'exactement deux menus A, deux menus B, et deux menus C ? Quelle est la probabilité que les six rations soient toutes d'un même menu ?

Exercice 598

On effectue des lancers répétés d'une paire de dés et on observe pour chaque lancer la somme des points indiqués par les deux dés. Calculer la probabilité de l'événement E : *dans la suite des résultats observés, la première obtention d'un 9 a lieu avant la première obtention d'un 7.*

Exercice 599

1 Si l'on jette 4 fois un dé à six faces, est-il plus probable qu'on obtienne au moins un 6 ou qu'on n'en obtienne pas ?

2 Maintenant on jette 24 fois deux dés à six faces, est-il plus probable qu'on obtienne au moins un double 6 ou qu'on n'en obtienne pas ?

Exercice 600

Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité p, c'est l'information correcte qui est transmise à chaque étape d'une personne à une autre. Avec une probabilité $1-p$, c'est l'information contraire qui est transmise. On note p_n la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte.

1 Donner une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.

2 En déduire la valeur de p_n en fonction de p et de n.

3 En déduire la valeur de $\lim_n p_n$. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 601

Les n invités d'un repas de Noël déposent un cadeau au pied du sapin. L'hôte prend l'initiative de distribuer au hasard un cadeau à chacun de ses invités. Quelle est la probabilité que personne ne reçoive le cadeau qu'il a amené ?

2. Conditionnement et indépendance

Exercice 602

Une maladie affecte une personne sur mille. On dispose d'un test sanguin qui détecte la présence de cette maladie chez 99% des malades. Mais le test donne un résultat faussement positif chez $0,2\%$ des personnes saines testées.
Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement malade lorsque son test est positif ?

Exercice 603

On lance deux dés équilibrés et on considère les évènements A « le premier dé donne un nombre pair », B « le second dé donne un nombre pair » et C « les deux dés donnent des nombres de même parité ». Les événements A et B sont-ils indépendants ? Même question avec A et C, avec A et $B \cap C$ et avec $B \cup C$.

Exercice 604

1 Une urne contient 20 boules blanches et 30 boules noires. On tire successivement et sans remise 3 boules. Quelle est la probabilité que la première soit noire, la deuxième blanche, et la troisième noire ?

2 Deux urnes U_1 et U_2 contiennent au départ chacune 12 boules blanches et 13 boules noires. On tire une boule de U_1, on note sa couleur, et on la met dans U_2. On tire alors dans U_2. Quelle est la probabilité de tirer deux fois une boule noire ?

3 L'urne 1 contient 10 boules blanches et 2 boules noires. L'urne 2 contient 2 boules blanches et 2 boules noires. On choisit, au hasard, l'une de ces 2 urnes indiscernables et on pioche 2 boules dans cette urne.

a Quelle est la probabilité que les 2 boules tirées soient blanches ?

b L'expérience est réalisée, et les 2 boules tirées sont blanches. Quelle est la probabilité que l'urne choisie soit la 1 ?

Exercice 605

On lance indéfiniment une pièce équilibrée. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note P_k l'événement « obtenir Pile au k-ème lancer » et $A_k = P_k \cap \overline{P_{k+1}}$. La famille $(A_k)_k$ est-elle une famille d'événements mutuellement indépendants ? d'événements indépendants deux à deux ?

Exercice 606

Dans un jeu télévisé, un candidat doit choisir une question de repêchage, en tirant un papier au hasard parmi trois papiers.
Il a une question facile (3 chances sur 4 de donner la réponse exacte), une question moyenne (2 chances sur 5), et une question difficile (1 chance sur 5).
Sachant que le candidat a donné la réponse exacte à la question qu'il a tirée, quelle est la probabilité conditionnelle que la question tirée ait été la question facile ?

Exercice 607

Soit $n > 1$ un entier fixé. On choisit de manière équiprobable un entier x dans $\{1, \dots, n\}$. Pour tout entier $m \leqslant n$, on note A_m l'événement "m divise x". On note également B l'événement "x est premier avec n". Enfin, on note $p_1, \dots, p_r$ les diviseurs premiers de n.

1 Exprimer B en fonction des A_{p_k}.

2 Pour tout $m \leqslant n$ qui divise n, calculer la probabilité de A_m.

3 Montrer que les événements $A_{p_1}, \dots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.

4 En déduire la probabilité de B.

5 Application : on note $\phi(n)$ le nombre d'éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Démontrer que

$$\phi(n) = n \prod_{k=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Exercice 608

On considère une sauterelle se déplaçant par sauts successifs sur les trois sommets A, B et C d'un triangle. Au début de l'expérience, on la place sur le sommet A et ensuite elle se déplace de la manière suivante :
– si elle se trouve en A, elle saute sur l'un des trois sommets de façon équiprobable,
– si elle se trouve en B, alors elle fait un saut sur place,
– si elle se trouve en C, alors elle fait un saut sur place une fois sur trois, et elle saute en B sept fois plus souvent qu'en A.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n (respectivement B_n et C_n) l'évènement : « au n-ème saut la sauterelle choisit le sommet A (resp. B et C) » et on note a_n, b_n et c_n leur probabilité respective.

1 Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n. Exprimer de même b_{n+1} et c_{n+1}.

2 Exprimer c_{n+2} en fonction de c_n et c_{n+1}.

3 En déduire une expression de c_n en fonction de n.

4 Étudier la convergence des suites $(a_n)_n, (b_n)_n$ et $(c_n)_n$.

Exercice 609

Trois prisonniers sont dans une cellule. Ils savent que deux vont être condamnés à mort et un gracié, mais ils ne savent pas qui. L'un d'entre eux va voir le gardien et lui demande : « Je sais bien que tu ne peux rien me dire, mais tu peux au moins me montrer un de mes compagnons qui sera exécuté ». Le gardien réfléchit, se dit que de toutes manières au moins l'un des deux autres prisonniers sera condamné, et s'exécute. Le prisonnier lui répond alors : « Merci, avant, j'avais une chance sur trois d'être gracié, et maintenant, j'ai une chance sur deux. » A-t-il raison de croire que sa probabilité d'être exécuté a varié ?

Exercice 610

On dispose de deux pièces d'apparence identique, la pièce A donnant Pile avec la probabilité $a \in]0,1[$, et la pièce B donnant Pile avec la probabilité $b \in]0,1[$.
Pour le premier lancer, on choisit une pièce au hasard, et pour les lancers suivants, on adopte la stratégie suivante : si on obtient Pile, on garde la pièce pour le lancer suivant, et si on obtient Face, on change de pièce pour le lancer suivant.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'évènement « le k-ème lancer se fait avec la pièce A » et E_k l'évènement « le k-ème lancer donne Pile ».

1 Déterminer une relation entre $P(E_k)$ et $P(A_k)$.

2 Déterminer une relation entre $P(A_{k+1})$ et $P(A_k)$.

3 En déduire $P(A_k)$ puis $P(E_k)$.

3. Loi d'une variable aléatoire

Exercice 611

Déterminer la loi de la variable aléatoire X, dans les situations suivantes.

1 On range au hasard 10 objets dans 3 tiroirs. X est le nombre d'objets dans le premier tiroir.

2 Un fermier a cinq poules, quatre lapins et trois moutons : X est le nombre de pattes de l'animal choisi (au hasard) pour le déjeuner.

3 Un dé cubique équilibré porte un nombre sur chacune de ses faces : -2 sur 3 faces, 1 sur 2 faces, et 4 sur une face. On lance le dé deux fois de suite. X est la somme des points obtenus.

4 Lors d'un vide-grenier, quinze ordinateurs sont mis en vente, dont six sont en panne. Une personne en achète trois au hasard. X est le nombre d'ordinateurs en état de marche achetés par cette personne.

5 Une cible circulaire est composée de 3 zones qui rapportent respectivement $1, 2$ ou 3 points. Elles sont touchées respectivement avec les probabilités $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{6}$. Un joueur tire deux fois dans la cible, et l'on suppose que ses deux tirs sont indépendants. X est la somme des points obtenus.

Exercice 612

Dans chacune des situations ci-dessous reconnaître la loi de X parmi les lois usuelles et préciser son ou ses paramètres.

1 On lance un dé équilibré. On note X le nombre obtenu.

2 On lance un dé équilibré 10 fois de suite. On note X le nombre de 6 obtenus.

3 On dispose d'une urne contenant 6 boules blanches et 7 boules noires. On en pioche successivement 3 sans remise. On note X le nombre de boules blanches obtenues.

4 On dispose d'une urne contenant 6 boules blanches et 7 boules noires. On effectue des tirages successifs avec remise jusqu'à ce qu'on obtienne une boule blanche. On note X le nombre de tirages nécessaire.

5 On dispose d'une urne contenant 6 boules blanches et 7 boules noires. On effectue 9 tirages successifs avec remise. On note X le nombre de boules blanches obtenues.

Exercice 613

Soit α et β deux réels et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_k = a\frac{\alpha^k+\beta^k}{k!}$.

1 Suivant les valeurs de α et β, discuter l'existence de a pour que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puisse définir la loi de probabilité d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$. Le cas échéant, déterminer a.

2 Peut-il arriver que X suive une loi de Poisson ?

Exercice 614

On lance une pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur pile vaut p. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers nécessaire pour obtenir r fois pile. Quelle est la loi de X ?

Exercice 615

On dispose de deux urnes U et V. L'urne U contient 3 boules noires et 2 boules blanches et l'urne V contient 4 boules noires et 1 boule blanche.

1 On choisit une urne au hasard et on extrait successivement 3 boules, avec remise à chaque fois de la boule tirée. On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées. Déterminer $P(X = 0)$.

2 On choisit une urne au hasard et on extrait successivement 3 boules, sans remise de la boule tirée. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées. Déterminer $P(Y = 3)$.

Exercice 616

A et B sont deux avions ayant respectivement 4 et 2 moteurs. Les moteurs sont supposés indépendants les uns des autres, et ils ont une probabilité p de tomber en panne. Chaque avion arrive à destination si moins de la moitié de ses moteurs tombe en panne. Quel avion choisissez-vous ? (on discutera en fonction de p).

4. Couples de variables aléatoires

Exercice 617

1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Déterminer la loi de $X - Y$.

2 Soit n et m deux entiers naturels non nuls, et $p \in]0, 1[$. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{B}(m, p)$.

a Déterminer la loi conjointe de X et Y.

b Déterminer la loi de $X + Y$.

3 La loi d'un couple de variables aléatoires (X, Y) est donnée par le tableau suivant que l'on complètera :

$X\backslash Y$	1	2	3
1	0	0,4	0
2	0,1	0,2	0,1
3	0	0	...

a Déterminer les lois marginales de (X, Y).

b Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

c Calculer $E(X)$ et $E(Y)$. Soit $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$.

d Écrire la table de la loi conjointe de U et V, puis en déduire les lois de U et de V.

e Déterminer directement la loi de V.

4 Soit, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $p_{i,j} = \lambda ij$.

a Déterminer λ pour que ceci définisse une loi conjointe.

Pour cette valeur de λ, soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles admettant cette loi conjointe.

b Déterminer les lois marginales de (X, Y).

c X et Y sont-elles indépendantes ?

d Donner la valeur de $\mathrm{Cov}(X, Y)$, et en déduire la valeur de $E(XY)$.

Exercice 618

Soit $p \in]0, 1[$. On considère deux variables aléatoires X et Y dont la loi conjointe est donnée par le tableau suivant que l'on complétera :

$X\backslash Y$	0	1
0	$\frac{2}{3} - p$	$p - \frac{1}{6}$
1	p	

1 Montrer que $\frac{1}{6} \leqslant p \leqslant \frac{1}{2}$.

2 Déterminer les lois marginales du couple, puis déterminer l'espérance et la variance de X et Y.

3 Pour quelle valeur de p les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 619

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telles que :

$$P\big((X = i) \cap (Y = j)\big) = \frac{a}{2^{i+j}},$$

pour tous i, j de $\mathbb{N}^*$.

1 Calculer a.

2 Déterminer les lois marginales de X et Y.

3 X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 620

1 On considère une urne contenant N jetons numérotés de 1 à N. On tire simultanément n jetons de l'urne et on note X le plus petit des numéros obtenus et Y le plus grand. Donner la loi marginale du couple.

2 On lance deux dés équilibrés, on note U_1 et U_2 les variables aléatoires correspondant aux résultats obtenus. On appelle $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$.

- **a** Donner loi et espérance de X.
- **b** Exprimer $X + Y$ en fonction de U_1 et U_2. En déduire $E(Y)$.
- **c** Exprimer XY en fonction de U_1 et U_2. En déduire $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

5. Espérance, variance, moments

Exercice 621

On vous propose de jouer, autant de fois que vous le voulez, à un jeu. Selon la situation, acceptez-vous de jouer ?

1 Vous lancez un dé : si vous obtenez 6, vous gagnez 6 euros, et perdez 1 euro sinon.

2 Vous lancez deux dés, et vous gagnez 5 euros si vous sortez 7, et perdez 1 euro sinon.

3 Vous lancez deux dés : si vous obtenez un double i, vous gagnez i euros. Sinon, vous perdez 1 euro.

Exercice 622

Un professeur a la réputation d'avoir un écart-type supérieur à sa moyenne. Cela est-il possible ? (le professeur ne donne pas de notes strictement négatives)

Exercice 623

On considère un dé cubique truqué, de telle sorte que la probabilité d'obtenir la face numérotée k est proportionnelle à k (on suppose que les faces sont numérotées de 1 à 6). Soit X la variable aléatoire associée au lancer de ce dé.

1 Déterminer la loi de X, calculer son espérance.

2 On pose $Y = 1/X$. Déterminer la loi de Y, et son espérance.

Exercice 624

Soit σ_X l'écart type d'une variable aléatoire X, et l'écart moyen $\sigma = E(|X - E(X)|)$. Comparer σ et σ_X et traiter le cas d'égalité.

Exercice 625

1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Soit X une v.a. à valeurs dans $\{0, 1, ..., n\}$ telle que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad P(X = k) = \binom{n}{k} \frac{\beta}{k+1}.$$

Déterminer β, $E(X)$, et $V(X)$.

2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0, 1[$ et $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. On définit la v.a. Y de la façon suivante :
– Si $X = k$ avec $k > 0$, alors $Y = k$.
– Si $X = 0$, alors Y prend une valeur quelconque avec équiprobabilité dans $\{1, ..., n\}$.
Déterminer la loi et l'espérance de Y.

3 On tire n boules dans une urne de N boules, numérotées de 1 à N. X est le plus grand des numéros obtenus. Déterminer la loi et l'espérance de X.

Exercice 626

Les vaches laitières sont atteintes par une maladie M avec le probabilité $p = 0.15$. Pour dépister la maladie M dans une étable de n vaches, on fait procéder à une analyse de lait. Deux méthodes sont possibles :
– **Première méthode** On fait une analyse sur un échantillon de lait de chaque vache.
– **Seconde méthode** On effectue d'abord une analyse sur un échantillon de lait provenant du mélange des n vaches. Si le résultat est positif, on fait une nouvelle analyse, cette fois pour chaque vache.

On voudrait connaître la méthode la plus économique (*i.e.* celle qui nécessite en moyenne le moins d'analyses). Pour cela, on note X_n la variable aléatoire du nombre d'analyses réalisées dans la deuxième méthode. On pose $Y_n = \frac{X_n}{n}$.

1 Déterminer la loi et l'espérance de Y_n.

2 En déduire la réponse à la question posée (dépendant de n).

Exercice 627

On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est 2/3, et donc celle d'obtenir face est 1/3. Les lancers sont supposés indépendants, et on note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux piles consécutifs. Pour $n \geqslant 1$, on note p_n la probabilité $P(X = n)$.

1 Expliciter les événements $(X = 2)$, $(X = 3)$, $(X = 4)$, et déterminer la valeur de p_2, p_3, p_4.

2 Montrer que l'on a $p_n = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1}$, $n \geqslant 4$.

3 En déduire l'expression de p_n pour tout n.

4 Rappeler, pour $q \in]-1, 1[$, l'expression de $\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n$, et calculer alors $E(X)$.

Exercice 628

Soit $p \in]0, 1[$. On dispose d'une pièce amenant "pile" avec la probabilité p. On lance cette pièce jusqu'à obtenir pour la deuxième fois "pile". Soit X le nombre de "face" obtenus au cours de cette expérience.

1 Déterminer la loi de X.

2 Montrer que X admet une espérance, et la calculer.

3 On procède à l'expérience suivante : si X prend la valeur n, on place $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne, et on tire ensuite une boule de cette urne. On note alors Y le numéro obtenu. Déterminer la loi de Y. Calculer l'espérance de Y.

4 On pose $Z = X - Y$. Donner la loi de Z et vérifier que Z et Y sont indépendantes.

Exercice 629

Soit X une variable aléatoire discrète prenant la valeur x_i avec probabilité p_i, pour $i = 1, \ldots, n$. On définit l'*entropie* de X par :

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln(p_i).$$

1 Calculer $H(X)$ si X est constante.

2 Calculer $H(X)$ si X est équidistribuée.

3 Trouver la valeur maximale de $H(X)$ pour X parcourant l'ensemble des variables aléatoires discrètes prenant au plus n valeurs.

Exercice 630

Soit X une variable aléatoire réelle.

1 Soit $g\ : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, strictement croissante, et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer

$$P(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{E(g(|X|))}{g(a)}$$

2 On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Montrer, pour tous $\varepsilon, \lambda > 0$:

$$P(X - np > n\varepsilon) \leqslant E(\exp(\lambda(X - np - n\varepsilon)))$$

Exercice 631

On se propose de démontrer l'inégalité de Cantelli : si X est une v.a. ayant une espérance m et un écart type σ, on a :

$$\forall\, t > 0, \quad P(X - m \geqslant t) \leqslant \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + t^2}$$

1 Vérifier que l'on peut se ramener au cas $m = 0$ (ce que l'on fait désormais).

2 Montrer que pour tout $u \geqslant 0$:

$$P(X \geqslant t) \leqslant P((X+u)^2 \geqslant (t+u)^2) \leqslant \frac{\sigma^2 + u^2}{(t+u)^2}$$

3 Conclure en choisissant une valeur adéquate de u.

Exercice 632

1 Soit $N \in \mathbb{N}$ et X une variable aléatoire de support inclus dans $[\![0, N]\!]$.
Montrer que : $E(X) = \sum_{k=0}^{N} P(X > k)$.

2 On considère une urne de N boules numérotées de 1 à N. On effectue un tirage simultané de n boules, et on note X le plus grand numéro obtenu. Déterminer $E(X)$.

Exercice 633

1 Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n,p)$. Calculer l'espérance de $Y = \frac{1}{X+1}$.

2 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$, telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$P(X = k) = a\binom{n}{k}$$

Calculer espérance et variance de X.

6. V.a.i.i.d.

Exercice 634

Dans la suite du problème n désigne un entier supérieur ou égal à 2. On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.
On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathcal{U}$.
Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.

1 Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Donner la loi de X_i. Rappeler l'espérance et la variance de X_i.

2 Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

a Montrer que X_i et X_j ne sont pas indépendantes.

b Déterminer la loi de la variable aléatoire $X_i + X_j$.

Exercice 635

On considère une suite de n épreuves répétées indépendantes, chaque épreuve ayant k résultats possibles $r_1, \ldots, r_k$. On note p_i la probabilité de réalisation du résultat r_i lors d'une épreuve donnée.
Pour $i \in [\![1, k]\!]$, notons X_i le nombre de réalisations du résultat r_i au cours des n épreuves.

1 Expliquer pourquoi $\mathrm{V}(X_1 + \cdots + X_k) = 0$.

2 Quelle est la loi de X_i ? Que vaut sa variance ?

3 Pour $i \neq j$, donner la loi et la variance de $X_i + X_j$.

4 En déduire $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.

5 Contrôler ce résultat en développant $\mathrm{V}(X_1 + \cdots + X_k)$ et en utilisant la première question.

Exercice 636

Soit $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. Soit n un entier naturel.
On considère n joueurs qui visent une cible. Chaque joueur effectue deux tirs. À chaque tir, chaque joueur a la probabilité p d'atteindre la cible. Les tirs sont indépendants les uns des autres.
On définit la variable aléatoire X égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au premier tir et la variable aléatoire Z égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au moins une fois à l'issue des deux tirs.

1 Déterminer la loi de X. Rappeler son espérance et sa variance.

2 Montrer que Z suit une loi binomiale, et donner ses paramètres. Donner son espérance et sa variance.
On note $Y = Z - X$.

3 Que représente la variable aléatoire Y ? Déterminer sa loi.

4 Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 637

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.i.i.d. de Bernoulli de paramètre p. On pose $Y_n = X_nX_{n+1}$.

1 Déterminer la loi de Y_n.

2 Discuter, selon les valeurs de i et j, l'indépendance de Y_i et Y_j.

3 Pour tout $n \geqslant 2$, donner la matrice des variances-covariances du vecteur $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$.

4 En déduire la variance de $\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

5 Reprendre ces questions, en supposant que les (X_n) soient mutuellement indépendantes, et que X_n suive $\mathcal{B}(p^n)$ pour tout n.

CHAPITRE 58

TD 15 : variables aléatoires discrètes (corrigés)

Aller aux énoncés 57

1. Probabilité sur un univers fini

Corrigé 593 (Probabilités sur les cartes)

Corrigé 594 (Probabilités sur les dés)

Corrigé 595 (Probabilités sur les chaussettes)

Corrigé 596 (Probabilités diverses)

Corrigé 597 (Les délices de la randonnée)

Corrigé 598 (9 avant 7)

Corrigé 599 (Le paradoxe du chevalier de Méré)

Corrigé 600 (Propagation d'une rumeur)

Corrigé 601 (Dérangements à Noël)

2. Conditionnement et indépendance

Corrigé 602 (Test sanguin)

Corrigé 603 (Indépendances et dés)

Corrigé 604 (Indépendance et boules)

Corrigé 605 (Indépendance et lancers d'une pièce)

Corrigé 606 (Jeu télévisé)

Corrigé 607 (De l'arithmétique à l'aide de probas)

Corrigé 608 (Sauterelles à foison)

Corrigé 609 (Prisonniers)

Corrigé 610 (Lancers de pièces)

3. Loi d'une variable aléatoire

Corrigé 611 (Détermination de lois)

Corrigé 612 (Nul n'est censé ignorer la loi)

Corrigé 613 (Construction d'une loi)

Corrigé 614 (Loi de Pascal)

Corrigé 615 (Variables aléatoires et urnes)

Corrigé 616 (Quel avion choisir ?)

4. Couples de variables aléatoires

Corrigé 617 (Loi d'un couple)

Corrigé 618 (Indépendance dans un couple)

Corrigé 619 (Loi conjointe de v.a.d.)

Corrigé 620 (Minimum, maximum)

5. Espérance, variance, moments

Corrigé 621 (Voulez-vous jouer ?)

Corrigé 622 (Un professeur sévère)

Corrigé 623 (Dé truqué)

Corrigé 624 (Comparatif de deux indicateurs de dispersion)

Corrigé 625 (Calculs d'espérance et de variance)

Corrigé 626 (Vaches laitières)

Corrigé 627 (Première obtention de deux piles consécutifs)

Corrigé 628 (Deuxième obtention d'un pile)

Corrigé 629 (Entropie d'une v.a. finie)

Corrigé 630 (De jolies inégalités)

Corrigé 631 (Inégalité de Cantelli)

Corrigé 632 (Une formule pour $E(X)$ dans un cas particulier)

Corrigé 633 (Calculs d'espérance et variance)

6. V.a.i.i.d.

Corrigé 634 (Tirages dans une urne)

Corrigé 635 (Épreuves consécutives à plusieurs résultats possibles)

1 $X_1 + \cdots + X_k$ est la variable aléatoire constante n, d'où le résultat.

2 X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p_i, sa variance vaut $p_i(1 - p_i)$.

3 La loi de $X_i + X_j$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_i + p_j$, sa variance vaut $(p_i + p_j)(1 - p_i - p_j)$.

4 $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{2}\left(V(X_i + X_j) - V(X_i) - V(X_j)\right) = -p_i p_j$.

5 $\mathrm{V}(X_1+\cdots+X_k) = \sum_{i=1}^{k} p_i(1-p_i) - 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k} p_i p_j = \sum_{i=1}^{k} p_i - \left(\sum_{i=1}^{k} p_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k} p_i p_j\right) = 1 - 1 = 0$.

Corrigé 636 (Cible)

Corrigé 637 (Produit consécutif de Bernoulli)

CHAPITRE 59

Oraux 15 : variables aléatoires discrètes (énoncés)

Aller aux corrigés 60

Exercice 638

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Soit $Z = \min\{X, Y\}$. Montrer que Z suit une loi géométrique.

Exercice 639

Soit $(A_n)_n$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On note $pn = P(An)$ On note B l'événement

$$B \stackrel{def}{=} \bigcap_{n \geqslant 1} \bigcup_{k \geqslant n} A_k$$

c'est-à-dire

$$B = \{\omega \in \Omega, \mathrm{Card}(n \in \mathbb{N}, \omega \in A_n) = \infty\}$$

1 On suppose que la série $\sum P(A_n)$ converge. Montrer que $P(B) = 0$.
C'est le *lemme de Borel-Cantelli.*
2 On suppose que les événements A_n sont indépendants et que la série $\sum P(A_n)$ diverge.
a Montrer que l'événement $\overline{B}$ est égal à

$$\bigcup_{n \geqslant 1} \bigcap_{k \geqslant n} \overline{A_k}$$

b Exprimer $P(\cap_{k=n}^{m} \overline{A_k})$ en fonction des p_k.
c Montrer que la série $\sum \ln(1 - p_k)$ est divergente.
d En déduire que $P(B) = 1$.
Ainsi, si $\sum P(A_n)$ diverge (resp. converge), alors $P(B) = 1$ (resp. $P(B) = 0$) : c'est la *loi du zero-un de Borel* (également appelée *second lemme de Borel-Cantelli*).
3 Soit α un réel strictement positif et (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes telles que pour tout n, X_n suive la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n^\alpha}$.
a Montrer que $E(X_n) \to_n 0$.
b On suppose que $\alpha \in]0, 1[$. Montrer qu'avec une probabilité égale à 1, l'ensemble $\{n, X_n = 1\}$ est infini.
c On suppose que $\alpha > 1$. Montrer qu'avec une probabilité égale à 1, l'ensemble $\{n, X_n = 1\}$ est fini.

Exercice 640

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires de l'exercice.
Soit N une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1

a Montrer que, pour toute fonction g définie sur $\mathbb{N}$ telle que les espérances existent, on a :

$$\mathrm{E}(Ng(N)) = \lambda\, \mathrm{E}(g(N+1))$$

b Calculer $\mathrm{E}\left(\frac{1}{N+1}\right)$.

2 Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle qu'il existe un réel λ vérifiant, pour toute fonction g telle que les espérances existent :

$$\mathrm{E}(Tg(T)) = \lambda\, \mathrm{E}(g(T+1))$$

La variable aléatoire T suit-elle une loi de Poisson ?

3 Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On définit une variable aléatoire S par

$$S \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{N} X_k$$

(où N est la loi introduite dans l'énoncé).
Montrer que, pour toute fonction g telle que les espérances existent, on a :

$$\mathrm{E}(Sg(S)) = \lambda\, \mathrm{E}(X_0 g(S + X_0))$$

Exercice 641

Soit N et $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que les variables $X_1, X_2, \ldots$ suivent toutes une même loi de fonction génératrice G_X et on pose

$$S \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{N} X_k$$

1 Établir que $G_S(t) = G_N(G_X(t))$ pour tout $t \in]-1, 1[$

2 On suppose que les variables admettent une espérance. Établir l'identité de Wald :

$$\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}(N)\, \mathrm{E}(X_1)$$

Exercice 642

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $Y_1, \ldots, Y_n$ des variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant toutes la loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{n}$, avec $\lambda > 0$.

1 Déterminer la loi de la variable aléatoire $S_n \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} Y_i$.
2 Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par : $f(x) = 1 - (1 - x)e^x$. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, on a $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.
3 Pour tout entier $n > \lambda$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note U_i une variable aléatoire indépendante de Y_i et suivant la loi de Bernoulli de paramètre $f\left(\frac{\lambda}{n}\right)$.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, soit X_i la variable aléatoire définie par $X_i = 0$ si $Y_i = U_i = 0$, 1 sinon.
Déterminer la loi de X_i.
4 Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a : $P(X_i \neq Y_i) \leqslant \frac{\lambda^2}{n^2}$.
5 En déduire $\lim\limits_{n\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i = Y_i)\right)$.

Exercice 643

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et suivant toutes la loi géométrique de paramètre p, où $p \in]0,1[$.
On pose $q = 1-p$ et on note α un réel strictement positif et différent de 1.
On va chercher à calculer la probabilité de l'événement

$$A \stackrel{def}{=} \{\omega \in \Omega, \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha X_n(\omega)} \text{ converge}\}$$

1 Calculer la probabilité de A lorsque $\alpha > 1$.
On suppose désormais $\alpha \in]0,1[$. On pose $\beta = 1-\alpha$.

2

a Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$P\left(\bigcup_{n=k}^{\infty}(X_n > n^\beta)\right) \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} q^{n^\beta - 1}$$

b Étudier la convergence de la série de terme général $q^{n^\beta-1}$.

c En déduire

$$\lim_{k\to\infty} P\left(\bigcup_{n=k}^{\infty}(X_n > n^\beta)\right)$$

d En déduire que

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=k}^{\infty}(X_n > n^\beta)\right)\right) = 0$$

Dans la suite de l'exercice, on note

$$A_\beta \stackrel{def}{=} \{\omega \in \Omega, X_n(\omega) > n^\beta \text{ pour un nombre fini de valeurs de} n \text{ uniquement}\}$$

3

a Montrer que

$$A_\beta = \bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=k}^{\infty}(X_n \leqslant n^\beta)\right)$$

b Montrer que $P(A_\beta) = 1$.

4

a Montrer que pour tout $\omega \in A_\beta$, la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha X_n(\omega)}$ diverge.

b En déduire la probabilité de l'événement A.

Exercice 644

1 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.

a Dire pourquoi pour tout $(x, y) \in [-1, 1]^2$, la famille

$$(P(X = n \cap Y = m)x^n y^m)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$$

est sommable. On note $G_{(X,Y)}(x, y)$ sa somme.

b Montrer que $G_{(X,Y)}(x, y) = E(x^X y^Y)$.

On suppose désormais que, pour tout $(x, y) \in [-1, 1]^2$:

$$G_{(X,Y)}(x, y) = \frac{py}{\ln(1-p)} \frac{\ln(1-pxy)}{1-(1-p)y}$$

où $p \in]0, 1[$.

2

a Déterminer $G_X(x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

b Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$: $\ln(1 - px) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{n!} x^n$.

c En déduire la loi marginale de X.

3

a Montrer que les variables aléatoires X et $Y - X$ vérifient, pour tout $(x, y) \in [-1, 1]^2$:

$$G_{(X,Y-X)}(x, y) = G_X(x)G_{Y-X}(y)$$

b Déterminer la loi de $Y - X$.

CHAPITRE 60

Oraux 15 : variables aléatoires discrètes (corrigés)

Aller aux énoncés 59

Corrigé 638 (Minimum de deux v.a.i. suivant $\mathcal{G}(p)$)

Corrigé 639 (Lemme de Borel-Cantelli et loi du zero-un de Borel)

Corrigé 640 (Caractérisation des lois de Poisson par relations entre espérances)

1

a D'après la formule de transfert,

$$\mathrm{E}(Ng(N)) = \sum_{n=0}^{\infty} ng(n)P(N=n) = \sum_{n=1}^{\infty} ng(n)\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = \lambda\sum_{n=1}^{\infty} g(n)\frac{e^{-\lambda}\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda\,\mathrm{E}(g(N+1))$$

b On ne peut pas appliquer de qui précède puisque $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas définie sur $\mathbb{N}$. On fait un calcul direct :

$$\mathrm{E}(1/(N+1)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n+1}}{\lambda(n+1)!} = \frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda})$$

2 L'idée consiste à appliquer la formule supposé aux fonctions caractéristiques des singletons (pour lesquelles l'existence des espérances ne pose pas de problème). Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation $\mathrm{E}(T\chi_{\{n\}}(T)) = \lambda\,\mathrm{E}(\chi_{\{n\}}(T+1))$ donne

$$nP(T=n) = \lambda P(T=n-1)$$

donc on a, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $P(T=n) = (\lambda^n/n!)P(T=0)$ puis, en sommant, on trouve $e^{\lambda}P(T=0) = 1$, et T donc suit effectivement une loi de Poisson.

Corrigé 641 (Identité de Wald)

1 Soit $t \in]-1,1[$. Par définition, on a

$$G_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(S=n)t^n$$

tandis que $|G_X(t)| \leqslant G_X(1) = 1$, donc G_N est définie en $G_X(t)$, et :

$$G_N(G_X(t)) = \sum_{p=0}^{\infty} P(N=p)(G_X(t))^p$$

Pour faire le lien entre ces deux quantités, on écrit, par la formule des probabilités totales, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(S=n) = \sum_{p=0}^{\infty} P(S=n \cap N=p)$$

Or, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$:

$$\begin{aligned} P(S = n \cap N = p) &= P(\sum_{k=1}^{p} X_k = n \cap N = p) \\ &= P(\sum_{k=1}^{p} X_k = n) P(N = p) \quad \text{(par indépendance)} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$G_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} P(N = p) P(\sum_{k=1}^{p} X_k = n) t^n$$

puis, par le théorème de Fubini dans le cas d'une suite double de réels positifs

$$G_S(t) = \sum_{p=0}^{\infty} P(N = p) \sum_{n=0}^{\infty} P(\sum_{k=1}^{p} X_k = n) t^n \sum_{p=0}^{\infty} P(N = p) G_{\sum_{k=1}^{p} X_k}(t)$$

Or on sait que $G_{\sum_{k=1}^{p} X_k} = \prod_{k=1}^{p} G_{X_k} = G_X^p$ par indépendance (mutuelle) de $X_1, \ldots, X_p$, et le résultat s'ensuit immédiatement.

2 Observons déjà que l'égalité de la question précédente est aussi valable en 1.

Puisque les X_i admettent une espérance, G_X est dérivable en 1 et $G'_X(1) = \mathrm{E}(X)$. Puisque N admet également une espérance, G_N est dérivable en 1 et $G'_N(1) = \mathrm{E}(N)$. Comme $G_X(1) = 1$, on en déduit par composition que $G_N \circ G_X$ est dérivable en 1, et que $(G_N \circ G_X)'(1) = G'_X(1)(G'_N(G_X(1))) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(N)$, d'où le résultat (que G_S soit définie au delà de 1 ou pas, G_S est dérivable en 1).

Corrigé 642 (Probabilité d'égalités de variables aléatoires)

Corrigé 643 (Probabilité de convergence d'une série)

Corrigé 644 (Fonction génératrice d'un couple de variables aléatoires)

CHAPITRE 61

TD 16 : espaces préhilbertiens (énoncés)

Aller aux corrigés 62

1. Structure préhilbertienne, distance à un sous-espace

Exercice 645

Soit E un espace euclidien de dimension n et soit $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs de E tels que

$$\forall\, x \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i >^2 .$$

1 On suppose les vecteurs de $\mathcal{F}$ unitaires. Montrer que $\mathcal{F}$ est une base orthonormée de E.

2 Montrer, sans supposer les vecteurs de $\mathcal{F}$ unitaires, que $\mathcal{F}$ est une base orthonormée de E.

Exercice 646

Pour tous éléments A, B de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $(A \mid B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$.

1 Vérifier que c'est un produit scalaire. Pourquoi l'appelle-t-on produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Remarque : la même formule définit plus généralement un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, dit *canonique*.

2 Déterminer l'orthogonal de l'espace des matrices scalaires, des matrices symétriques.

3 Soit $P \in O(n)$. Montrer que les applications

$$\phi_P : A \longmapsto AP \text{ et } \psi_P : A \longmapsto P^{-1}AP$$

sont orthogonales.

4 Réciproquement, si ϕ_P ou $\psi_P \in O(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, est-ce que $P \in O(n)$? (réponses différentes pour ϕ et ψ).

Exercice 647

1 *(X PC 09)*On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire : Pour $P = \sum_i a_i X^i$ et $Q = \sum_i b_i X^i$, $(P|Q) = \sum_i a_i b_i$.
Soit $H = \{P \in E, P(1) = 0\}$.

a Trouver une base orthonormale de H.

b Calculer $d(X, H)$.

2 Soit $\alpha = \inf\{\int_{-1}^{1} (ax^2 + bx + c - |x|)^2 \, dx : a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

a Déterminer un espace vectoriel euclidien $(E, (\cdot, \cdot))$, un sous-espace vectoriel F de E et $v \in E$ tel que $\alpha = d(v, F)^2$.

b Déterminer $p \in F$ tel que $\alpha = \mathrm{d}(v, p)^2$ et calculer α.

Réponse : $\alpha = \frac{1}{96}$.

3 *(Mines MP 09)* Déterminer $\min \left\{ \int_{-1}^{1} (t^4 - at^2 - bt - c)^2 \mathrm{d}t, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

Réponse : $\frac{128}{11025}$.

4 *(Mines MP 09)* Soit $f \ : t \in]0, 1] \mapsto t \ln(t)$, prolongée par continuité en 0. Calculer $\min\limits_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (f(t) - at - b)^2 \mathrm{d}t$ et déterminer les couples (a, b) qui réalisent ce minimum.

Réponse : le minimum cherché vaut $\frac{1}{108}$.

Exercice 648

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mu = \max |a_{i,j}|$. Montrer :

$$|\det(A)| \leqslant n^{n/2} \mu^n.$$

Exercice 649

Soit E un espace euclidien. Quels sont les endomorphismes f de E tels que si $< x, y >= 0$, alors $< f(x), f(y) >= 0$.

Exercice 650

Donner un exemple de sous-espace n'admettant pas de supplémentaire orthogonal.

Exercice 651

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E, de trace nulle. Montrer l'existence d'une base orthonormée dans laquelle u a une matrice de diagonale nulle.

Exercice 652

(Mines-Ponts PSI 10) Soit E euclidien, de base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$, $v_1, \ldots, v_n$ tels que $\|v_1\| + \cdots + \|v_n\| < 1$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $w_i = e_i + v_i$. montrer que $(w_1, \ldots, w_n)$ est une base de E.

Exercice 653

Soit E euclidien de dimension n, $u_1, \dots, u_{n+1} \in E$ tels que pour tous $i, j \in [\![1, n+1]\!]$ distincts, $< u_i, u_j >< 0$.

1 Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ des scalaires non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i u_i = 0$.
Montrer que les λ_i non nuls sont tous de même signe, puis que les λ_i sont tous non nuls.

2 Montrer que $(u_1, \dots, u_n)$ engendre E.

Exercice 654

Soit $\lambda < 1$ et A une partie de la sphère unité de E euclidien telle que pour tout couple (a, a') d'éléments distincts de A, on ait : $< a, a' >\leqslant \lambda$. Montrer que A est finie.

2. Isométries, matrices orthogonales

Exercice 655

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} \right| \leqslant n \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} |a_{i,j}| \leqslant n^{3/2},$$

et discuter des cas d'égalité.

Exercice 656

L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \cap \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est-il fini ? Le cas échéant, donner son cardinal.

Exercice 657

Donner la matrice canoniquement associée à la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathcal{D}$ donnée par le système :

$$\begin{cases} x - y + z &= 0 \\ x + y + 2z &= 0 \end{cases}$$

Exercice 658

Donner l'expression analytique (dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique orienté) de

1 La rotation d'axe orienté par $(1, 0, -1)$, d'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$.

2 La rotation d'axe orienté par $(1, 1, 1)$, d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$.

3 La réflexion par rapport au plan d'équation $2x + 2y + z = 0$.

Exercice 659

Reconnaître les transformations géométriques linéaires dont les matrices respectives dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont :

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 3 & -6 & -2 \\ -6 & -2 & -3 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & 4 & -4 \\ 4 & -1 & -8 \\ -4 & -8 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 660

(CCP MP 13) Soit $f \in O(E)$. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

1 $f \circ f = -\mathrm{Id}_E$.

2 $\forall x \in E, (f(x)|x) = 0$.

3 $\forall x, y \in E, (f(x)|y) = -(x|f(y))$.

Exercice 661

1 Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Montrer que M est une matrice de rotation si et seulement si a, b, c sont les racines d'un polynôme de la forme $P = X^3 - X^2 + \lambda$ avec $\lambda \in \left[0, \frac{4}{27}\right]$.

2 Soit G l'ensemble des éléments de SO(3) dont les éléments sont de la forme $\begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$. G est-il un sous-groupe de $SO(3)$? Est-il fini ?

Exercice 662

Quelles sont les $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $M(\mathbb{R}_+^n) \subset \mathbb{R}_+^n$.

Exercice 663

Soit n impair, $\Phi \; : t \in \mathbb{R} \to \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dérivable. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi'(t) \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 664

Quelles sont les matrices (carrées réelles) égales à leur comatrice ?

3. Endomorphismes et matrices symétriques

Exercice 665

(CCP MP 13) Déterminer les $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^t MM = I_n$.

Exercice 666

Quels sont les éléments A de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tels que $\operatorname{tr}(A)^2 = n \operatorname{tr}(A^2)$.

Exercice 667

(CCP MP 13) Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ non tous nuls et $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

1 Montrer que A est diagonalisable.

2 Quel est le rang de A ? Qu'en déduit-on sur son spectre ?

3 Calculer A^2 et en déduire le polynôme caractéristique de A et son spectre.

Exercice 668

(CCP MP 13) Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, (a, b) une famille libre de vecteurs unitaires de E et $f : x \in E \mapsto \langle a, x\rangle a + \langle b, x\rangle b$.

1 Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E.

2 Déterminer ses éléments propres.

Exercice 669

(CCP MP 13) Soient $n \geqslant 2$, $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}^+)$ non identiquement nulle et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad a_{i,j} = \int_0^1 f(t)\, t^{i+j-2} \mathrm{d}t.$$

1 Montrer : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^t XAX \geqslant 0$.

2 Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^t XAX = 0$. Montrer : $X = 0$.

3 Montrer que les valeurs propres de A sont strictement positives.

Exercice 670

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout (i,j) pour lequel $i \neq j$, $a_{i,j} \geqslant 0$.

Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on note $\tilde{X} = \begin{pmatrix} |x_1| \\ \vdots \\ |x_n| \end{pmatrix}$.

1 Montrer : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXAX \leqslant {}^t\tilde{X}A\tilde{X}$.

2 Notons λ_0 la plus grande valeur propre de A. Établir

$$\forall X \in \ker(A - \lambda_0 I_n), \quad \tilde{X} \in \ker(A - \lambda_0 I_n).$$

Exercice 671

Soit E un espace euclidien.
Soit p et q deux projecteurs orthogonaux de E. Montrer que p et q commutent si et seulement si $p \circ q$ est un projecteur.

CHAPITRE 62

TD 16 : espaces préhilbertiens (corrigés)

Aller aux énoncés 61

1. Structure préhilbertienne, distance à un sous-espace

Corrigé 645 (Base orthonormée)

Corrigé 646 (Produit scalaire canonique matriciel)

Corrigé 647 (Calculs de distances)

Corrigé 648 (Majoration du déterminant)

Corrigé 649 (Endomorphismes préservant l'orthogonalité)

Corrigé 650 (Sous-espace sans supplémentaire orthogonal)

Corrigé 651 (Endomorphisme de trace nulle dans un espace euclidien)

Il s'agit de montrer l'existence d'une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E, telle que $(u(e_i)|e_i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, l'initialisation étant évidente.

Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une base orthonormée de E, et soit M la matrice de u dans cette base : si tous les coefficients diagonaux sont nuls, le résultat souhaité est établi. Sinon, il existe des indices i et j tels que $[M]_{i,i}$ et $[M]_{j,j}$ soient de signes contraires.

En considérant $\lambda \in [0, 1] \mapsto (u(\lambda f_j + (1-\lambda) f_i)|\lambda f_j + (1-\lambda) f_i)$, et en lui appliquant le TVI, on constate qu'il existe un vecteur g_1 non nul de E tel que $u(g_1) = 0$. On prend alors pour e_1 le normalisé de g_1.

On complète e_1 en une base orthonormée $(e_1, h_2, \dots, h_n)$ de E. Si on ôte la première ligne et la première colonne de la matrice de u dans cette base, elle définit un endomorphisme v de $\mathrm{Vect}(h_2, \dots, h_n)$ de trace nulle : on peut lui apliquer l'hypothèse de récurrence, obtenant une base orthonormée $(e_2, \dots, e_n)$ dans laquelle la matrice de v est de diagonale nulle, et on vérifie que la matrice de u dans $(e_1, \dots, e_n)$ est elle aussi de diagonale nulle.

Corrigé 652 (Perturbation d'une base orthonormée préservant la liberté)

Corrigé 653 (Condition suffisante pour qu'une famille soit génératrice)

Corrigé 654 (Vecteurs de la sphère unité et produit scalaire contraint *(X MP 09)*)

2. Isométries, matrices orthogonales

Corrigé 655 (Inégalité entre coefficients pour une matrice orthogonale)

Corrigé 656 (Matrices orthogonales à coefficients entiers)

Corrigé 657 (Matrice d'une symétrie orthogonale)

Corrigé 658 (Expressions analytiques d'isométries de l'espace)

1 Première méthode : par changement de base.

Trouvons une base orthonormée dans laquelle la matrice de r (la rotation en question) est réduite : on pose $u = 1/\sqrt{2}(1,0,-1)$, que l'on veut compléter en une BOND (e_1, e_2, u) de $\mathbb{R}^3$. On prend $e_1 = (0,1,0)$, et donc $e_2 = u \wedge e_1$ afin que la base soit directe ($\det(e_1,e_2,u) = \det(u,e_1,e_2) = \|u \wedge e_1\|^2$ où det désigne le déterminant dans la base canonique $\mathcal{C}$ et car un 3-cycle est de signature paire).

On a donc $e_2 = 1/\sqrt{2}(1,0,1)$.

Dans cette base $\mathcal{B}$, la matrice de u est $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Par changement de base, et puisque les base $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$ sont orthonormées :

$$M_{\mathcal{C}}(r) = P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}} M_{\mathcal{B}}(r) P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} =^t \begin{pmatrix} pmatrix0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Ainsi, l'expression analytique de r est donnée par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, r(x,y,z) =$$

Deuxième méthode : Soit $v \in \mathbb{R}^3$. Si v est colinéaire à u, alors $r(v) = v$. Si v est unitaire orthogonal à u, alors $(v, u \wedge v, u)$ est orthonormée directe, donc

$$r(v) = \cos(2\pi/3)v + \sin(2\pi/3)u \wedge v$$

Cette formule reste valable si v est orthogonal à u (non nécessairement unitaire).

Maintenant, soit $v \in \mathbb{R}^3$: en écrivant $v = (v|u)u + (v - (v|u)u)$, on obtient, par linéarité de r :

$$r(v) = (v|u)u + \cos(2\pi/3)(v-(v|u)u) + \sin(2\pi/3)u \wedge (v-(v|u)u) = (1-\cos(2\pi/3))(v|u)u + \cos(2\pi/3)v + \sin($$

Corrigé 659 (Transformations de l'espace)

Corrigé 660 (Équivalences de propriétés d'un automorphisme orthogonal)

Corrigé 661 (Matrice circulaire de rotation)

Corrigé 662 (Matrices orthogonales préservant $\mathbb{R}_+^n$ (ENS MP 10))

Corrigé 663 (Chemin dérivable dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$)

Corrigé 664 (Matrices égales à leur comatrices)

3. Endomorphismes et matrices symétriques

Corrigé 665 (Équation matricielle avec la transposée)

Corrigé 666 (Équation d'inconnue matricielle)

Corrigé 667 (Détermination du spectre d'un endomorphisme symétrique)

Corrigé 668 (Réduction d'un endomorphisme symétrique)

Corrigé 669 (Spectre d'une matrice symétrique)

Corrigé 670 (Matrice symétrique à coefficients positifs)

Corrigé 671 (Quand la composée de deux projecteurs orthogonaux est un projecteur)

CHAPITRE 63

Oraux 16 : espaces préhilbertiens (énoncés)

Aller aux corrigés 64

Exercice 672

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que N est nilpotente et commute avec sa transposée. Montrer que N est nulle.

Exercice 673

(Mines Alès) Montrer que $P \mapsto (1 - X^2)P'' - 2XP'$ définit un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)\, Q(t)\mathrm{d}t$. Déterminer ses valeurs propres.

Exercice 674

(CCP MP 13) Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Montrer que $(f, g) \mapsto \int_0^1 x\, f(x)\, g(x)\mathrm{d}x$ définit un produit scalaire sur E. Déterminer le projeté orthogonal de $x \mapsto 1$ sur $\mathrm{Vect}\,(x \mapsto x, x \mapsto x^2)$.

Exercice 675

(CCP MP 13) On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique et de la norme associée. Soient u un vecteur unitaire et $D = \mathrm{Vect}(u)$.
Si $a \in \mathbb{R}$, soit $f_a : x \mapsto x - a\,\langle x, u\rangle\, u$.

1 Montrer que f_a est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2 Montrer qu'il existe un unique réel non nul a_0 tel que : $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $\|f_{a_0}(x)\| = \|x\|$.

3 Montrer que $\ker(f_{a_0} + \mathrm{Id}\,)$ et $\ker(f_{a_0} - \mathrm{Id}\,)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

4 Déterminer les éléments propres de f_a lorsque $a \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 676

(CCP MP 13) Soient A et B deux vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^n$ linéairement indépendants, $M = B^tA + A^tB$.

1 Montrer que M est diagonalisable.

2 Déterminer le noyau de M, puis les valeurs propres de M.

Exercice 677

(CCP MP 13) On munit $\mathbb{R}^4$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $u = (1,1,0,-1)$ et $v = (0,1,-1,1)$. Donner la matrice dans la base canonique de la réflexion envoyant u sur v.

Exercice 678

(CCP MP 13) On munit $\mathbb{R}^4$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $u = (1,1,1,0)$, $v = (1,0,0,-1)$ et $H = \text{Vect}(u,v)$.

1 Déterminer une base orthonormale de H.

2 Donner la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur H.

Exercice 679

(CCP MP 13) On munit $\mathbb{R}^4$ de sa structure euclidienne canonique. Donner la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur le plan d'équations : $x+2y+z+2t=0$, $x-y+z-t=0$.

Exercice 680

(CCP MP 13) Pour $n \geqslant 3$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit (E) : $X + {}^tX = \text{tr}(X)A$.

1 Résoudre (E) dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quand A n'est pas symétrique.

2 Lorsque A est symétrique, résoudre (E) dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour $\text{tr}(A) = 2$ et pour $\text{tr}(A) \neq 2$.

Exercice 681

(CCP MP 13) Soit $A \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $A \neq I_2$ et $A^2 = {}^t A$.

1 Trouver un polynôme annulateur de A.

2 Déterminer le spectre de A puis son déterminant.

3 Montrer que A est orthogonale puis donner les valeurs possibles de A.

Exercice 682

(ENSEA) Déterminer les $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $A^3 - A^2 + A - I_n = 0$.

Exercice 683

(CCP PSI 08) Soit $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $I_n + M$ soit inversible, et $A = (I_n - M)(I_n + M)^{-1}$. Montrer que A est antisymétrique.

Exercice 684

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
1 En utilisant l'algorithme de Gram-Schmidt, montrer que A s'écrit OT où O est dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et où T est triangulaire supérieure à termes diagonaux > 0.
2 En déduire $\det A^2 \leqslant \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2\right)$.

Exercice 685

Soit p un projecteur orthogonal d'un espace euclidien E.
1 Montrer que $\|p(x)\|^2 =< p(x), x >$ pour tout $x \in E$.
2 Montrer que, pour toute base orthonormée (e_i) de E :

$$\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2 = \mathrm{rg}(p).$$

Exercice 686

(CCP MP 13) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\Phi(A) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{c|c} A & -A \\ \hline A & A \end{array}\right)$.
1 Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\Phi(A)$ appartient à $\mathcal{O}_{2n}(\mathbb{R})$.
2 On suppose que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Caractériser A. Les matrices A et $\Phi(A)$ sont-elles diagonalisables ?

Exercice 687

(Télécom Sud Paris) Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres positives et $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer : $\mathrm{tr}(AU) \leqslant \mathrm{tr}(A)$.

Exercice 688

(CCP MP 13) Soit $E = \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$. On définit un produit scalaire sur E en posant : $\forall (f,g) \in E^2$, $\langle f, g\rangle = \int_0^1 (f(t)\,g(t) + f'(t)\,g'(t))\,\mathrm{d}t$; on note $\| \; \|$ la norme euclidienne associée. On pose : $\mathcal{V} = \{f \in E,\ f'' = f\}$, $\mathcal{W} = \{f \in E,\ f(0) = f(1) = 0\}$ et
$H = \{f \in E,\ f(0) = \operatorname{ch} 1 \quad \text{et} \quad f(1) = 1\}$.

1 Montrer que $(\operatorname{ch}, \operatorname{sh})$ est une base de $\mathcal{V}$.

2 Si $f \in \mathcal{V}$ et $g \in E$, montrer : $\langle f, g\rangle = f'(1)\,g(1) - f'(0)\,g(0)$. Calculer $\langle \operatorname{sh}, \operatorname{ch}\rangle$, $\|\operatorname{sh}\|^2$ et $\|\operatorname{ch}\|^2$.

3 Si $f \in \mathcal{V}$ et $g \in \mathcal{W}$, montrer que $\langle f, g\rangle = 0$.

4 Soit $f \in H$. Calculer $\langle f, \operatorname{sh}\rangle$ et $\langle f, \operatorname{ch}\rangle$. En déduire les coordonnées dans la base $(\operatorname{ch}, \operatorname{sh})$ de la projection orthogonale $\pi_{\mathcal{V}}(f)$ de f sur $\mathcal{V}$.

5 Déterminer $\inf \left\{ \int_0^1 (f(t)^2 + f'(t)^2)\,\mathrm{d}t,\ f \in H \right\}$.

6 Montrer que $\mathcal{W}$ est l'orthogonal de $\mathcal{V}$.

Exercice 689

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. Simplifier

$$(1 - \operatorname{tr}(A))^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 3} (a_{i,j} - a_{j,i})^2$$

Exercice 690

Soit l^2 l'espace vectoriel des suites réelles de carré sommable, muni de la norme $u \mapsto \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2}$. Soit F un fermé non vide de l^2 vérifiant la propriété : $\forall (x,y) \in F^2$, $\frac{x+y}{2} \in F$. On note d l'infimum des normes des éléments de F. Montrer qu'il existe un unique élément de F de norme d.

Exercice 691

Soit $\Phi \; : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ qui à $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ associe sa plus grande valeur propre. Montrer que Φ est convexe.

Exercice 692

(X MP 10) Soit E un espace euclidien, p et q dans $\mathcal{L}(E)$ deux projecteurs orthogonaux. Montrer que les valeurs propres de $q \circ p$ sont réelles et appartiennent à $[0,1]$.

CHAPITRE 64

Oraux 16 : espaces préhilbertiens (corrigés)

Aller aux énoncés 63

Corrigé 672 (Matrice réelle commutant avec sa transposée (ENSAM PSI 08))

Corrigé 673 (Réduction d'un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_n[X]$)

Corrigé 674 (Projeté orthogonal sur un plan)

Corrigé 675 (Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique)

Corrigé 676 (Réduction d'un endomorphisme symétrique obtenu à partir de colonnes)

Corrigé 677 (Réflexion envoyant un vecteur sur un autre)

Corrigé 678 (Matrice d'une projection orthogonale)

Corrigé 679 (Encore une matrice d'une projection orthogonale)

Corrigé 680 (Résolution d'une équation matricielle avec trace et transposition)

Corrigé 681 (Matrice de taille 2 dont le carré est la transposée)

Corrigé 682 (Matrices symétriques admettant un certain polynôme annulateur)

Corrigé 683 (Matrice antisymétrique construite à partir d'une matrice orthogonale)

Corrigé 684 (Inégalité de Hadamard (Navale MP 13))

Corrigé 685 (Une expression du rang d'un projecteur orthogonal (ENSAM PSI 08))

Corrigé 686 (Matrice orthogonale définie par blocs à partir d'une autre)

Corrigé 687 (Trace du produit d'éléments respectifs de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$)

Corrigé 688 (Deux sous-espaces orthogonaux dans un espace de fonctions)

Corrigé 689 (Simplification d'une expression liée à un élément de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ (Mines-Ponts PSI 08))

Corrigé 690 (Étude des parties mid-convexes dans l^2 (X MP 10))

Corrigé 691 ($A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mapsto \max(\mathrm{Sp}(A))$ est convexe (ENS MP 10))

Corrigé 692 (Étude du spectre de la composée de deux projecteurs orthogonaux)

CHAPITRE 65

TD 17 : équations différentielles (énoncés)

Aller aux corrigés 66
Dans tous les exercices, sauf mention contraire, on demande de trouver des solutions réelles.

1. Révisions de MPSI

Exercice 693

Résoudre :
1 $y' - \frac{x}{1+x^2} y = \frac{1}{1+x^2} + \frac{3}{\sqrt{1+x^2}}$.
2 $y' + y\ \mathrm{cotan}(x) = \sin x$.
3 $y' + y = xe^{3x}\cos(x) + (x-1)e^{-x}$.
4 $y' - 2y = (x^2+1)e^{4x} + (x^3 - x^2 + x + 1)e^{2x}$.
5 $y' + y = \cos x + \sin x$
6 $y' - 2xy = \operatorname{sh} x - 2x \operatorname{ch} x$
7 $y' + y \sin x = \sin 2x$.
8 $y' - \frac{x}{x^2-1} y = 2x$ sur $]1, +\infty[$.

Exercice 694

Résoudre
1 $y'' - 2y' + y = \cos(mx)e^x$, où $m \in \mathbb{R}$.
2 $y'' - 2y' + y = x^3 e^x + 2x\cos(x) + x^3 + 3$.
3 $y'' + y = x\cos(x)^3$.

Exercice 695

Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer la solution f de l'équation :
$$y'' - 2y' + (1+m^2)y = (1+4m^2)\cos(mx)$$
qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

2. EDL à coefficients constants

Exercice 696

Résoudre l'équation $y''' = y$.

Exercice 697

(CCP) Résoudre le système différentiel : $(x' = 3x + y,\ y' = 2x - y,\ z' = -4x - 8y + 2z)$.

Exercice 698

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{C}^*$, $b, c \in \mathbb{C}$, $f : I \to \mathbb{C}$ une application continue, $y_1, y_2, y_3 : I \to \mathbb{C}$ trois solutions de $ay'' + by' + cy = f$ sur I.

On note $\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & 1 \\ y_2 & y_2' & 1 \\ y_3 & y_3' & 1 \end{vmatrix}$ et $D = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & y_1'' \\ y_2 & y_2' & y_2'' \\ y_3 & y_3' & y_3'' \end{vmatrix}$.

Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout $x \in I$:

$$\Delta(x) = Ae^{-\frac{b}{a}x} \quad \text{et} \quad D(x) = \frac{A}{a} f(x) e^{-\frac{b}{a}x}.$$

Exercice 699

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients non diagonaux positifs.
Soit $X : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X' = AX$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i(0) \geqslant 0$.
Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x_i(t) \geqslant 0$.

Exercice 700

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = I_n$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = f'(0) f(t).$$

Montrer :

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, \quad f(s + t) = f(s) f(t).$$

3. EDL scalaires résolues d'ordre 2

Exercice 701

1 Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, monotone, ayant une limite finie en $+\infty$. Montrer que les solutions de $y'' + y = f$ sont bornées.
2 Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, 2π-périodique. Existe-t-il $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, 2π-périodique, telle que $y'' + y = f$?
3 Soit h deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $h'' + h \geqslant 0$. Montrer que pour tout réel x, $h(x) + h(x + \pi) \geqslant 0$.
4 (Centrale MP 08) Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = \sin(t)$, puis l'équation différentielle $y'' + y = |\sin(t)|$.

Exercice 702

1 Soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue et bornée. Montrer que l'équation différentielle $y'' - \omega^2 y = f$, d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable, admet une solution et une seule qui soit bornée sur $\mathbb{R}$.

2 Soit $\omega, c \in \mathbb{R}_+^*$, $E = \mathcal{C}([0,c],\mathbb{R})$, muni de $\|\cdot\|_\infty$.

a Montrer que, pour tout $f \in E$, il existe $y \in E$, de classe $\mathcal{C}^2$, unique, telle que :

$$\begin{cases} y'' - \omega^2 y = f \\ \omega y(0) = y'(0) \\ \omega y(c) = -y'(c) \end{cases}$$

et exprimer y en fonction de f, à l'aide d'intégrales.

b On note $T : E \to E$, $f \mapsto y$ l'application construite ci-dessus. Montrer que $T \in \mathcal{L}C(E)$.

3 Soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$, $g_1, g_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continues telles que $g_1 \leqslant g_2$, $f_1, f_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que :

$$\begin{cases} f_1'' - \omega^2 f_1 = g_1 \\ f_2'' - \omega^2 f_2 = g_2 \\ f_1(0) = f_2(0) \\ f_1'(0) = f_2'(0) \end{cases}$$

Montrer $f_1 \leqslant f_2$.

Exercice 703

Résoudre $(t^2+1)y'' - 2y = t$.
Indication : on pourra chercher des solutions polynomiales.

Exercice 704

1 Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation

$$(\mathcal{E}) \quad y'' + \frac{1}{x^2} y = 0.$$

Indication : on pourra utiliser le changement de variable $t = \ln(x)$.

2 L'équation différentielle $(\mathcal{E})$ possède-t-elle des solutions non bornées ? Déterminer les solutions bornées de $(\mathcal{E})$.

Exercice 705

1 On considère l'équation différentielle $y'' + qy = 0$ d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, avec $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et à valeurs dans $\mathbb{R}_-^*$.
Montrer que si une solution sur $\mathbb{R}$ s'annule deux fois, alors c'est la fonction identiquement nulle.
2 On considère l'équation différentielle

$$y'' - py' - qy = 0$$

d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, avec $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que $p^2 \leqslant 4q$. Montrer que si y est une solution s'annulant deux fois, alors c'est la fonction nulle.

4. EDL scalaires non résolues

Exercice 706

Résoudre sur $\mathbb{R}$:
1 $xy' + y = x^3$.
2 $xy' - y = 0$.
3 $x^2y' + y = 0$.
4 $xy' - 2y = 0$.
5 $x(x^2 - 1)y' + 2y = x^2$.
6 $xy' - 2y = x^4$.
7 $(e^x - 1)y' + (e^x + 1)y = 3 + 2e^x$.

Exercice 707

1 Résoudre $t^2y'' + ty' - y = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2 Résoudre $(t+1)y'' - (t+2)y' + y = 0$.

5. Équations fonctionnelles ou problèmes se ramenant à des équations différentielles

Exercice 708

1 Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que

$$f'(x) + f(-x) = e^x,$$

pour tout réel x.
2 Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que

$$f''(x) + f(-x) = 0,$$

pour tout réel x.

Exercice 709

Déterminer les fonctions $f\ :\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que :

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y),$$

pour tous réels x et y.

Exercice 710

1 Déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\quad f(x)+\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t=1.$$

2 Résoudre $f(x)-2\int_0^x f(t)\cos(x-t)\mathrm{d}t=1$.

CHAPITRE 66

TD 17 : équations différentielles (corrigés)

Aller aux énoncés 65

Dans tous les exercices, sauf mention contraire, on demande de trouver des solutions réelles.

1. Révisions de MPSI

Corrigé 693 (Ordre un sans problème de raccord)

On note à chaque fois $\mathcal{E}$ l'équation étudiée, $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ son ensemble de solutions, $\mathcal{H}$ son équation homogène associée $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ son ensemble de solutions.

1 $\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \{x \mapsto C\sqrt{1+x^2}, C \in \mathbb{R}\}$.

On utilise le principe de superposition. Pour le second membre $\frac{1}{1+x^2}$, on trouve $x \mapsto x$ pour solution évidente.

Pour le second membre $\frac{3}{\sqrt{1+x^2}}$, on utilise la méthode de variation de la constante, en cherchant une solution de la forme $x \mapsto C(x)\sqrt{1+x^2}$. On trouve $x \mapsto 3\arctan(x)\sqrt{1+x^2}$ pour solution particulière.

On a donc

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \{x \mapsto x + 3\arctan(x)\sqrt{1+x^2} + C\sqrt{1+x^2}, C \in \mathbb{R}\}$$

2

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \{x \mapsto \frac{x}{2\sin(x)} - \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{C}{\sin(x)}, C \in \mathbb{R}\}$$

3

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \{x \mapsto \left(\frac{4}{17}x - \frac{15}{289}\right)e^{3x}\cos(x) + \left(\frac{1}{17}x - \frac{8}{289}\right)e^{3x}\sin(x) + \left(\frac{x^2}{2} - x + C\right)e^{-x}, C \in \mathbb{R}\}$$

4

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \{x \mapsto \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right)e^{4x} + \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + C\right)e^{2x}\}, C \in \mathbb{R}$$

5

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \{x \mapsto \sin(x) + Ce^{-x}, C \in \mathbb{R}\}$$

6

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \{x \mapsto \mathrm{ch}(x) + Ce^{x^2}, C \in \mathbb{R}\}$$

7

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \{x \mapsto 2(1+\cos(x)) + Ce^{\cos(x)}, C \in \mathbb{R}\}$$

Corrigé 694 (Ordre deux à coefficients constants)

Résoudre

1 Si $m \neq 0$:

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \{x \mapsto -\frac{\cos(mx)}{m^2}e^x + (\lambda x + \mu)e^x, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

Si $m = 0$:

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \{x \mapsto 1 + (\lambda x + \mu)e^x, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

2

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \{x \mapsto \frac{x^5}{20}e^x - \cos(x) - \sin(x) - x\sin(x) + x^3 + 6x^2 + 18x + 27 + (\lambda x + \mu)e^x, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

3

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \{\frac{3}{16}x^2\sin(x) + \frac{3}{128}\sin(x) + \frac{3}{16}x\cos(x) - \frac{1}{32}x\cos(3x) + \frac{3}{128}\sin(3x) + A\sin(x) + B\cos(x), (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

Corrigé 695 (Exemple de problème de Cauchy pour l'ordre deux)

Remarque : l'existence et l'unicité d'une solution à ce problème de Cauchy est attestée par le cours (il n'y a donc pas de synthèse à effectuer).

L'équation caractéristique associée à l'équation

$$(\mathcal{E}) \quad y'' - 2y' + (1 + m^2)y = (1 + 4m^2)\cos(mx)$$

admet 1 pour unique solution lorsque $m = 0$, et les complexes distincts $1 + im$ et $1 - im$ lorsque $m \neq 0$.

On observe immédiatement que la solution au problème de Cauchy considéré est, dans le cas où $m = 0$, la $\boxed{\text{fonction constante de valeur 1.}}$

On se place désormais dans le cas où $m \neq 0$. On cherche d'abord une solution particulière de

$$(\mathcal{E}') \quad y'' - 2y' + (1 + m^2)y = (1 + 4m^2)e^{imx},$$

sous la forme $x \mapsto \lambda e^{imx}$ pour un certain complexe λ (puisque $im \notin \{1 + im, 1 - im\}$, m étant supposé réel), que l'on détermine par identification.

On trouve $\lambda = 1 + 2im$: une solution particulière de $\mathcal{E}'$ est donc $x \mapsto (1 + 2im)e^{imx}$.

Les coeffficients 1, -2 et $1 + m^2$ devant y'', y' et y étant réels (car m l'est), une solution particulière de $\mathcal{E}$ est $x \mapsto \cos(mx) - 2m\sin(mx)$. La solution générale de $\mathcal{E}$ est donc

$$x \mapsto \cos(mx) - 2m\sin(mx) + (a\cos(mx) + b\sin(mx))e^x,$$

où a et b décrivent $\mathbb{R}$. En cherchant f sous cette forme, on constate que les conditions initiales conduisent à l'unique choix $(a, b) = (0, 2m)$. L'unique solution au problème de Cauchy considéré est donc :

$$\boxed{x \mapsto \cos(mx) + 2m\sin(mx)(e^x - 1).}$$

2. EDL à coefficients constants

Corrigé 696 (Équation différentielle linéaire d'ordre trois)

Corrigé 697 (Résolution d'un système différentiel)

Corrigé 698 (Wronskien inhomogène surdimensionné)

Corrigé 699 (Conservation de la positivité des composantes)

Corrigé 700 (Sous-groupe à un paramètre de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$)

3. EDL scalaires résolues d'ordre 2

Corrigé 701 (Autour de l'équation $y'' + y = f(t)$)

1 Les solutions de l'équation homogène associée à $\mathcal{E}$ étant bornées, il suffit de montrer qu'une solution particulière de $\mathcal{E}$ est bornée.

On sait que

$$g\ :\ \begin{array}{rcl}\mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \int_0^t \sin(t-s)f(s)\mathrm{d}s\end{array}$$

est une solution de g.

Pour montrer que g est bornée, la majoration

$$|g(t)| \leqslant \int_0^t f(s)\mathrm{d}s$$

est trop grossière. L'idée consiste à intégrer par parties (et le fait que f soit supposée de classe $\mathcal{C}^1$ une incitation) : pour tout $t > 0$ fixé,

$$g(t) = [\cos(s-t)f(s)]_{s=0}^{s=t} - \int_0^t \cos(s-t)f'(s)\mathrm{d}s = \cos(t)f(t) - f(0) - \int_0^t \cos(s-t)f'(s)\mathrm{d}s$$

or f est bornée car continue sur $\mathbb{R}_+$ et admettant une limite finie en $+\infty$.

De plus, si par exemple f est croissante, alors

$$\left|\int_0^t \cos(s-t)f'(s)\mathrm{d}s\right| \leqslant \int_0^t f'(s)\mathrm{d}s = f(t) - f(0) \leqslant \lim_{+\infty} f - f(0)$$

donc $t \mapsto \int_0^t \cos(s-t)f'(s)\mathrm{d}s$ est bornée (de même si f est décroissante).

Comme une somme de fonctions bornées est bornée, g est bien bornée.

2 Comme les solutions de l'équation homogène associée à $\mathcal{E}$ sont 2π-périodique,$\mathcal{E}$ admet au moins une solution 2π-périodique si et seulement si toutes ses solutions sont 2π-périodiques.

L'une de ces solutions est donnée par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = \int_0^t \sin(t-s)f(s)\mathrm{d}s = \sin(t)\int_0^t \cos(s)f(s)\mathrm{d}s - \cos(t)\int_0^t \sin(s)f(s)\mathrm{d}s$$

Pour que cette fonction soit 2π-périodique, il faut que $g(0) = g(2\pi)$, et que $g(\pi/2) = g(5\pi/2)$, *i.e.*

$$\int_0^{2\pi} \sin(s)f(s)\mathrm{d}s = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\pi/2}^{5\pi/2} \cos(s)f(s)\mathrm{d}s = 0$$

soit encore, par 2π-périodicité de f et de cos (et donc de leur produit) :

$$\int_0^{2\pi} \sin(s)f(s)\mathrm{d}s = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} \cos(s)f(s)\mathrm{d}s = 0$$

Réciproquement, si ces relations sont satisfaites, on montre que g est bien 2π-périodique.
Remarque : par exemple, si $f = \cos$ ou $f = \sin$, aucune solution de $\mathcal{E}$ n'est 2π-périodique, mais s'il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ tel que pour tout t, $f(t) = \cos(nt)$ (ou pour tout t, $f(t) = \sin(nt)$), alors toutes les solutions de $\mathcal{E}$ sont périodiques.

3 Posons $f \overset{def}{=} h + h''$. Ainsi, h est l'une des solutions de $y'' + y = f$. À nouveau, tout élément de $\mathrm{Vect}(\sin, \cos)$ est π-antipériodique, il suffit donc d'établir l'inégalité pour une solution particulière de $\mathcal{E}$. On sait que

$$g\ : t \mapsto \int_0^t \sin(t-s)f(s)\mathrm{d}s$$

est une solution de $\mathcal{E}$. Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$g(t+\pi) = \int_0^{t+\pi} \sin(t+\pi-s)f(s)\mathrm{d}s = -\int_0^{t+\pi} \sin(t-s)f(s)\mathrm{d}s$$

de sorte que

$$g(t+\pi) - g(t) = \int_t^{t+\pi} \sin(s-t)f(s)\mathrm{d}s$$

puis $g(t+\pi) - g(t) \geqslant 0$ car $f \geqslant 0$ et sin est positive sur $[0, \pi]$.

Corrigé 702 (Autour de l'équation $y'' - \omega^2 y = g$)

Corrigé 703 (Une EDL scalaire d'ordre 2 à coefficients non constants)

Il s'agit d'une EDL scalaire d'ordre 2 non homogène à coefficients non constants. Une solution évidente est $g \ : t \mapsto -\frac{t}{2}$, ce qui nous ramène à la résolution de l'équation homogène associée $\mathcal{H}$.

Si on ne repère pas la solution évidente $t \mapsto t^2+1$, on peut comme l'indique l'énoncé chercher une solution polynomiale de $\mathcal{H}$ sous la forme $f \ : t \mapsto \sum_{n\geqslant 0} a_n t^n$, où la suite (a_n) est presque nulle.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f''(t) = \sum_{n\geqslant 2} n(n-1)a_n t^{n-2} = \sum_{n\geqslant 0}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n$, de sorte que

$$(t^2+1)f''(t) - 2f(t) = \sum_{n\geqslant 0}(n(n-1)a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2} - 2a_n)t^n = \sum_{n\geqslant 0}\big((n^2-n-2)a_n + (n+2)(n+1)a$$

or $X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$, donc f est solution de $\mathcal{H}$ si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+2} = -\frac{n-2}{n+2}a_n$$

Si on choisit $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$, la suite (a_n) ainsi définie est bien presque nulle, puisque $a_0 = a_2 = 1$, et que pour $n \notin \{0, 2\}$, $a_n = 0$, d'où la solution particulière $f_1 \ : t \mapsto 1 + t^2$ de $\mathcal{H}$.

Reste à trouver une solution de $\mathcal{H}$ linéairement indépendante de f_1 : on utilise pour ce faire la méthode de l'abaissement de l'ordre (dite aussi méthode de Lagrange), en cherchant une solution de $\mathcal{H}$ sous la forme $h \ : t \mapsto C(t)(1+t^2)$, où C est une fonction deux fois dérivable (on ne perd en généralité à chercher une solution sous cette forme, puisque f_1 ne s'annule pas).

Pour tout réel t, $h''(t) = C''(t)(1+t^2) + 4tC'(t) + 2C(t)$ (par calcul direct ou d'après la formule de Leibniz), donc

$$(1+t^2)h''(t) - 2h(t) = (1+t^2)(C''(t)(1+t^2) + 4tC'(t))$$

donc h est solution de $\mathcal{H}$ si et seulement si C' est solution de

$$(1+t^2)y' + 4ty = 0$$

(l'ordre a bien été abaissé).

Une solution non nulle de cette équation est $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^2}$.

Or

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} &= \int \frac{(1+t^2-t^2)\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} \\
&= \arctan(t) - \int \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t \\
&= \arctan(t) + \left[t\frac{1}{2(1+t^2)}\right] - \int \frac{\mathrm{d}t}{2(1+t^2)} \\
&= \frac{1}{2}\arctan(t) + \frac{t}{2(1+t^2)} + K
\end{aligned}$$

On peut donc choisir pour C la fonction $t \mapsto \frac{1}{2}\arctan(t) + \frac{t}{2(1+t^2)}$, donc

$$f_2 \ : t \mapsto \frac{1}{2}((1+t^2)\arctan(t) + t)$$

est une solution de $\mathcal{H}$, non colinéaire à f_1 : (f_1, f_2) est bien un système fondamental de solutions de $\mathcal{H}$. De même d'ailleurs pour $(f_1, 2f_2)$.

En conclusion, la solution générale de $\mathcal{E}$ est

$$t \mapsto -\frac{t}{2} + \lambda(1+t^2) + \mu((1+t^2)\arctan(t) + t),$$

où λ et μ décrivent $\mathbb{R}$.

Corrigé 704 (Centrale MP 07)

1 On cherche les fonctions $f \ : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on ait :

$$f''(x) + \frac{1}{x^2}f(x) = 0.$$

Pour cela, on utilise le changement de variable, en considérant $g = f \circ \exp$ (et donc $f = g \circ \ln$).

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f'(x) = \frac{g'(\ln(x))}{x}$$

puis

$$f''(x) = \frac{g''(\ln(x))}{x^2} - \frac{g'(\ln(x))}{x^2}$$

de sorte que

$$f''(x) + \frac{1}{x^2}f(x) = \frac{g''(\ln(x))}{x^2} - \frac{g'(\ln(x))}{x^2} + \frac{g(\ln(x))}{x^2}$$

Ainsi, f est solution de $\mathcal{E}$ si et seulement si g est solution de

$$y'' - y' + y = 0,$$

i.e. il existe des réels λ et μ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$g(t) = \Big(\lambda\cos(\sqrt{3}t/2) + \mu\sin(\sqrt{3}t/2)\Big)\, e^{t/2}$$

Les solutions de $\mathcal{E}$ si et seulement si il existe des réels λ et μ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(x) = \Big(\lambda\cos(\sqrt{3}\ln(x)/2) + \mu\sin(\sqrt{3}\ln(x)/2)\Big)\sqrt{x}$$

2 La seule solution bornée est la fonction identiquement nulle.

Corrigé 705 (Solution d'une EDL particulière s'annulant au moins deux fois)

4. EDL scalaires non résolues

Corrigé 706 (Problèmes de raccord)

Corrigé 707 (Équations d'ordre 2)

1 Une solution évidente de $\mathcal{E}$ est $g \ : t \mapsto -1$.

Une solution évidente de $\mathcal{H}$ est $f_1 \ : t \mapsto t$.

Pour trouver une solution f_2 de $\mathcal{H}$ non colinéaire à f_1, on applique la méthode de Lagrange, en cherchant une solution de la forme $h \ : t \mapsto C(t)t$, où C est deux fois dérivable. Cela ne nuit pas à la généralité de la recherche, puisque f_1 ne s'annule pas sur l'intervalle d'étude $\mathbb{R}_+^*$.

On a, pour tout réel t :

$$h'(t) = C'(t)t + C(t) \quad \text{et} \quad h''(t) = C''(t)t + 2C'(t)$$

de sorte que

$$t^2h''(t) + th'(t) - h(t) = t^2(C''(t)t + 2C'(t)) + t^2C'(t)$$

donc h est solution de $\mathcal{H}$ si et seulement si C' est solution de

$$ty' + 3y = 0$$

équation dont la solution générale est $t \mapsto \lambda\frac{1}{t^3}$, qui admet $t \mapsto -\frac{\lambda}{2t^2}$ pour primitive. Le choix $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ pour C convient donc, ce qui fournit la solution $f_2 \ : t \mapsto \frac{1}{t}$ de $\mathcal{H}$, qui est bien non colinéaire à f_1.

Ainsi, la solution générale de $\mathcal{E}$ est :

$$t \mapsto -1 + \lambda t + \frac{\mu}{t},$$

où λ et μ parcourent $\mathbb{R}$.

Remarque : la solution f_2 trouvée est plus ou moins évidente. Si on a la chance d'y penser, on évite le recours à la méthode de l'abaissement de l'ordre.

2 Méthode standard. Ici, on peut avec un peu d'astuce trouver deux solutions évidentes non colinéaires, à savoir $f_1 \ : t \mapsto t + 2$ et $f_2 \ : t \mapsto e^t$: l'ensemble des solutions de cette équation est $\mathrm{Vect}(f_1, f_2)$.

Remarque : si on ne pense pas à f_2, on peut la trouver en appliquant la méthode de Lagrange connaissant f_1 (vraiment évidente).

5. Équations fonctionnelles ou problèmes se ramenant à des équations différentielles

Corrigé 708 (Équations pseudo différentielles)

Corrigé 709 (Équation fonctionnelle avec deux variables)

Analyse : considérons une telle solution, et soit $\star$ la relation que f vérifie par hypothèse.

Pour y fixé, en dérivant $\star$ par rapport à x, on obtient que, pour tous réels x et y :

$$f'(x+y) + f'(x-y) = 2f'(x)f(y)$$

puis, en dérivant à nouveau

$$f''(x+y) + f''(x-y) = 2f''(x)f(y)$$

En reprenant ce raisonnement mais en fixant x et en dérivant deux fois par rapport à y dans $\star$, on obtient, pour tous réels x et y :

$$f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(x)f''(y)$$

On a donc, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $f(x)f''(y) = f''(x)f(y)$, donc, s'il existe y en lequel f ne s'annule pas, f est solution d'une équation différentielle de la forme

$$z'' - \alpha z = 0$$

En reprenant $\star$, en faisant $y = 0$, on constate que si $f(0) \neq 1$, alors f est identiquement nulle.

Dans le cas où $f(0) = 1$, on obtient, en faisant $x = 0$ dans $\star$, que f est paire.

Pour résumer f doit être identiquement nulle, ou paire, solution d'une équation de la forme $z'' - \alpha z = 0$, et prenant la valeur 1 en 0.

Synthèse : la fonction nulle est évidemment solution, et, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les fonctions $x \mapsto \cos(\lambda x)$ et $x \mapsto \mathrm{ch}(\lambda x)$ sont bien deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, et vérifient la relation $\star$.

Remarque : la technique usuelle de production d'autres relations fonctionnelles à partir de celle qui nous est donnée était efficace, et l'hypothèse de régularité sur une solution de cette équation nous y invitait.

Remarque : pour une fois, s'intéresser à la stabilité de l'ensemble Ω des solutions de cette équation fonctionnelle apportait peu, car Ω n'est pas stable par les opérations usuelles. La seule stabilité pertinente était celle par composition à droite par une application linéaire (*i.e.* de la forme $x \mapsto \lambda x$), mais son utilité était limitée (tout au plus aurait-elle permis dans la synthèse de seulement vérifier que cos et ch sont dans Ω).

Corrigé 710 (Équation fonctionnelle avec intégrale)

CHAPITRE 67

Oraux 17 : équations différentielles (énoncés)

Aller aux corrigés 68

Exercice 711

1 (CCP MP 13) Résoudre : $(x^2+1)y' - 2xy = x\exp\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$.

2 (Mines Alès) Résoudre sur $\mathbb{R}$: $(\operatorname{sh} x)y' - e^x y = \operatorname{sh}^2 x$.

3 (CCP MP 10) Résoudre $y' - (\tan x)y = -\cos^2(x)$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

Exercice 712

(CCP MP 13) Résoudre $(1-x^2)y'' - 3xy - y = \frac{x}{\sqrt{|1-x^2|}}$.

Indication : remarquer que $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{|1-x^2|}}$ est solution de l'équation sans second membre.

Exercice 713

(TPE) On note (E) l'équation différentielle $(1+x^2)y' = 1 + 3xy$.

1 Trouver une solution polynomiale de (E), puis résoudre (E).

2 Déterminer les solutions de E bornées en $+\infty$.

Exercice 714

1 (Mines-Ponts PSI 10) Résoudre l'équation différentielle $xy' + y - \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} = 0$.

2 (Centrale PC 10) Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de $x(x^2-1)y' + 2y = x^4$.

Exercice 715

(Centrale PSI 10)
Pour $a \in \mathbb{R}$, soit S_a l'ensemble des solutions de $(1+x^2)y' - 2y = a$ sur $]-1, 1[$.

1 Déterminer S_a, pour $a \in \mathbb{R}$. Est-ce un espace vectoriel ?

2 Soit $S = \bigcup_{a\in\mathbb{R}} S_a$. Est-ce un espace vectoriel ?

3 Montrer que l'application Φ qui à $f \in S$ associe le a tel que $f \in S_a$, est linéaire. Déterminer le noyau de Φ.

4 Déterminer la dimension de S. En donner une base.

Exercice 716

(CCP MP 14) Si $\lambda \in]-1/2, +\infty[$, soit (E_λ) l'équation différentielle :

$$x(x+1)y'' + (2x+1)y' - \lambda(\lambda+1)y = 0$$

1 Montrer qu'il existe une unique solution P_1 de (E_1) polynomiale de degré 1 et telle que $P_1(0) = 1$.

2 Soient $\varphi : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \frac{8x^2+8x+1}{x(x+1)(2x+1)}$ et $\psi : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \frac{1}{x(x+1)(2x+1)^2}$. Montrer qu'il existe $(a, b, c, a', b', c', d') \in \mathbb{R}^7$ que l'on déterminera tels que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\varphi(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{2x+1}$ et $\psi(x) = \frac{a'}{x} + \frac{b'}{x+1} + \frac{c'}{2x+1} + \frac{d'}{(2x+1)^2}$. En déduire une primitive de φ et une primitive de ψ.

3 Résoudre (E_1) sur $\mathbb{R}^{+*}$.

4 Soit $y(x) = \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence strictement positif. Trouver une relation sur les (a_n) pour que y soit solution de (E_λ).

5 Donner une condition sur λ pour qu'il existe une solution de (E_λ) polynomiale non nulle.

Exercice 717

(CCP) Soient $(*) : x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$, E^+ (resp. E^-) l'ensemble des solutions de $(*)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ (resp. $\mathbb{R}^{-*}$) et E l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions de $(*)$ sur $\mathbb{R}$.

1 Montrer que E, E^+, E^- sont des espaces vectoriels. Que peut-on dire des dimensions de E^- et de E^+ ?

2 Déterminer les $f \in E$ développables en série entière au voisinage de 0.

Exercice 718

(CCP) Résoudre sur $]-1, 1[$: $(x^2 - 1)y'' + 2xy' - 2y = 0$.

Exercice 719

(TPE) Résoudre $y''' - 2y'' - y' + 2y = e^x$.

Exercice 720

(CCP) Résoudre en fonction de $m \in \mathbb{R}$: $y''(x) - my'(x) + 2y(x) = 1 + x^2 + e^x$.

Exercice 721

Résoudre sur $]0, \pi[$: $y'' + y = \operatorname{cotan} x$.

Exercice 722

Déterminer l'unique $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) - e^{-x} f(x) = 1$ et $f(0) = 0$. Montrer que $f(x) \sim x$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 723

(Banque CCP MP 15)
Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

1 Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière à l'origine.

2 Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ sur $]0, 1[$ sont développables en série entière à l'origine ?

Exercice 724

Déterminer la solution sur $\mathbb{R}$ de $y'' + y = \frac{1}{e^x - 1}$ ayant une limite en $+\infty$.

Exercice 725

Soit E l'ensemble des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. À toute fonction f de E, on associe la fonction g = L(f) par :

$$\forall\, x \in [0, 1], \quad g(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t) \mathrm{d}t$$

Montrer que L est un endomorphisme de E. Quels sont ses éléments propres ?

Exercice 726

(Mines-Ponts PSI 10) Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et Φ l'application qui à $f \in E$ associe $\Phi(f)\ : x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.
Montrer que Φ est un endomorphisme de E ne stabilisant aucun sous-espace vectoriel de dimension finie non nulle.

Exercice 727

Soit q une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$, f une solution non identiquement nulle de $y'' - qy = 0$. Montrer que f s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 728

(CCP)

1 Résoudre l'équation $y'' + 4y = 0$.

2 Soient $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $h : x \mapsto \frac{1}{2} \int_0^x g(t) \sin(2x - 2t) \mathrm{d}t$. Montrer que h est solution de $y'' + 4y = g$. Résoudre : $y'' + 4y = g$.

3 Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f'' + 4f \geqslant 0$. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + f(x + \pi/2) \geqslant 0$.

Exercice 729

Soit q une application continue périodique et non identiquement nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$, y une solution de $y'' + qy = 0$. Montrer que y s'annule une infinité de fois sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 730

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution non identiquement nulle de l'équation différentielle (E) : $y'' + e^t y = 0$. Montrer que f admet une infinité dénombrable de zéros.

CHAPITRE 68

Oraux 17 : équations différentielles (corrigés)

Aller aux énoncés 67

Corrigé 726 (Endomorphisme sans sous-espace stable de dimension finie non nulle)

Le fait que Φ soit un endomorphisme résulte de la linéarité de l'intégrale. Supposons que F soit un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, et stable par Φ. L'endomorphisme Φ induit donc un endomorphisme ψ sur F. De plus, ψ est injectif, puisque si $\Phi(f) = 0$, alors, en dérivant, $f = 0$: ψ est un automorphisme de F.

Comme la dérivation est un inverse à gauche de ψ, c'est son inverse, donc F est stable par dérivation. De plus, soit $f \in F$: f est solution d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants, et nécessairement nulle en 0, ainsi que ses dérivées : elle est l'unique solution à un problème de Cauchy dont les conditions initiales sont toutes nulles : c'est la fonction identiquement nulle.

Corrigé 727 (Zéros d'une solution de $y'' - qy = 0$)

Corrigé 728 ($f(x) + f(x + \pi/2) \geqslant 0$ guidé)

Corrigé 729 (Solutions $y'' + qy = 0$ où q est périodique (ENS MP 10))

Corrigé 730 (Zéros d'une solution de $y'' + e^t y = 0$ (X MP 10))

CHAPITRE 69

TD 18 : calcul différentiel (énoncés)

Aller aux corrigés 70

1. Régularité des fonctions de deux variables

Exercice 731

1 Soit $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, xy > -1\}$.
  a Montrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
  b Étudier la continuité de la fonction f définie sur U par

$$f(x,y) = \frac{\ln(1+xy)}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0.$$

2 On considère la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $g(0,0) = 0$. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^2$.
3 Soit $\varphi\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, et

$$\begin{array}{rccl} h\ : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x} \text{ si } x \neq y, \varphi'(x) \text{ sinon.} \end{array}$$

Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 732

Soit

$$\begin{array}{rccl} f\ : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & (x^2-y^2)\ln(x^2+y^2) \text{ si } (x,y) \neq (0,0), 0 \text{ sinon} \end{array}$$

Étudier la régularité de f.

Exercice 733

1 On considère la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2} \end{array}$$

prolongée par la valeur 0 en l'origine.
Ce prolongement est-il continu ? admet-il des dérivées partielles (et des dérivées selon tout vecteur non nul) en tout point ? Est-il de classe $\mathcal{C}^1$?

2 Mêmes questions avec

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{xy}{x^2+y^2} \end{array}$$

3 Mêmes questions avec

$$h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{xy^2}{x^2+y^4} \end{array}$$

Exercice 734

Déterminer les familles $(a_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant 3}$ de réels pour lesquelles

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{\sum_{0\leqslant i,j\leqslant 3} a_{i,j} x^i y^j}{x^2+y^2} \end{array}$$

admet une limite finie en l'origine.

Exercice 735

(Mines MP 08) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 736

Soit $f(x,y) = \frac{x^3y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq 0$ et $f(0,0) = 0$.

1 Étudier la continuité de f et de ses dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2$.

2 Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

3 Qu'en déduire sur la régularité de f ?

Exercice 737

On fixe deux points distincts A et B du plan. Calculer la différentielle et le gradient en tout point où cela est possible, dessiner des lignes de niveau et des lignes de courant pour :

1 $M \mapsto AM$.

2 $M \mapsto AM^2$.

3 $M \mapsto AM^2 + BM^2$.

4 $M \mapsto AM + BM$.

5 $M \mapsto AM \cdot BM$.

Exercice 738

Soit $h\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $h(0,0) = 0$. La fonction h est-elle de classe $\mathcal{C}^2$?

2. Différentielle

Exercice 739

Montrer que le déterminant est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, que $D(\det)(I_n) = \mathrm{tr}$, et que

$$D\det(X)(H) = \mathrm{tr}({}^t\mathrm{com}(X)H).$$

Exercice 740

Soit $U = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Vérifier que U est un ouvert, et montrer que l'application inverse φ de U dans U est différentiable, et calculer sa différentielle en tout point.

Exercice 741

Soit

$$\begin{array}{rccc} \varphi\ : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^n \\ & M & \mapsto & (\mathrm{tr}(M), \mathrm{tr}(M^2), \ldots, \mathrm{tr}(M^n)) \end{array}$$

1 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que φ est différentiable en M et calculer $\mathrm{d}\varphi_M$.

2 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, μ_M son polynôme minimal. Montrer que $\mathrm{rg}(\mathrm{d}\varphi_M) = \deg(\mu_M)$.

3 Montrer que l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\chi_M = \pm\mu_M$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 742

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme subordonnée, on considère $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $F : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto 2X - XAX$.

1 Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$, calculer $F(A^{-1})$, $DF(A^{-1})$.

2 Montrer que pour X_0 suffisamment proche de A^{-1}, (X_p) d'itératrice F converge vers A^{-1}.

3 Faire le lien avec la méthode de Newton.

3. Extrema

Exercice 743

1 Chercher les extrema de $f : (x, y) \mapsto 3xy - x^3 - y^3$.

2 *(Mines MP 08)* Chercher les extrema de $g : (x, y) \mapsto -2(x - y)^2 + x^4 + y^4$.

3 *(Mines PC 08)* Déterminer les extrema de $h : (x, y) \mapsto (3x + 4y)e^{-x^2-y^2}$.

4 *(X PC 09)* Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^2 - y^2)\exp(-(x^2 + y^2))$. Montrer que f atteint un maximum et un minimum sur $\mathbb{R}^2$ et les déterminer.

Exercice 744

Donner les extrema locaux et globaux de $f : (x, y) \mapsto y(x^2 + (\ln(y))^2)$.

Exercice 745

Étudier les extrema de $f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ et donner leur nature.

Exercice 746

Soit n points (x_i, y_i) de $\mathbb{R}^2$, les x_i étant non tous égaux. Montrer qu'il existe un unique couple (λ, μ) de réels rendant minimum la quantité $\sum_{i=1}^n (\lambda x_i + \mu - y_i)^2$.

Exercice 747

Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ convexe différentiable. Montrer que tout point critique est un minimum global.

Exercice 748

Soit f une forme linéaire sur E espace euclidien et $g(x) = f(x)e^{-\|x\|^2}$. Montrer que g admet un minimum et un maximum.

Exercice 749

Calculer l'aire maximale d'un triangle inscrit dans un cercle de rayon r.

Exercice 750

Soit A, B, C trois points du plan non alignés tels que les angles $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ soient $< 2\pi/3$. Donner le mimimum sur $\mathbb{R}^2$ de $f(M) = MA + MB + MC$.

4. Équations aux dérivées partielles

Exercice 751

1 Trouver les fonctions polynomiales $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant : $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 4f$.
2 Déterminer les applications f de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = a$, où a est une constante réelle donnée. On utilisera le changement de variable : $u = x + y$, $v = x - y$.
3 Même question avec $3\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = xe^y$.

Exercice 752

Résoudre les EDP suivantes au moyen d'un passage en polaires :
1 $x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2 $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.
3 $x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f(x,y)$ d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 753

1 *(Mines MP 09)* Résoudre l'équation aux dérivées partielles : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.
Indication : on pourra utiliser un changement de variables linéaire du type $u = ax + by$, $v = cx + dy$.
2 *(Mines MP 09)* Résoudre : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$.
Indication : on pourra utiliser, en le justifiant, le changement de variable $\varphi(x,y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right)$.

Exercice 754

1 *(X PC 09)* Résoudre $x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = x^2y^3$
Indication : poser $u = x$, $v = xy$.
2 Soit U l'ouvert de $\mathbb{R}^2$: $U = \{(x, y), x > 0,\ y > 0\}$. Trouver les applications $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant : $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2$.
Indication : on utilisera le changement de variable : $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$.

CHAPITRE 70

TD 18 : calcul différentiel (corrigés)

Aller aux énoncés 69

1. Régularité des fonctions de deux variables

Corrigé 731 (Continuité des fonctions de deux variables)

Corrigé 732 (Fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$)

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Corrigé 733 (Régularité jusqu'à la classe $\mathcal{C}^1$)

Corrigé 734 (Limite en l'origine à paramètres)

Corrigé 735 (Fonction de classe $\mathcal{C}^1$)

Corrigé 736 (Dérivées partielles secondes croisées)

Corrigé 737 (Différentielle, gradient)

Corrigé 738 (Fonctions de deux variables de classe $\mathcal{C}^2$ *(Mines MP 08)*)

2. Différentielle

Corrigé 739 (Différentielle du déterminant)

Le déterminant est de classe $\mathcal{C}^1$ car polynomial en les coefficients de la matrice. On a

$$\det(I_n + H) = \det(I_n) + \operatorname{tr}(H) + \mathrm{o}(\|H\|),$$

donc $D(\det)(I_n) = \operatorname{tr}$.

Supposons X inversible :

$$\det(X+H) = \det(X)\det(I_n+X^{-1}H) = \det(X)(1+\operatorname{tr}(X^-1H)+\mathrm{o}(\|H\|) = \det(X)+\operatorname{tr}({}^t\mathrm{com}(X)H)+\mathrm{o}(\|H\|)$$

d'où le résultat lorsque X est inversible.

La différentielle $X \mapsto D(\det)(X)$ étant continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ce résultat s'étend par densité à toute matrice.

Corrigé 740 (Différentielle de l'inverse matriciel)

U est ouvert, en tant qu'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}^*$ par l'application continue déterminant.

Comme $(I_n - H)(I_n + H) = I_n - H^2$, $D(\varphi)(I_n) = -\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Dans le cas général, en $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$,

$$(X+H)^{-1} = X^{-1}(I_n - HX^{-1})^{-1} = X^{-1} - X^{-1}HX^{-1} + \mathrm{o}(\|H\|),$$

donc $D(\varphi)(X)(H) = -X^{-1}HX^{-1}$.

Corrigé 741 (Matrices dont les polynômes minimal et caractéristique sont égaux)

Corrigé 742 (Une méthode de Newton matricielle pour le calcul d'inverse)

1 F est de classe $\mathcal{C}^1$ car les coefficients de $F(X)$ sont polynomiaux en les coefficients de X. Bien sûr, $F(A^{-1}) = A^{-1}$.
$F(A^{-1}+H) = 2A^{-1}+2H-(A^{-1}+H)A(A^{-1}+H) = F(A^{-1})+A^{-1}H^2$, donc $DF(A^{-1}) = 0$.

2 $\|F(X) - A^{-1}\| \leqslant M\,\|X - A^{-1}\|^2$ pour un certain $M > 0$, donc

$$\left\|X_p - A^{-1}\right\| \leqslant M\left\|X_0 - A^{-1}\right\|^{2^p},$$

d'où le résultat.

3 On cherche à calculer a^{-1} étant donné un réel a fixé, *i.e.* on cherche le zéro de $f\ : x \mapsto a - \frac{1}{x}$. La méthode de Newton appliquée à cette fonction donne l'itératrice

$$N_f\ : x \mapsto 2x - a^2x.$$

Dans notre exercice, nous choisissons $f\ : X \mapsto A - X^{-1}$, et nous considérons l'itératrice

$$N_f\ : X \mapsto X - (D(f)(X))^{-1}(f(X)),$$

et on retombe bien sur F.

3. Extrema

Corrigé 743 (Extrema d'une fonction de deux variables)

Corrigé 744 (Extrema)

Corrigé 745 (Extrema d'une fonction)

Les points critiques sont $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
Pas d'extremum local en l'origine.
f réalise un minimum local, et même global, en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Corrigé 746 (Les moindres carrés)

Corrigé 747 (Points critiques d'une fonction convexe)

Corrigé 748 (Extrema d'une certaine fonction sur un espace euclidien)

Prendre une base orthonormée $(x_1, \ldots, x_n)$ de E telle que $f(x) = \lambda x_1$.

Corrigé 749 (Aire maximale d'un triangle inscit dans un cercle)

Corrigé 750 (Minimum de la somme des distances à trois points)

4. Équations aux dérivées partielles

Corrigé 751 (EDP d'ordre 1)

Corrigé 752 (Passage en polaires)

Corrigé 753 (EDP d'ordre 2 avec changement linéaire)

Corrigé 754 (EDP d'ordre 2 avec changement de variables non linéaire)

CHAPITRE 71

Oraux 18 : calcul différentiel (énoncés)

Aller aux corrigés 72

Exercice 755

Soit $f\ :(x,y)\mapsto xy\ln(x^2+y^2)$.
1 Peut-on prolonger f par continuité en $(0,0)$?
2 Déterminer les extrema de f.

Exercice 756

(CCP MP 13) Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ telle que $f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $f(0,0)=0$.
1 Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2 La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 757

Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation : $z=x\,e^x+y\,e^y$. Déterminer les points de $\mathcal{S}$ en lesquels le plan tangent à $\mathcal{S}$ est horizontal i.e. possède une équation de la forme $z=c$.

Exercice 758

1 (CCP) Points critiques et extrema locaux de $f:(x,y)\mapsto x^4y+\ln(4+y^2)$?
2 (CCP) Extrema locaux de $f:(x,y)\mapsto xy+4/x+2/y$ sur $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 759

(CCP MP 13) Soit $f:(x,y)\mapsto xy^3/(x^2+y^2)$. Montrer que f peut être prolongée par continuité en l'origine. Ainsi prolongée, f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 760

(CCP MP 13) Soient $U =]0,+\infty[^n$ et pour $x = (x_1,\dots,x_n) \in U$, $f(x) = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right)$.

1 Déterminer les points critiques de f.

2 Montrer que f est minorée par n^2. Trouver un cas d'égalité.

3 Comparer $A(x) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)$ et $H(x) = n\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right)^{-1}$.

4 La fonction f est-elle majorée ?

Exercice 761

Soit $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ prolongée par continuité en $(0,0)$.
Étudier la différentiabilité en $(0,0)$ de f.

Exercice 762

(Centrale PC 10) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Déterminer $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$.

Exercice 763

Soit $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{\sin(x^3y)}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

1 La fonction f admet-elle des dérivées partielles du premier ordre en tout point de $\mathbb{R}^2$?

2 Étudier l'existence de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.

Exercice 764

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x,y) = (x^2-y^2)\ln(x^2+y^2)$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Exercice 765

(TPE MP 13) Soit $A > 0$. Quel est le maximum de xyz pour x, y, z dans $\mathbb{R}^{+*}$ tels que $x+y+z = A$? tels que $x+2y+3z = A$?

Exercice 766

Résoudre : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f$.
Indication : poser $f(x,y) = e^{-y}g(x,y)$.

Exercice 767

(CCP MP 13) Soit $f : (x, y) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+y^{2n}}$.
1 Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2 Pour $a \in [0, 1[$, soit $D_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x < a \max\{1, y^2\}\}$. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe sur D_a pour tout a. La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe-t-elle sur D ?

CHAPITRE 72

Oraux 18 : calcul différentiel (corrigés)

Aller aux énoncés 71

Corrigé 755 (Prolongement par continuité, extrema (Mines-Ponts PSI 10))

Corrigé 756 (Différentiabilité d'une fonction de deux variables)

Corrigé 757 (Plan tangent horizontal)

Corrigé 758 (Points critiques et extrema locaux)

Corrigé 759 (Prolongement par continuité et régularité)

Corrigé 760 (Comparaison des moyennes arithmétique et géométrique par le calcul différentiel)

Corrigé 761 ({Etude de différentiabilité (Mines-Ponts PSI 10))

Corrigé 762 (Limite d'un taux d'accroissement à deux bornes variables)

Corrigé 763 (Existence d'une dérivée partielle seconde croisée (Centrale PC 10))

Corrigé 764 (Étude de régularité (Centrale PC 10))

Corrigé 765 (Détermination de maximum du produit de coordonnées dans un hyperplan)

Corrigé 766 (Une équation aux dérivées partielles)

Corrigé 767 (Étude d'une fonction de deux variables définie comme somme d'une série)