# Table des matières


Chapitre 1. Logique (énoncés) 7
1. Logique 7
2. Principes de démonstration 9

Chapitre 2. Logique (corrigés) 11
1. Logique 11
2. Principes de démonstration 12

Chapitre 3. Ensembles (énoncés) 13
1. Ensembles 13
2. Relations binaires 14
3. Généralités sur les applications 15
4. Raisonnement par récurrence 16

Chapitre 4. Ensembles (corrigés) 19
1. Ensembles 19
2. Relations binaires 20
3. Généralités sur les applications 21
4. Raisonnement par récurrence 22

Chapitre 5. Nombres complexes (énoncés) 23
1. Nombres complexes et géométrie 23
2. Module, argument, forme exponentielle 24
3. Trigonométrie 24
4. Racines de l'unité 25
5. Équations algébriques 26

Chapitre 6. Nombres complexes (corrigés) 29
1. Nombres complexes et géométrie 29
2. Module, argument, forme exponentielle 30
3. Trigonométrie 32
4. Racines de l'unité 34
5. Équations algébriques 35

Chapitre 7. Techniques fondamentales (énoncés) 37
1. Utilisation des symboles de somme et de produit 37
2. Systèmes 38
3. Équations 39
4. Dérivation, intégration 40
5. Formules 42
6. Simplifications 42
7. Divers 43

Chapitre 8. Techniques fondamentales (corrigés) 45
1. Utilisation des symboles de somme et de produit 45

2. Systèmes 46
3. Équations 47
4. Dérivation, intégration 48
5. Formules 49
6. Simplifications 50
7. Divers 50

Chapitre 9. Structures algébriques (énoncés) 53
1. Groupes 53
2. Anneaux, corps 56
3. Compléments sur les groupes 58

Chapitre 10. Structures algébriques (corrigés) 61
1. Groupes 61
2. Anneaux, corps 65
3. Compléments sur les groupes 70

Chapitre 11. Équations différentielles (énoncés) 71
1. Équations différentielles linéaires d'ordre un 71
2. Équations différentielles linéaires d'ordre deux à coefficients constants 71
3. Équations différentielles d'un autre type 72
4. Équations fonctionnelles ou problèmes se ramenant à des équations différentielles 73

Chapitre 12. Équations différentielles (corrigés) 75
1. Équations différentielles linéaires d'ordre un 75
2. Équations différentielles linéaires d'ordre deux à coefficients constants 76
3. Équations différentielles d'un autre type 77
4. Équations fonctionnelles ou problèmes se ramenant à des équations différentielles 78

Chapitre 13. Arithmetique (énoncés) 79
1. Congruences, équations diophantiennes, division euclidienne 79
2. Diviseurs, pgcd, ppcm 80
3. Nombres premiers, nombres composés, divers 81

Chapitre 14. Arithmetique (corrigés) 83
1. Congruences, équations diophantiennes, division euclidienne 83
2. Diviseurs, pgcd, ppcm 83
3. Nombres premiers, nombres composés, divers 83

Chapitre 15. Suites (énoncés) 85
1. Borne supérieure, corps des nombres réels 85
2. Convergence, divergence 86
3. Relations de comparaison, comportement à l'infini 88
4. Suites extraites 90
5. Suites adjacentes 91
6. Suite de nombres complexes 91

Chapitre 16. Suites (corrigés) 93
1. Borne supérieure, corps des nombres réels 93
2. Convergence, divergence 94
3. Relations de comparaison, comportement à l'infini 95
4. Suites extraites 96
5. Suites adjacentes 96

6. Suite de nombres complexes 96

Chapitre 17. Espaces vectoriels (énoncés) 97
1. Espaces vectoriels, première approche 97
2. Applications linéaires, première approche 98
3. Opérations sur les sous-espaces vectoriels 99
4. Endomorphismes d'un espace vectoriel 99
5. Projecteurs, symétries 101
6. Familles de vecteurs 102

Chapitre 18. Espaces vectoriels (corrigés) 103
1. Espaces vectoriels, première approche 103
2. Applications linéaires, première approche 103
3. Opérations sur les sous-espaces vectoriels 103
4. Endomorphismes d'un espace vectoriel 103
5. Projecteurs, symétries 104
6. Familles de vecteurs 104

Chapitre 19. Fonctions numériques (énoncés) 105
1. Limites 105
2. Continuité 105
3. Fonctions lipschitziennes 108
4. Uniforme continuité 108

Chapitre 20. Fonctions numériques (corrigés) 111
1. Limites 111
2. Continuité 111
3. Fonctions lipschitziennes 112
4. Uniforme continuité 112

Chapitre 21. Dénombrement (énoncés) 113
1. Dénombrement 114
2. Ensembles finis, curiosités 115

Chapitre 22. Dénombrement (corrigés) 117
1. Dénombrement 117
2. Ensembles finis, curiosités 117

Chapitre 23. Dimension finie (énoncés) 119
1. Familles de vecteurs 119
2. Sous-espaces vectoriels 120
3. Applications linéaires 120
4. Rang 123

Chapitre 24. Dimension finie (corrigés) 125
1. Familles de vecteurs 125
2. Sous-espaces vectoriels 125
3. Applications linéaires 125
4. Rang 126

Chapitre 25. Suites récurrentes (énoncés) 127

Chapitre 26. Suites récurrentes (corrigés) 129

Chapitre 27. Polynômes (énoncés) 131

1. Arithmétique des polynômes 131
2. Polynômes et algèbre linéaire 132
3. Racines d'un polynôme 134
4. Divers 135

Chapitre 28. Polynômes (corrigés) 137
1. Arithmétique des polynômes 137
2. Polynômes et algèbre linéaire 137
3. Racines d'un polynôme 138
4. Divers 138

Chapitre 29. Analyse asymptotique (énoncés) 139
1. Comparaison de fonctions 139
2. Formules de Taylor 139
3. Calcul de développements limités 139
4. Utilisation des développements limités 140
5. Développements asymptotiques 141

Chapitre 30. Analyse asymptotique (corrigés) 143
1. Comparaison de fonctions 143
2. Formules de Taylor 143
3. Calcul de développements limités 143
4. Utilisation des développements limités 143
5. Développements asymptotiques 143

Chapitre 31. Fractions rationnelles (énoncés) 145
1. Décomposition en éléments simples 145
2. Calculs liés aux fractions rationnelles 146

Chapitre 32. Fractions rationnelles (corrigés) 149
1. Décomposition en éléments simples 149
2. Calculs liés aux fractions rationnelles 149

Chapitre 33. Matrices (énoncés) 151
1. Calcul matriciel 151
2. Matrices et morphismes 153
3. Rang d'une matrice, opérations élémentaires 154
4. Similitude, équivalence 155

Chapitre 34. Matrices (corrigés) 157
1. Calcul matriciel 157
2. Matrices et morphismes 157
3. Rang d'une matrice, opérations élémentaires 157
4. Similitude, équivalence 158

Chapitre 35. Probabilités (énoncés) 159
1. Probabilité sur un univers fini 159
2. Conditionnement et indépendance 161

Chapitre 36. Probabilités (corrigés) 163
1. Probabilité sur un univers fini 163
2. Conditionnement et indépendance 163

Chapitre 37. Intégration (énoncés) 165
1. Annulation et intégrales 165

2. Inégalités intégrales 166
3. Suites et intégrales 167
4. Sommes de Riemann 168
5. Divers 168

Chapitre 38. Intégration (corrigés) 171
1. Annulation et intégrales 171
2. Inégalités intégrales 171
3. Suites et intégrales 171
4. Sommes de Riemann 171
5. Divers 172

Chapitre 39. Primitives et formules de Taylor (énoncés) 173

Chapitre 40. Primitives et formules de Taylor (corrigés) 177

Chapitre 41. Déterminant (énoncés) 179
1. Calculs de déterminants 179
2. Propriétés du déterminant 182
3. Utilisation du déterminant 184

Chapitre 42. Déterminant (corrigés) 185
1. Calculs de déterminants 185
2. Propriétés du déterminant 186
3. Utilisation du déterminant 186

Chapitre 43. Séries numériques (énoncés) 189
1. Calculs de sommes 189
2. Séries à termes positifs 190
3. Séries à termes quelconques 191
4. Applications aux développements asymptotiques 192

Chapitre 44. Séries numériques (corrigés) 195
1. Calculs de sommes 195
2. Séries à termes positifs 195
3. Séries à termes quelconques 195
4. Applications aux développements asymptotiques 195

Chapitre 45. Variables aléatoires (énoncés) 197
1. Loi d'une variable aléatoire 197
2. Couples de variables aléatoires 198
3. Espérance, variance, moments 199
4. V.a.i.i.d. 201

Chapitre 46. Variables aléatoires (corrigés) 203
1. Loi d'une variable aléatoire 203
2. Couples de variables aléatoires 203
3. Espérance, variance, moments 203
4. V.a.i.i.d. 203

Chapitre 47. Espaces euclidiens (énoncés) 205
1. Produits scalaires 205
2. Endomorphismes d'espaces euclidiens 207
3. Matrices orthogonales 208
4. Espaces euclidiens de petite dimension 208

Chapitre 48. Espaces euclidiens (corrigés) 211
1. Produits scalaires 211
2. Endomorphismes d'espaces euclidiens 211
3. Matrices orthogonales 212
4. Espaces euclidiens de petite dimension 212

CHAPITRE 1

# Logique (énoncés)

Aller aux corrigés 2

## 1. Logique

**Exercice 1**

Donner, lorsque cela est possible, la valeur de vérité des assertions suivantes :

(1) $(4 = 2 + 2) \wedge (4 = 2 + 1)$ ;
(2) $(4 = 2 + 2) \vee (4 = 2 + 1)$ ;
(3) $(4 = 2 + 2) \vee (4 = 3 + 1)$ ;
(4) $(4 = 2 + 2) \Rightarrow (4 = 2 + 1)$ ;
(5) $(4 = 2 + 1) \Rightarrow (4 = 3 + 1)$ ;
(6) $(4 = 2 + 1) \Rightarrow (4 = 1 + 1)$ ;
(7) $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 \leqslant 0$ ;
(8) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists z \in \mathbb{R},\ ((x < z < y) \vee (y < z < x))$ ;
(9) $\forall\, x \in \mathbb{R}, ((x^2 \geqslant 1) \Rightarrow (x \geqslant 1))$ ;
(10) La fonction inverse de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$ est décroissante.

**Exercice 2**

Soit $f$ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire dans le langage formel (le cas échéant), puis donner la négation (améliorée) de chacune des assertions suivantes

(1) $f$ est croissante ;
(2) $f$ est strictement monotone ;
(3) $f$ s'annule au moins une fois ;
(4) $f$ s'annule au moins deux fois ;
(5) $f$ est constante ;
(6) $f$ est minorée ;
(7) $\forall\, M \in \mathbb{R}, \exists t_0 \in \mathbb{R},\ \forall\, t \in \mathbb{R}, ((t \geqslant t_0) \Rightarrow (f(t) \geqslant M))$.

### Exercice 3

**1** Soient $R$ et $S$ des assertions. Donner la négation de $R \Rightarrow S$, sans symbole d'implication.
**2** Soit $f : E \to E'$ une application ($E$ et $E'$ étant deux ensembles non vides). L'*injectivité* de $f$ peut s'exprimer ainsi :

$$\forall\, x, x' \in E, \quad (f(x) = f(x')) \Rightarrow (x = x'),$$

Exprimer la non injectivité.

### Exercice 4

Montrer que les assertions suivantes sont des tautologies :

(1) $(\neg(\neg A)) \Leftrightarrow A$ (*principe du tiers-exclu*)
(2) $(A \wedge A) \Leftrightarrow A$ (*idempotence de la conjonction*)
(3) $(A \vee A) \Leftrightarrow A$ (*idempotence de la disjonction*)
(4) $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$ (*commutativité de la conjonction*)
(5) $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$ (*commutativité de la disjonction*)
(6) $(A \wedge (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$ (*associativité de la conjonction*)
(7) $(A \vee (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \vee C)$ (*associativité de la disjonction*)
(8) $(\neg(A \vee B)) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B), \quad (\neg(A \wedge B)) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$ (*lois de Morgan*)
(9) $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ (règle du *modus ponens*)
(10) $((A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)))$ (*distributivité de la conjonction par rapport à la disjonction*)
(11) $((A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C)))$ (*distributivité de la disjonction par rapport à la conjonction*)
(12) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ (*syllogisme*)
(13) $((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C))$ (*disjonction des cas*)
(14) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee B) \Leftrightarrow ((\neg B) \Rightarrow (\neg A)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \Leftrightarrow A) \Leftrightarrow ((A \vee B) \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\neg(A \wedge (\neg B)))$
(15) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (((\neg A) \vee B) \wedge ((\neg B) \vee A)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B)))$

### Exercice 5

Soient $x_1, \ldots, x_n$ des nombres réels, où $n \geqslant 2$. Traduire en langage formel les deux assertions suivantes : « Les nombres $x_1, \ldots, x_n$ sont non tous nuls », « Les nombres $x_1, \ldots, x_n$ sont tous non nuls ».
Dans le cas où $n = 2$, trouver des formules mathématiques (sans connecteurs) équivalentes à ces assertions. Trouver de telles formules si $x_1$ et $x_2$ sont supposés complexes.

Exercice 6

Donner la valeur de vérité et la négation des assertions suivantes :

$$(a)\exists x\in\mathbb{R},\forall y\in\mathbb{R},\quad x+y>0\quad;\quad(b)\forall x\in\mathbb{R},\exists y\in\mathbb{R},\quad x+y>0\,;$$
$$(c)\forall x\in\mathbb{R},\forall y\in\mathbb{R},\quad x+y>0\quad;\quad(d)\exists x\in\mathbb{R},\forall y\in\mathbb{R},\quad y^2>x.$$

## 2. Principes de démonstration

Exercice 7

Montrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$. On pourra raisonner par l'absurde, en supposant pouvoir écrire $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$, où $p$ et $q$ sont des entiers premiers entre eux ($q$ non nul).

Exercice 8

En effectuant un raisonnement par analyse-synthèse, résoudre les systèmes d'inconnues réelles $x, y, z$ :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 0\\ x+2y+2z &=& -1\\ 2x+y+3z &=& -3\\ 2x-3y+z &=& -3\end{array}\right. \quad\text{et}\quad \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 0\\ x+2y+2z &=& -1\\ 2x+y+3z &=& -3\\ 3x-y+4z &=& -2\end{array}\right.$$

Exercice 9

En utilisant l'éventuel caractère rationnel du nombre réel $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, montrer qu'il existe un nombre irrationnel $x$ tel que $x^{\sqrt{2}}$ soit rationnel.

CHAPITRE 2

# Logique (corrigés)

Aller aux énoncés 1

## 1. Logique

Corrigé 1 (Valeur de vérité)

Corrigé 2 (Reformulations formelles et négations)

(1) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x \leqslant y) \Rightarrow (f(x) \leqslant f(y))$.
**Remarque :** dans le cas où $f$ est dérivable, on peut proposer $f' \geqslant 0$ (*i.e.* $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).
Contraire : $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x \leqslant y) \wedge (f(y) < f(x))$.

(2) $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x < y) \Rightarrow (f(x) < f(y))) \vee (\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x < y) \Rightarrow (f(y) < f(x)))$.
**Remarque :** ne surtout pas proposer

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x < y) \Rightarrow ((f(x) < f(y)) \vee (f(y) < f(x))),$$

qui revient à l'injectivité de $f$.
**Remarque :** dans le cas où $f$ est dérivable, on peut proposer

$$((f' \geqslant 0) \vee (f' \leqslant 0)) \wedge \big(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (f'(x) = f'(y) = 0 \wedge x < y) \Rightarrow (\exists z \in ]x,y[, f'(z)) \neq 0\big)$$

Contraire :

$$\exists (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, (x < y) \wedge (z < t) \wedge (f(x) < f(y)) \wedge (f(t) < f(z)).$$

(3) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.

(4) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (f(x) = f(y) = 0) \Rightarrow (x \neq y)$.

(5) $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x) \neq f(y)$.

(6) $\forall m \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, m > f(x)$.

(7) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall t_0 \in \mathbb{R}, \exists t \in \mathbb{R}, ((t \geqslant t_0) \wedge (f(t) < M))$.

Corrigé 3 (Nier l'injectivité)

**1** $(\neg R) \vee S$.
**2** $\exists x, x' \in E, (f(x) = f(x')) \wedge (x \neq x')$.

Corrigé 4 (Quelques tautologies célèbres (et utiles))

Faire les tables de vérité„ ou utiliser les tautologies déjà prouvées.

Corrigé 5 (Tous non nuls et non tous nuls)

$\forall i \in [\![1,n]\!], x_i \neq 0$, et $\exists i \in [\![1,n]\!], x_i \neq 0$.

Corrigé 6 (Valeur de vérité et négation)

## 2. Principes de démonstration

Corrigé 7 (Irrationalité de $\sqrt{2}$)

Supposons avoir $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, où $p$ et $q$ sont deux entiers premiers entre eux. On a alors $2q^2 = p^2$, donc $p$ est pair, puis s'écrit $2p'$ pour un certain entier $p'$. Ainsi, $q^2 = 2(p')^2$, donc $q$ est pair, ce qui contredit le fait que $p$ et $q$ soient premiers entre eux.

Corrigé 8 (Raisonnement par analyse-synthèse)

Corrigé 9 (Exemple astucieux de disjonction des cas)

Dans le cas où $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel, le choix $x = \sqrt{2}$ convient.

Dans le cas contraire, le choix $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ convient, puisqu'alors $x^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$.

CHAPITRE 3

# Ensembles (énoncés)

Aller aux corrigés 4

## 1. Ensembles

**Exercice 10**

Décrire simplement les ensembles suivants : $\{x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, x \leqslant \varepsilon\}$, $\{x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, |x| \leqslant \varepsilon\}$, $\{x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, |x| < \varepsilon\}$.

**Exercice 11**

Décrire en extension $\mathcal{P}(\{a, b, c, d\})$ (où $a$, $b$, $c$ et $d$ sont des réels fixés), $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0, 1\}))$. Combien ces ensembles ont-ils d'éléments ?

**Exercice 12**

Soit $A$ et $B$ deux ensembles. Montrer que

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B),$$

mais que l'on peut avoir

$$\mathcal{P}(A \cup B) \neq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B).$$

**Exercice 13**

Soit $E$ un ensemble et $A, B, C$ trois parties de $E$ telles que $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. Montrer que $B = C$.
**Indication :** dans ce type d'exercice, vous pouvez rester au niveau des ensembles (ne manipuler que les ensembles, sans mentionner leurs éléments), ou revenir à leurs (éventuels) éléments.

## 2. Relations binaires

### Exercice 14

**1** Donner une relation d'ordre total sur $\mathbb{C}$.

**2** Montrer que $\mathbb{C}$ n'admet pas de *structure de corps totalement ordonné*, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de relation d'ordre total sur $\mathbb{C}$ compatible avec les opérations du corps des nombres complexes.

**3** Donner un ordre partiel sur $\mathbb{C}$ compatible avec les opérations sur $\mathbb{C}$.

### Exercice 15

Soit $E$ un ensemble, $F = \mathbb{R}^E$. On introduit une relation $\preccurlyeq$ sur $F$ par

$$\forall (f,g) \in F^2, \quad (f \preccurlyeq g) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leqslant g(x)) \, .$$

**1** Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre.

**2** L'ordre défini est-il total ?

**3** Soit $f \in F$. Les assertions « $f$ est majorée » et « $\{f\}$ est majorée » sont-elles équivalentes ?

**4** Soit $f, g \in F$. L'ensemble $\{f, g\}$ admet-il un plus grand élément ? une borne supérieure ?

**5** Montrer que toute partie non vide et majorée de $F$ admet une borne supérieure.

### Exercice 16

On rappelle qu'une *relation d'équivalence* sur un ensemble $E$ est une relation binaire réflexive, symétrique et transitive sur $E$. Pour une telle relation $\sim$, et $x$ élément de $E$, on appelle *classe d'équivalence* de $x$ (pour la relation $\sim$) l'ensemble des éléments de $E$ équivalents à $x$.

**1** Montrer que la relation sur $\mathbb{R}$ définie par

$$(x \mathcal{R} y) \Leftrightarrow (x^2 - y^2 = x - y),$$

pour tous réels $x$ et $y$, est une relation d'équivalence, et déterminer les classes d'équivalence pour cette relation.

**2** Montrer que la relation $\sim$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ définie par

$$(f \sim g) \Leftrightarrow \left(\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_{|[-\varepsilon,\varepsilon]} = g_{|[-\varepsilon,\varepsilon]}\right) ,$$

pour tout $(f,g) \in \left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right)^2$, est une relation d'équivalence.

**3** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la relation de congruence modulo $n$ est une relation d'équivalence. Dénombrer les classes d'équivalence. pour cette relation.

**4** Soit $\nabla$ la relation définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x \nabla y) \Leftrightarrow \left((x^3+2)(y^2+1) = (y^3+2)(x^2+1)\right) .$$

Montrer que $\nabla$ est une relation d'équivalence, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, trouver le cardinal de la classe d'équivalence de $x$.

Exercice 17

On introduit une relation $\preccurlyeq$ sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall((x,y),(x',y')) \in (\mathbb{R}^2)^2, \quad ((x,y) \preccurlyeq (x',y')) \Leftrightarrow (|x'-x| \leqslant y'-y)\,.$$

**1** Montrer que l'on définit ainsi une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.

**2** L'ordre défini est-il total ?

**3** Montrer que le disque unité fermé admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}^2$, et déterminer celle-ci. Ce disque admet-il un plus grand élément ?

### 3. Généralités sur les applications

Les lettres $E, F, G$ désignent des ensembles.

Exercice 18

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

**1** Montrer que si $g \circ f$ est injective et $f$ surjective, alors $g$ est injective.

**2** Montrer que si $g \circ f$ est surjective et $g$ injective, alors $f$ est surjective.

Exercice 19

On dit qu'une application $f : E \to F$ est inversible à gauche (resp. inversible à droite) s'il existe une fonction $g : F \to E$ (resp. $h : F \to E$) telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ (resp. $f \circ h = \mathrm{Id}_F$). On dit que $f$ est inversible si elle est inversible à gauche et à droite.

**1** Montrer que si $f$ est inversible à gauche d'inverse $g$ et inversible à droite d'inverse $h$, alors $g = h$.

**2** Montrer que $f$ est bijective si et seulement si elle est inversible.

**3** Montrer que si $f : E \to E$ est une involution (*i.e.* $f \circ f = \mathrm{Id}_E$), alors elle est bijective, et donner sa bijection réciproque.

**4** Montrer plus généralement que si $f : E \to E$ vérifie $f^n = \mathrm{Id}_E$ ($f$ composée $n$ fois) pour un certain entier naturel $n \geqslant 2$, alors $f$ est bijective, et donner sa bijection réciproque.

**5** Donner un exemple d'application admettant un inverse à droite mais pas à gauche (resp. un inverse à gauche mais pas à droite).

Exercice 20

Soit $I$ un intervalle centré en 0, $f$ une application de $I$ dans $\mathbb{R}$.

**1** Montrer que $f$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire $f_p$ et d'une fonction impaire $f_i$, appelées respectivement partie paire et partie impaire de $f$.

**2** Que dire des applications partie paire et partie impaire ainsi définies de $\mathbb{R}^I$ dans lui-même ?

**Exercice 21**

Soit $f : E \to F$, $g : E \to G$ deux applications. On considère l'application $h$ de $E$ dans $F \times G$, définie par : $h(x) = (f(x), g(x))$, pour tout $x \in E$.

**1** Montrer que si $f$ ou $g$ est injective, alors $h$ est injective.

**2** On suppose $f$ et $g$ surjectives. L'application $h$ est-elle nécessairement surjective ?

**Exercice 22**

Soit $f$ une application de $E$ dans $F$. Établir l'équivalence des assertions suivantes :

(1) $f$ est surjective ;

(2) $\forall\, y \in F, \quad f\left(f^{-1}(\{y\})\right) = \{y\}$ ;

(3) $\forall\, Y \in \mathcal{P}(F), \quad f\left(f^{-1}(Y)\right) = Y$ ;

(4) $\forall\, Y \in \mathcal{P}(F), \quad (f^{-1}(Y) = \emptyset) \Rightarrow (Y = \emptyset)$.

## 4. Raisonnement par récurrence

**Exercice 23**

**1** Montrer qu'il existe une unique suite $(u_n)$ de nombres réels telle que $u_0 = 1$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{-1}{1 + u_n}.$$

**2** Même question pour les conditions $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = 1 + \ln(v_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**3** Même question pour les conditions $w_0 = 0$ et $w_{n+1} = \sqrt{2 - w_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 24**

**1** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

**2** Soit $x \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $p \in \mathbb{N}^*$ divise $x^2 - x$, alors $p$ divise $x^n - x$.

**3** Montrer que pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{N}$, le nombre $m^{2r+1} + n^{2r+1}$ est divisible par $m + n$.

**4** Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 2$, et

$$u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que pour tout entier naturel, $u_n = n(n-1)$.

**5** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n\, n!}.$$

Exercice 25

Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2, on formule l'hypothèse de récurrence suivante (appelée *inégalité arithmético-géométrique* pour $n$ réels positifs) :

$$(\mathcal{H}_n) : \quad \forall (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n, \quad \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

(1) Montrer $\mathcal{H}_2$ ;

(2) Montrer, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'implication $\mathcal{H}_n \Rightarrow \mathcal{H}_{n-1}$ ;

(3) Montrer, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'implication $(\mathcal{H}_n \wedge \mathcal{H}_2) \Rightarrow \mathcal{H}_{2n}$ ;

(4) En déduire que $\mathcal{H}_n$ est vraie, pour tout $n \geqslant 2$.

CHAPITRE 4

# Ensembles (corrigés)

Aller aux énoncés 3

## 1. Ensembles

**Corrigé 10** (Description d'ensembles)

$\{x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, x \leqslant \varepsilon\} = \mathbb{R}_-$, $\{x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, |x| \leqslant \varepsilon\} = \{0\}$, $\{x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, |x| < \varepsilon\} = \{0\}$.

**Corrigé 11** (Ensemble des parties d'un ensemble)

$$\mathcal{P}(\{a,b,c,d\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,c,d\}, \{a,b,d\}, \{b$$

Comme $\mathcal{P}(\{0,1\})$ a quatre éléments, à savoir $\emptyset$, $\{0\}$, $\{1\}$ et $\{0,1\}$, il suffit de les nommer respectivement $a$, $b$, $c$ et $d$ pour se ramener au cas précédent :

$$\mathcal{P}(\{a,b,c,d\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{0\}\}, \{\{1\}\}, \{\{0,1\}\}, \{\emptyset, \{0\}\}, \{\emptyset, \{1\}\}, \{\emptyset, \{0,1\}\}, \{\{0\}, \{1\}\}, \{\{0\}, \{0,1\}\}, \{\{1$$

**Corrigé 12** (Relations ensemblistes entre ensembles de parties)

Comme $A \cap B$ est une partie de $A$ et de $B$, $\mathcal{P}(A \cap B)$ est inclus dans $\mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}(B)$, donc dans leur intersection.

Réciproquement, si $X$ est une partie de $A \cap B$, alors c'est clairement une partie de $A$ et de $B$.

Concernant l'union, l'inclusion indirecte est toujours vérifiée, mais si $A$ et $B$ ne sont pas comparables pour l'inclusion, *i.e.* si $B \setminus A$ et $A \setminus B$ possèdent des éléments respectifs $b$ et $a$, alors $\{a,b\}$ est un élément de $\mathcal{P}(A \cup B)$, mais pas de $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

**Corrigé 13** (Manipulations ensemblistes)

**Première rédaction** Soit $x \in B$. Si $x \in A$, alors $x \in A \cap B = A \cap C$, donc $x \in C$.

Si $x \notin A$, alors $x \in A \cup B = A \cup C$, donc $x$ appartient à $A$ ou à $C$, puis à $C$.

Par conséquent, $B \subset C$. Par symétrie des rôles joués par $B$ et $C$, on a l'inclusion réciproque, puis $B = C$.

**Seconde rédaction**

$$B = (A \cap B) \cup (B \setminus A) = (A \cap C) \cup ((A \cup B) \setminus A) = (A \cap C) \cup ((A \cup C) \setminus A) = (A \cap C) \cup (C \setminus A) = C.$$

## 2. Relations binaires

### Corrigé 14 (Structure de corps ordonné et nombres complexes)

**1** On peut par exemple proposer l'ordre lexicographique (en ayant identifié $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$).

**2** Supposons disposer d'un tel ordre. Le produit de deux nombres positifs serait positif, donc tout carré $z^2$ serait positif (car $z \geqslant 0$ ou $-z \geqslant 0$), puis tout complexe serait positif. En particulier, $0 \leqslant -1$, donc $1 \leqslant 0$ en ajoutant 1, et, par ailleurs, $0 \leqslant 1$, d'où l'absurdité $0 = 1$.

**3** On peut proposer l'ordre produit sur $\mathbb{C}$ (identifié à $\mathbb{R}^2$), ou l'égalité.

### Corrigé 15 (Une relation d'ordre sur un ensemble de fonctions)

**1** Facile (provient des mêmes propriétés pour l'ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$.

**2** Pour $E = \mathbb{R}$, $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, la première propriété est vérifiée (elle l'est pout toute fonction $f \in F$), la seconde ne l'est pas.
**Remarque :** si $E$ est fini, les deux assertions sont équivalentes, puisqu'elles sont vraies.

**3** $f$ et $g$ ne sont pas nécessairement comparables (considérer des fonctions caractéristiques d'ensembles non comparables pour l'inclusion), donc $\{f, g\}$ n'a pas toujours de plus grand élément. En revanche, $\{f, g\}$ admet $x \mapsto \max(f(x), g(x))$ pour borne supérieure.

**4** Cela résulte essentiellement de la même propriété pour $\mathbb{R}$.

### Corrigé 16 (Relations d'équivalence)

**1** Vérifications aisées (on peut aussi utiliser un argument fonctionnel comme à la dernière question).

**2** Réflexivité et symétrie sont claires. Pour la transitivité, supposons avoir $f \sim g$ et $g \sim h$ : soit $\varepsilon_1$ et $\varepsilon_2$ des réels strictement positifs tels que $f_{|[-\varepsilon_1,\varepsilon_1]} = g_{|[-\varepsilon_1,\varepsilon_1]}$ et $g_{|[-\varepsilon_2,\varepsilon_2]} = h_{|[-\varepsilon_2,\varepsilon_2]}$. En prenant $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, qui est bien strictement positif, on a bien

$$f_{|[-\varepsilon,\varepsilon]} = h_{|[-\varepsilon,\varepsilon]},$$

donc $f \sim h$.

**3** Bien connu.

**4** Introduisons la fonction $f \ : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{x^3+2}{x^2+1}$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$x \nabla y \Leftrightarrow f(x) = f(y).$$

Cette réécriture permet de montrer immédiatement la réflexivité, la symétrie, et la transitivité.
Pour répondre à la dernière question, faire une étude de variations de la fonction $f$ (et un dessin).

### Corrigé 17 (Un calcul de borne supérieure)

**1** Les vérifications sont simples, la transitivité résultant de l'inégalité triangulaire.

**2** L'ordre est partiel : $(0, 0)$ et $(1, 0)$ par exemple ne sont pas comparables.

**3** Pour avoir des pistes pour cette question, on pourra représenter, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ fixé, l'ensemble

$$\{(z, t) \in \mathbb{R}^2, (z, t) \preccurlyeq (x, y)\}$$

### 3. Généralités sur les applications

Les lettres $E, F, G$ désignent des ensembles.

Corrigé 18 (Composition, injectivité, surjectivité)

**1** Supposons $g \circ f$ injective et $f$ surjective. Soit $y, y' \in F$ tels que $g(y) = g(y')$. Comme $f$ est surjective, il existe $x, x' \in E$ tels que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$, de sorte que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$, puis $x = x'$ par injectivité de $g \circ f$. Dès lors, $y = y'$ en appliquant $f$ : $g$ est injective.

**2** Supposons $g \circ f$ surjective et $g$ injective. Comme $g \circ f$ est surjective, $g$ l'est également (cf. le cours). $g$ est donc bijective, puis, comme $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$, $f$ est surjective comme composée de telles fonctions.

Corrigé 19 (Inverse à droite, inverse à gauche)

**1** Dans un tel cas, on a en effet d'une part

$$g \circ f \circ h = (g \circ f) \circ h = \mathrm{Id}_E \circ h = h,$$

et, d'autre part,

$$g \circ f \circ h = g \circ (f \circ h) = g \circ \mathrm{Id}_F = g,$$

donc $g = h$.

**2** Si $f$ est bijective, alors $f^{-1}$ (qui existe bien), est inverse à gauche et à droite de $f$.

Réciproquement, si $f$ est inversible à gauche et à droite, d'inverse $g$, alors $g \circ f$ est injective (c'est $\mathrm{Id}_E$), donc $f$ l'est aussi, et $f \circ g$ est surjective (c'est $\mathrm{Id}_F$), donc $f$ l'est également. En conclusion, $f$ est bijective.

**3** Dans un tel cas, $f$ s'admet elle-même pour inverse, donc $f^{-1}$ existe et vaut $f$.

**4** Dans un tel cas, $f$ admet $f^{n-1}$ pour inverse, donc $f^{-1}$ existe et vaut $f^{n-1}$.

**5** À trouver soi-même.

Corrigé 20 (Parties paire et impaire d'une fonction)

**1** Faire un raisonnement par analyse-synthèse.

**2** Ces applications sont de somme l'identité (sur $\mathbb{R}^I$), et sont idempotentes (*i.e.* égales à leur composée deux fois).

Corrigé 21 (Produit cartésien, injectivité, surjectivité)

**1** Supposons par exemple $f$ injective (le raisonnement est le même s'il s'agit de $g$). Soit $x, x' \in E$ tels que $h(x) = h(x')$, *i.e.* $(f(x), g(x)) = (f(x'), g(x'))$. En particulier, $f(x) = f(x')$, puis $x = x'$ par injectivité de $f$, d'où l'injectivité de $h$.

**2** La réponse est non, l'exemple de $f = g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ suffit pour s'en convaincre.

Corrigé 22 (Caractérisations de la surjectivité)

Montrons ces équivalences par implications cycliques :

**De 1. vers 2.** Supposons $f$ surjective, soit $y \in F$. Par hypothèse, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, *i.e.* tel que $x \in f^{-1}(\{y\})$ : on a $\{x\} \subset f^{-1}(\{y\})$, d'où, en prenant les images directes par $f$ : $\{y\} = f(\{x\}) \subset f(f^{-1}(\{y\}))$.

L'inclusion réciproque étant évidente, et non liée à la surjectivité (en effet : soit $z \in f(f^{-1}(\{y\}))$. Il existe $x \in f^{-1}(\{y\})$ tel que $z = f(x)$. Or $x \in f^{-1}(\{y\})$ signifie $f(x) = y$, donc $z = y$.), on a bien l'égalité ensembliste.

**De 2. vers 3.** Supposons 2., et exploitons le bon comportement de la réunion avec images directes et réciproques : soit $Y$ une partie de $F$. Écrivons $Y = \cup_{y\in Y}\{y\}$ (par convention, une union indexée par l'ensemble vide est vide). On a

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(Y)) &= f\left(f^{-1}\left(\bigcup_{y\in Y}\{y\}\right)\right) \\ &= f\left(\bigcup_{y\in Y} f^{-1}(\{y\})\right) \\ &= \bigcup_{y\in Y} f(f^{-1}(\{y\})) \\ &= \bigcup_{y\in Y}\{y\} \text{ (par hypothèse 2.)} \\ &= Y. \end{aligned}$$

d'où l'implication de 2. vers 3..

**De 3. vers 4.** Supposons 3., et soit $Y$ une partie de $F$ telle que $f^{-1}(Y) = \emptyset$. En prenant les images directes par $f$, il vient $f(f^{-1}(Y)) = f(\emptyset) = \emptyset$, d'où $Y = \emptyset$ par hypothèse 3. : 4. est vérifiée.

**De 4. vers 1.** Supposons 4., et soit $y \in F$. Comme $\{y\}$ n'est pas vide, 4. permet d'affirmer que $f^{-1}(\{y\})$ ne l'est pas non plus, donc $y$ admet au moins un antécédent par $f$. Ceci valant pour tout $y \in F$, $f$ est bien surjective.

L'équivalence de ces assertions est donc prouvée.

## 4. Raisonnement par récurrence

Corrigé 23 (Suite récurrente bien définie)

**1** On peut choisir $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ (plus grande partie stable convenable), ou $\{1, -1/2, -2\}$ (plus petite partie stable convenable).

**2** Prendre par exemple l'intervalle $[1, +\infty[$.

**3** L'intervalle $[0,2]$ comprend $w_0 (= 0)$ et est stable par la fonction de récurrence $x \mapsto \sqrt{2-x}$ : il existe donc bien une unique telle suite $(w_n)$.

Corrigé 24 (Raisonnement par récurrence)

**1**

**2**

**3**

**4**

**5** On peut montrer ce résultat par récurrence, ou en utilisant le symbole de produit : pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(2n+1)! = \prod_{k=0}^{n}(2k+1)\prod_{k=1}^{n}(2k) = 2^n\, n! \prod_{k=0}^{n}(2k+1),$$

d'où le résultat en divisant par le réel non nul $2^n\, n!$.

Corrigé 25 (Inégalité arithmético-géométrique : une preuve de Cauchy)

CHAPITRE 5

# Nombres complexes (énoncés)

Aller aux corrigés 6

## 1. Nombres complexes et géométrie

**Exercice 26**

Donner les expressions complexes de la translation de vecteur $\vec{v}$ d'affixe $3+i$, de la rotation de centre $\Omega$ d'affixe $2-i$, d'angle de mesure $\pi/3$, de la similitude directe de centre $\Omega'$ d'affixe $1+3i$, d'angle de mesure $\pi/4$, de rapport $\sqrt{2}$.

**Exercice 27**

Reconnaître la transformation du plan complexe donnée par son expression analytique

$$z \mapsto (\sqrt{3}-i)z - 2 + 2i(1-\sqrt{3}).$$

**Exercice 28**

Soit $a$ et $b$ deux complexes distincts, et soit $\lambda$ un réel strictement positif. Décrire l'ensemble $C_\lambda$, où :

$$C_\lambda = \{z \in \mathbb{C}, \quad |z-b| = \lambda|z-a|\}.$$

**Exercice 29**

Soit $a, b, c$ des nombres complexes distincts deux à deux, d'images respectives A,B,C. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) ABC est un triangle équilatéral ;

(2) $j$ ou $j^2$ est solution de $az^2+bz+c=0$ ;

(3) $a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ca$ ;

(4) $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}=0$.

**Exercice 30**

Montrer qu'il existe des cercles du plan contenant un nombre arbitrairement grand de points à coordonnées entières.

## 2. Module, argument, forme exponentielle

**Exercice 31**

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que si $|z| = 1$, alors $|1 + z| \geqslant 1$ ou $|1 + z^2| \geqslant 1$.

**Exercice 32**

Déterminer l'ensemble $\left\{n \in \mathbb{N}, \left(\frac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}\right)^n \in \mathbb{R}_+\right\}$.

**Exercice 33**

Soit $a$, $b$, $c$ trois éléments distincts de $[0, 2\pi[$. Calculer l'argument de $\frac{e^{ic}-e^{ib}}{e^{ic}-e^{ia}}$. Interprétation géométrique ?

**Exercice 34**

Soit $a$, $b$, $c$, $d$ des complexes distincts. On suppose que $\frac{d-a}{b-c}$ et $\frac{d-b}{a-c}$ sont imaginaires purs.

**1** Montrer que $\frac{d-c}{a-b}$ est imaginaire pur.

**2** On suppose que $|a| = |b| = |c| = 1$. Exprimer $d$ en fonction de $a$, $b$ et $c$.

**Exercice 35**

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $|a| = |b| = |c| = 1$ et $a \neq c$. Montrer : $\frac{a}{b}\frac{(c-b)^2}{(c-a)^2} \in \mathbb{R}^+$.

**Exercice 36**

Condition nécessaire et suffisante pour que $e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0$ ?

## 3. Trigonométrie

**Exercice 37**

Linéariser les expressions suivantes, dépendant de la variable réelle $x$ : $\cos(x)^4$, $\sin(x)^5$, $\cos(x)^3 \sin^2(x)$.

**Exercice 38**

Résoudre l'équation $\cos(3x) - 2\cos(2x) = 0$, d'inconnue réelle $x$.

Exercice 39

Exprimer comme un polynôme de la fonction cosinus la fonction $f$ définie par $f(2k\pi) = 6$ et $f((2k+1)\pi) = -6$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et, pour tout réel $x \notin \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, par

$$f(x) = \frac{\sin 6x}{\sin x}.$$

Exercice 40

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Déterminer un réel $A > 0$ et un réel $\theta_0$ de sorte que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad a\cos\theta + b\sin\theta = A\cos(\theta - \theta_0).$$

Exercice 41

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout réel $x$, calculer :

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) \quad \text{et} \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx).$$

Exercice 42

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes $A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$.

Exercice 43

Calculer $\cos\frac{\pi}{13} + \cos\frac{3\pi}{13} + \cdots + \cos\frac{11\pi}{13}$.

## 4. Racines de l'unité

Exercice 44

Déterminer les racines cubiques de $\sqrt{3} - i$ et de $\frac{i+\sqrt{3}}{i-\sqrt{3}}$.

Exercice 45

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left| e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 \right|$.

**Exercice 46**

Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$$z^{2n} - 2z^n \cos(na) + 1 = 0.$$

**Exercice 47**

Calculer $\prod_{k=1}^{n-1}(1 - e^{2ik\pi/n})$ où $n \geqslant 2$.

**Exercice 48**

Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que $z$ et ses racines cubiques forment dans le plan un parallélogramme.

**Exercice 49**

Soit
**1** Montrer que $\mathbb{U}_{12} = \mathbb{U}_3\mathbb{U}_4 = \{zz', (z, z') \in \mathbb{U}_3 \times \mathbb{U}_4\}$.
**2** Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi \ : z \in \mathbb{U}_{12} \mapsto z^p \in \mathbb{U}_{12}$. À quelle condition $\varphi$ réalise-t-il une bijection ?

## 5. Équations algébriques

**Exercice 50**

Déterminer sous forme algébrique les racines carrées des nombres complexes suivants : $2i$, $3 - 4i$, $16 + 30i$.

**Exercice 51**

**1** Résoudre l'équation $z^2 - (4 + 2i)z + (11 + 10i) = 0$.
**2** Résoudre l'équation $(1 + i)z^2 - 4iz + 26 - 2i = 0$.

Exercice 52

**1** Résoudre l'équation
$$(1-i)z^3 + (-4+8i)z^2 + (3-25i)z + 30i = 0,$$
sachant qu'elle admet une solution réelle.

**2** Résoudre l'équation
$$z^3 - (5+3i)z^2 + (7+16i)z + 3 - 21i = 0,$$
sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure.

**3** Résoudre l'équation
$$z^6 + (2i-1)z^3 - 1 - i = 0.$$

CHAPITRE 6

# Nombres complexes (corrigés)

Aller aux énoncés 5

## 1. Nombres complexes et géométrie

Corrigé 26 (Donner les expressions complexes de similitudes)

Corrigé 27 (Transformation donnée par son expression analytique)

Corrigé 28 (Ligne de niveau complexe)

Corrigé 29 (Caractérisations des triangles équilatéraux)

**Supposons la première assertion :** le triangle $ABC$ étant équilatéral, on a : $\frac{c-a}{b-a} = e^{-i\pi/3}$ ou $\frac{c-a}{b-a} = e^{i\pi/3}$. Dans le premier cas, en observant que $e^{-i\pi/3} = -j$, on a $(c-a) = -j(b-a)$, et donc, puisque $1 + j + j^2 = 0$ :

$$aj^2 + jb + c = 0.$$

Dans le second cas, des calculs similaires conduisent à la relation $aj + bj^2 + c = 0$, soit encore $aj^4 + bj^2 + c = 0$ (rappelons que $j$ est une racine cubique de l'unité).

Ceci montre l'implication de (1) vers (2).

**Supposons la deuxième assertion :** on a $aj^2 + jb + c = 0$ ou $aj + bj^2 + c = 0$, soit :

$$(aj^2 + jb + c)(aj + bj^2 + c) = 0,$$

d'où, en développant (et car $j^3 = 1$) :

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab(j + j^2) + ac(j + j^2) + bc(j + j^2) = 0,$$

puis, sachant que $j + j^2 = -1$ :

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac.$$

L'implication de (2) vers (3) est donc prouvée.

**Supposons** (3)**.** De simples calculs (licites car $a$, $b$ et $c$ sont distincts deux à deux) donnent :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} &= \frac{(b-c)(c-a) + (a-b)(c-a) + (a-b)(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\
&= \frac{-ab + ac + bc - c^2 - a^2 + ab + ac - bc - b^2 + bc + ab - ac}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\
&= \frac{ab + ac + bc - a^2 - b^2 - c^2}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\
&= 0 \text{ d'après (3).}
\end{aligned}$$

L'assertion (3) entraîne (4).

**Supposons enfin** (4)**.** En multipliant la relation (4) par $(b-c)(c-a)$, il vient :

$$\frac{(b-c)(c-a)}{a-b}+(c-a)+(b-c)=0,$$

puis

$$(b-c)(c-a)=(a-b)^2.$$

En égalant les modules, on obtient $AB^2=AC\cdot BC$. De même, en multipliant la relation (4) par $(a-b)(b-c)$, on obtient $AC^2=AB\cdot BC$. Ces deux relations conduisent aisément à la conclusion que $AB=AC$. Par symétrie des rôles joués par $a$, $b$, $c$ dans (4), on a $AB=AC=BC$ : le triangle $ABC$ est équilatéral, (1) est une conséquence de (4).

L'équivalence de ces quatre assertions est bien démontrée (par implications cycliques).

Corrigé 30 (Points à coordonnées entières sur un cercle)

## 2. Module, argument, forme exponentielle

Corrigé 31 (Inégalités de modules)

**Démonstration avec la forme neutre.** Soit $z\in\mathbb{U}$. En revenant au lien entre module et conjugaison,

$$|1+z|^2=(1+z)(1+\bar{z})=1+2\Re(z)+|z|^2.$$

L'inégalité $|1+z|\geqslant 1$ a donc lieu si et seulement si $\Re(z)\geqslant -\frac{1}{2}$.

Observons que

$$2|\Re(z)|=|z+\bar{z}|=|\bar{z}||1+z^2|=|1+z^2|.$$

L'inégalité $|1+z^2|\geqslant 1$ a donc lieu si et seulement si $|\Re(z)|\geqslant\frac{1}{2}$.

Comme tout réel $x$ vérifie $x\geqslant-\frac{1}{2}$ ou $|x|\geqslant\frac{1}{2}$, on a bien

$$\boxed{|1+z|\geqslant 1 \text{ ou } |1+z^2|\geqslant 1.}$$

**Démonstration avec la forme algébrique.** soit $z=a+ib$ un nombre complexe de module 1, mis sous forme algébrique. L'inégalité $|1+z|\geqslant 1$ a lieu si et seulement si $(1+a)^2+b^2\geqslant 1$, soit $2a+a^2+b^2\geqslant 0$, ou encore $a\geqslant-\frac{1}{2}$.

On a

$$|1+z^2|=|1+a^2-b^2+2iab|=|2a^2+2iab|=2|a||a+ib|=2|a|,$$

donc l'inégalité $|1+z^2|\geqslant 1$ a lieu si et seulement si $|a|\geqslant 1/2$.

Comme $a\geqslant-\frac{1}{2}$ ou $|a|\geqslant\frac{1}{2}$, on a bien $\boxed{|1+z|\geqslant 1 \text{ ou } |1+z^2|\geqslant 1.}$

**Démonstration géométrique.** Soit $z\in\mathbb{U}$, $M$ son image dans le plan. Notons $\theta$ l'argument principal de $z$ (*i.e.* $\theta$ est l'argument de $z$ appartenant à $]-\pi,\pi]$). Affirmer $|1+z|\geqslant 1$, c'est affirmer que $|1+z|\geqslant|z|$, ou encore que $M$ soit plus proche de l'origine que du point $I$ d'affixe $-1$. Sachant que $z$ est de module 1, cela revient à dire que $\theta\in\left[-\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$.

Lorsque cette condition n'est pas satisfaite, par exemple si $\theta\in\left]\frac{2\pi}{3},\pi\right]$, alors $2\theta\in\left]\frac{4\pi}{3},2\pi\right]$, et donc le point d'affixe $z^2$ est plus proche de l'origine que de $I$ : $|1+z^2|\geqslant|z^2|=1$. De même si $\theta\in\left]-\pi,-\frac{2\pi}{3}\right[$. Dans tous les cas, on a bien $\boxed{|1+z|\geqslant 1 \text{ ou } |1+z^2|\geqslant 1.}$

Corrigé 32 (Ensemble d'entiers déterminé par une condition complexe)

La forme trigonométrique s'impose clairement pour traiter ce type d'exercice. On a

$$1-i\sqrt{3}=2e^{-i\pi/3}\qquad\text{et}\qquad 1-i=\sqrt{2}e^{-i\pi/4},$$

donc,

$$\frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^5}{(1-i)^3} = \frac{2^5 e^{-5i\pi/3}}{\sqrt{2}^3 e^{-3i\pi/4}} = \sqrt{2}^7 e^{-11i\pi/12}$$

Ainsi,

$$\frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^5}{(1-i)^3} = 8\sqrt{2}e^{-11i\pi/12},$$

donc

$$\arg\left(\frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^5}{(1-i)^3}\right)^n \equiv -\frac{11n\pi}{12}\ [2\pi],$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Rappelons qu'un nombre complexe $z$ est réel strictement positif si et seulement si $\arg z \equiv 0\ [2\pi]$.

L'ensemble cherché est donc $\boxed{24\,\mathbb{N} = \{24k,\ k \in \mathbb{N}\}.}$

Corrigé 33 (X MP 08)

Corrigé 34 (X MP 08)

Corrigé 35 (X MP 05)

**Démonstration géométrique.** On note $A$, $B$ et $C$ les points d'affixes respectives $a$, $b$ et $c$. D'après le théorème de l'angle au centre,

$$2(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})\ [2\pi]$$

or $2(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})$ est un argument de $((b-c)/(a-c))^2$, et $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$ est un argument de $b/a$, donc le quotient est un réel positif : $\boxed{\frac{a}{b}\frac{(c-b)^2}{(c-a)^2} \in \mathbb{R}_+^*.}$

**Démonstration avec la forme trigonométrique.** On écrit $a = e^{i\alpha}$, $b = e^{i\beta}$ et $c = e^{i\gamma}$ pour certains réels $\alpha, \beta, \gamma$ (non congrus modulo $2\pi$). En utilisant la méthode de **??** page **??**,

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}\frac{(c-b)^2}{(c-a)^2} &= \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}}\left(\frac{e^{i\gamma}-e^{i\beta}}{e^{i\gamma}-e^{i\alpha}}\right)^2 = \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}}\frac{e^{i(\gamma+\beta)}}{e^{i(\gamma+\alpha)}}\left(\frac{2i\sin((\gamma-\beta)/2)}{2i\sin((\gamma-\alpha)/2)}\right)^2 \\ &= \frac{\sin^2((\gamma-\beta)/2)}{\sin^2((\gamma-\alpha)/2)} \in \mathbb{R}_+^*\end{aligned}$$

**Remarque :** on peut montrer facilement que $\frac{a}{b}\frac{(c-b)^2}{(c-a)^2}$ est réel en utilisant la forme neutre. En effet, on se rappelle qu'un nombre complexe $z$ est réel si et seulement si $z = \bar{z}$, et qu'il est de module 1 si et seulement si $z\bar{z} = 1$. Comme $a$, $b$, $c$ sont de module 1,

$$\frac{a}{b}\frac{(c-b)^2}{(c-a)^2} = \frac{\bar{a}^{-1}}{\bar{b}^{-1}}\frac{\left(\bar{c}^{-1}-\bar{b}^{-1}\right)^2}{\left(\bar{c}^{-1}-\bar{a}^{-1}\right)^2} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}}\frac{(\bar{c}-\bar{b})^2}{(\bar{c}-\bar{a})^2} = \overline{\left(\frac{a}{b}\frac{(c-b)^2}{(c-a)^2}\right)},$$

donc $\frac{a}{b}\frac{(c-b)^2}{(c-a)^2} \in \mathbb{R}$.

La forme algébrique ne semble pas, quant à elle, indiquée.

Corrigé 36 (Mines MP 07)

Notons $P$, $Q$ et $R$ les points d'affixes respectives $e^{ix}$, $e^{iy}$ et $e^{iz}$. L'origine $O$ du repère est le centre du cercle circonscrit au triangle $PQR$. Le centre de gravité $G$ de ce triangle est d'affixe $\frac{e^{ix}+e^{iy}+e^{iz}}{3}$. Ainsi, $e^{ix}+e^{iy}+e^{iz} = 0$ si et seulement si $G$ et $O$ sont confondus, *i.e.* les médianes

et les médiatrices sont confondues *i.e.* chaque sommet de ce triangle se trouve sur la médiatrice du segment opposé, soit encore $PQR$ est isocèle en chacun de ses sommets, soit enfin $PQR$ est équilatéral.
**Remarque :** on a écarté le cas d'un « faux » triangle, *i.e.* lorsque $P, Q, R$ ne sont pas distincts deux à deux, auquel cas l'égalité n'est jamais vérifée.
**Remarque :** Une autre condition nécessaire et suffisante est que $e^{ix}$, $e^{iy}$ et $e^{iz}$ soient les trois racines cubiques d'un même nombre complexe de module 1.

## 3. Trigonométrie

Corrigé 37 (Exemples de linéarisation)

Corrigé 38 (Équation trigonométrique)

Pour se ramener à une équation polynomiale en $\cos(x)$, on utilise la formule de Moivre :

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \Re(e^{3ix}) = \Re((e^{ix})^3) = \Re((\cos(x) + i\sin(x))^3) \\ &= \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x),\end{aligned}$$

et $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$. Nous cherchons donc les réels $x$ tels que

$$4\cos^3(x) - 4\cos^2(x) - 3\cos(x) + 2 = 0.$$

On remarque que $1/2$ est racine [1] de $4X^3 - 4X^2 - 3X + 2$ : il existe des réels $a$, $b$ et $c$ tels que

$$4X^3 - 4X^2 - 3X + 2 = (2X - 1)(aX^2 + bX + c).$$

Après identification, on trouve $a = 2$, $c = -2$ et $b = -1$. Les racines du polynôme $2X^2 - X - 2$ sont $(1+\sqrt{17})/4$ et $(1-\sqrt{17})/4$. Cette première racine est strictement supérieure à 1, donc n'est le cosinus d'aucun réel. La seconde racine appartient bien à $[-1, 1]$, on peut donc choisir $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(\alpha) = (1 - \sqrt{17})/4$ (pour les érudits, on peut prendre $\alpha = \arccos((1 - \sqrt{17})/4)$).

Les solutions de $(\mathcal{E})$ sont donc les nombres de la forme $\boxed{\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } \pm\alpha + 2k\pi,}$ pour un certain entier relatif $k$.

Corrigé 39 (Polynôme de la fonction cosinus)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Après calculs,

$$\begin{aligned}\sin(6x) &= \mathrm{Im}((e^{ix})^6) \\ &= (\cos(x) + i\sin(x))^6 \\ &= 2\cos(x)(-1 + 2\cos(2x))(1 + 2\cos(2x))sin(x)\end{aligned}$$

de sorte que le choix

$$f(x) = 2\cos(x)(-1 + 2\cos(2x))(1 + 2\cos(2x)),$$

convienne si $x \notin \pi\mathbb{Z}$.

On observe que ce choix convient aussi dans le cas où $x \in \pi\mathbb{Z}$.

Corrigé 40 (Changement d'écriture d'une combinaison de cosinus et sinus)

Soit $A, \theta_0 \in \mathbb{R}$.
On a, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ :

$$A\cos(\theta - \theta_0) = (A\cos(\theta_0))\cos(\theta) + (A\sin(\theta_0))\sin(\theta).$$

1. voir page **??** pour une méthode de recherche des racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers.

Il suffit donc de trouver $(A, \theta_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} A\cos(\theta_0) &= a \\ A\sin(\theta_0) &= b \end{cases}$$

*i.e.* $Ae^{i\theta_0} = a+ib$ : la forme exponentielle de $a+ib$ nous donne donc le résultat : $A = \sqrt{a^2+b^2}(= |a+ib|)$ et $\theta_0$ est l'un des arguments de $a+ib$.

**Remarque :** en pratique, retenir qu'il faut factoriser par $\sqrt{a^2+b^2}$.

Corrigé 41 (Calculs de sommes trigonométrique)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.
Dans le cas où $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, on a bien sûr $C_n(x) = n+1$ et $S_n(x) = 0$.
Dans le cas où $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned} C_n(x) + iS_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} (e^{ix})^k \\ &= \frac{(e^{ix})^{n+1} - 1}{e^{ix} - 1} \\ &= \frac{e^{i\frac{(n+1)x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}} \cdot \frac{e^{i\frac{(n+1)x}{2}} - e^{-i\frac{(n+1)x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} \\ &= e^{i\frac{nx}{2}} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin(x/2)} \end{aligned}$$

En prenant les parties réelles, on trouve donc

$$C_n(x) = \cos(nx/2)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin(x/2)}$$

et, en prenant les parties imaginaires :

$$S_n(x) = \sin(nx/2)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin(x/2)}$$

Corrigé 42 (Sommes trigonométriques à coefficients binomiaux)

$$\begin{aligned} A_n + iB_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^{ix})^k \\ &= (1+e^{ix})^n \\ &= \left(e^{ix/2}(2\cos(x/2))\right)^n \\ &= 2^n \cos(x/2)^n e^{inx/2} \end{aligned}$$

En prenant les parties réelles, on trouve donc

$$A_n = 2^n \cos(x/2)\cos(nx/2)$$

et, en prenant les parties imaginaires :

$$B_n(x) = 2^n \cos(x/2)\sin(nx/2)$$

Corrigé 43 (X MP 07)

Notons $S$ la somme cherchée. En utilisant la formule d'Euler pour cosinus,

$$S = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{5}\left(e^{i(2k+1)\pi/13} + e^{-i(2k+1)\pi/13}\right).$$

Ainsi,

$$2S = \sum_{k=0}^{5} e^{i(2k+1)\pi/13} + \sum_{k=0}^{5} e^{-i(2k+1)\pi/13},$$

*i.e.* $2S$ est la somme des racines 13-ièmes de $-1$, à l'exception de $-1$. Or la somme des racines 13-ièmes de l'unité est nulle, donc la somme des racines 13-ièmes de $-1$ l'est également.

On a donc $S = 1/2$.

**Remarque :** on peut bien sûr retrouver ce résultat par un calcul simple.

## 4. Racines de l'unité

Corrigé 44 (Calculs de racines cubiques)

Comme $\sqrt{3}-i = 2e^{-i\pi/6}$, ses racines cubiques sont $2^{1/3}e^{-i\pi/18}$, $2^{1/3}e^{-i\pi/18}e^{2i\pi/3} = 2^{1/3}e^{11i\pi/18}$ et $2^{1/3}e^{-i\pi/18}e^{-2i\pi/3} = 2^{1/3}e^{-13i\pi/18}$.

Corrigé 45 (Somme de distances entre racines de l'unité)

Par l'astuce de l'angle moitié,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left|e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1\right| = \sum_{k=0}^{n-1} 2|\sin(k\pi/n)| = 2\sum_{k=0}^{n-1}\sin(k\pi/n).$$

Or, puisque $e^{i\pi/n} \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\pi/n} = \frac{(e^{i\pi/n})^n - 1}{e^{i\pi/n} - 1} = \frac{-2}{e^{i\pi/n} - 1} = \frac{-2e^{-i\pi/(2n)}}{\frac{1}{2i\sin(\pi/2n)}} = \frac{ie^{-i\pi/(2n)}}{\sin(\pi/2n)},$$

donc le résultat cherché vaut

$$\operatorname{cotan}(\pi/(2n))$$

Corrigé 46 (Équation complexe à paramètre)

$z \in \mathbb{C}$ est solution de l'équation proposée $\mathcal{E}$ si et seulement si $z^n$ est racine complexe de $X^2 - 2\cos(na)X + 1$.

Or ce polynôme a pour discriminant $\Delta = (-2\cos(na))^2 - 4 = -4\sin^2(na) = (2i\sin(na))^2$, donc il a pour racines $\frac{1}{2}(2\cos(na) \pm 2\sin(na))$, soit $e^{ina}$ et $e^{-ina}$.

Des racines $n$-ièmes évidentes de ces deux nombres sont $e^{ia}$ et $e^{-ia}$, donc les solutions cherchées sont les nombres complexes de la forme $e^{i\left(\pm a + \frac{2k\pi}{n}\right)}$, $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Corrigé 47 (Mines MP 08)

Soit $P(X) = X^n - 1$. On a $P(X) = \prod_{k=0}^{n-1}(X - e^{2ik\pi/n}) = (X-1)Q(X)$, où $Q(X) = \prod_{k=1}^{n-1}(X - e^{2ik\pi/n})$. Nous cherchons $Q(1)$.

On peut dériver la relation ci-dessus, obtenant

$$P'(X) = nX^{n-1} = (X-1)Q'(X) + Q(X),$$

puis l'évaluer en 1, afin de trouver $Q(1) = n$.

Corrigé 48 (X MP 07)

Corrigé 49 (Centrale PC 08)

**1** Soit $(z, z') \in \mathbb{U}_3 \times \mathbb{U}_4$. On a

$$(zz')^{12} = z^{12}(z')^{12} = (z^3)^4((z')^4)^3 = 1,$$

d'où l'inclusion indirecte.

Réciproquement, soit $Z \in \mathbb{U}_{12}$. Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $Z = e^{2ik\pi/12}$. On remarque que $1/12 = 1/3 - 1/4$, de sorte que

$$Z = e^{2ik\pi/3-2ik\pi/4} = e^{2ik\pi/3}e^{-2ik\pi}4.$$

En posant $z = e^{2ik\pi/3}$ et $z' = e^{-2ik\pi}4$, on a bien $Z = zz'$ et $(z, z') \in \mathbb{U}_3 \times \mathbb{U}_4$, d'où l'inclusion directe, puis l'égalité.

**2** Si $p$ est un multiple de 3, alors pour tout $z \in \mathbb{U}_12$, $z^p \in \mathbb{U}_4$ (puisqu'alors $4p$ est multiple de 12), donc $\varphi$ n'est pas bijective (elle n'est pas surjective). De même si $p$ est multiple de 2 (dans ce cas, l'image de $\varphi$ est incluse dans $\mathbb{U}_6$).

Pour que $\varphi$ soit bijective, il faut donc que $p$ et 12 soient premiers entre eux.

Si, réciproquement, tel est le cas, alors il existe des entiers $u$ et $v$ tels que $12u + pv = 1$. On vérifie alors que $\psi\ : z \in \mathbb{U}_{12} \mapsto z^v \in \mathbb{U}_{12}$ est bien inverse (à gauche et à droite) de $\varphi$, qui est donc bijective.

## 5. Équations algébriques

Corrigé 50 (Calculs de racines carrées)

On trouve respectivement $\pm(1 + i)$, $\pm(2 - i)$, $\pm(5 + 3i)$.

Corrigé 51 (Équations algébriques complexes)

**1**

**2** Remarquons d'abord que

$$\frac{-4i}{1+i} = -2 - 2i \quad \text{et} \quad \frac{26-2i}{1+i} = 12 - 14i.$$

Nous cherchons donc les racines du polynôme $X^2 - (2 + 2i)X + 12 - 14i$.

Le discriminant de ce polynôme est

$$\Delta = (-(2 + 2i))^2 - 4(12 - 14i) = 16(-3 + 4i) = (4(1 + 2i))^2,$$

donc ses racines sont

$$\frac{2 + 2i + 4(1 + 2i)}{2} = 3 + 5i \quad \text{et} \quad \frac{2 + 2i - 4(1 + 2i)}{2} = -1 - 3i$$

Les solutions de l'équation donnée sont $\boxed{3 + 5i \text{ et } -1 - 3i.}$

Corrigé 52 (Équations algébriques complexes plus compliquées)

**1**

**2** Un nombre imaginaire pur $ib$ ($b \in \mathbb{R}$) est solution de $\mathcal{E}$ si et seulement si :

$$-ib^3 + (5 + 3i)b^2 + i(7 + 16i)b + 3 - 21i = 0,$$

soit :

$$\begin{cases} 5b^2 - 16b + 3 = 0 \\ -b^3 + 3b^2 + 7b - 21 = 0 \end{cases}.$$

Le polynôme $5X^2-16X+3$ admet 3 et $1/5$ pour racines. On vérifie aisément que 3 est également racine de $-X^3+3X^2+7X-21$. Ainsi, $3i$ est solution de $\mathcal{E}$.

Il existe donc des nombres complexes $a, b, c$ tels que :

$$X^3-(5+3i)X^2+(7+16i)X+3-21i=(X-3i)(aX^2+bX+c)$$

Après identification, on trouve $a=1$, $c=7+i$, puis $b=-5$. Les deux autres solutions de $\mathcal{E}$ sont les racines de :

$$X^2-5X+7+i$$

Le discriminant de ce polynôme est : $\Delta=(-5)^2-4(7+i)=-3-4i$.

On cherche une racine carrée $\delta=x+iy$ de $\Delta$ $(x, y \in \mathbb{R})$. En suivant la méthode donnée en **??**, on obtient d'abord $x^2-y^2=-3$, puis $x^2+y^2=5$. Ainsi, $x=\pm 1$, $y=\pm 2$. Comme $2xy=-4<0$, on peut prendre $\delta=1-2i$.

Finalement, les deux autres solutions de $\mathcal{E}$ sont $\frac{5-(1-2i)}{2}=2+i$ et $\frac{5+(1-2i)}{2}=3-i$.

$\boxed{\text{Les solutions de } \mathcal{E} \text{ sont } 3i,\ 2+i \text{ et } 3-i.}$

**3** On change d'abord d'indéterminée, en posant $y=z^3$.

On cherche donc dans un premier temps les racines du polynôme

$$X^2+(2i-1)X-1-i.$$

Le discriminant de ce polynôme est $\Delta=(2i-1)^2+4(1+i)=1$, donc ses racines sont $-i$ et $1-i$.

Il nous reste à déterminer les racines cubiques de $-i$ et $1-i$ qui, par « chance », s'expriment facilement sous forme trigonométrique : $-i=e^{-i\pi/2}$ et $1-i=\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$. Pour obtenir les racines cubiques de ces nombres complexes, on en trouve une, et on la multiplie par les différentes racines cubiques de l'unité $1, j, j^2$ (où $j=e^{2i\pi/3}$).

Les solutions de l'équation considérée sont

$$e^{-i\pi/6}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}, je^{-i\pi/6}=e^{i\pi/2}=i, j^2e^{-i\pi/6}=e^{-5i\pi/6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$$

et

$$2^{\frac{1}{6}}e^{-i\frac{\pi}{12}}, 2^{\frac{1}{6}}e^{7i\frac{\pi}{12}}, 2^{\frac{1}{6}}e^{-3i\frac{\pi}{4}}.$$

En remarquant que $-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}$ et que $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}$, on peut donner les solutions de $\mathcal{E}$ sous forme algébrique :

$$\boxed{i, \frac{\sqrt{3}-i}{2}, -\frac{\sqrt{3}+i}{2}, -2^{-\frac{1}{3}}(1+i),}$$

et

$$\boxed{\frac{2^{1/6}}{4}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}+i(\sqrt{2}-\sqrt{6})\right), \frac{2^{1/6}}{4}\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}+i(\sqrt{6}+\sqrt{2})\right)}$$

CHAPITRE 7

# Techniques fondamentales (énoncés)

Aller aux corrigés 8

## 1. Utilisation des symboles de somme et de produit

**Exercice 53**

**1** Établir une formule pour $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$ valable pour chaque entier $n \geqslant 2$.
**2** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $1\,1! + 2\,2! + \cdots + n\,n! = (n+1)! - 1$.
**3** Évaluer, pour tout entier naturel $n$, la somme

$$S_n = \sum_{\{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N},\, p+q\leqslant n\}} (p+q).$$

**4** Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2. Trouver une formule pour $\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i}\right)$.
**5** De même pour $\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)$.
**6** Soit $n$ un entier naturel. Calculer $\displaystyle\sum_{i+j=n} \min(\{i,j\})$, $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \min(\{i,j\})$ et $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \min(\{i,j\})$.
**7** Soit $n$ un entier naturel. Calculer $\displaystyle\sum_{i+j=n} ij$.

**Exercice 54**

**1** Montrer de deux manières que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
**2** Montrer de deux manières que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
**3** Trouver une formule analogue pour $\sum_{k=0}^{n} k^3$. Quel est le lien entre cette somme et $\sum_{k=0}^{n} k$ ? Retrouver ce lien par un dessin.

**Exercice 55**

Montrer de deux manières différentes que, pour tout entier pair $\geqslant 2$, on a :

$$2^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \binom{n+2}{3}$$

Montrer que pour tout entier naturel impair $n$, on a

$$1^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \binom{n+2}{3}.$$

**Exercice 56**

On définit par récurrence $S_{m,n}$ par :
– $\forall\, n \in \mathbb{N}, S_{0,n} = \sum_{k=0}^{n} 1$ ;
– $\forall\, m, n \in \mathbb{N}, S_{m+1,n} = \sum_{k=0}^{n} S_{m,k}$.
Donner une expression simple de $S_{m,n}$, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$.

## 2. Systèmes

**Exercice 57**

**1** Résoudre, suivant les valeurs du paramètre réel $m$ :

$$\left\{\begin{array}{lclcl} x & + & (m+1)y & = & m+2 \\ mx & + & (m+4)y & = & 8 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lclcl} mx & + & (m-1)y & = & m+2 \\ (m+1)x & - & my & = & 5m+3 \end{array}\right.$$

**2** Résoudre, suivant les valeurs des paramètres réels $\lambda$ et $a$ :

$$\left\{\begin{array}{lclclcl} 3x & + & 2y & - & z+t & = & \lambda \\ 2x & + & y & - & z & = & \lambda-1 \\ 5x & + & 4y & - & 2z & = & 2\lambda \\ (\lambda+2)x & + & (\lambda+2)y & - & z & = & 3\lambda+a \end{array}\right.$$

Exercice 58

Étudier l'existence de solutions des systèmes complexes :

**1**

$$\begin{cases} x + y + (1-m)z = m+2 \\ (1+m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m+2. \end{cases}$$

**2**

$$\begin{cases} x - my + m^2 z = m \\ mx - m^2 y + mz = 1 \\ mx + y - m^3 z = -1. \end{cases}$$

**3**

$$\begin{cases} x + my + z = 1 \\ (m+1)x + 2y + (m-3)z = -1 \\ (m-1)x - 3z = -1. \end{cases}$$

**4**

$$\begin{cases} 3mx + (3m-7)y + (m-5)z = m-1 \\ (2m-1)x + (4m-1)y + 2mz = m+1 \\ 4mx + (5m-7)y + (2m-5)z = 0. \end{cases}$$

## 3. Équations

Exercice 59

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue réelle $x$ :

**1** $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

**2** $\ln(x^2-1) = \ln(2-x) + \ln(3-x)$.

**3** $\ln(x^2-1) = 2\ln(x-2)$.

**4** $e^x + e^{-x} = \sqrt{13}$.

**5** $5^x - 5^{x+1} + 2^{3x-1} = 0$.

Exercice 60

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue réelle $x$ :

**1** $\cos(x) = \frac{1}{2}$, $\quad \tan(x) = 1$, $\quad \sin(x) + \cos(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

**2** $\tan(x)\tan(2x) = 1$.

**3** $\arcsin(x+1) - \arcsin(x) = \frac{\pi}{6}$.

**4** $\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$.

## 4. Dérivation, intégration

### Exercice 61

Calculer les dérivées des fonctions (toujours appelées $f$) :

**1** $x \mapsto \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)^2}$.

**2** $x \mapsto e^{\sin(x)}$.

**3** $x \mapsto \ln(e^{2x} - e^x + 1)$.

**4** $x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x^3-2}$.

**5** $x \mapsto \frac{7}{(7x-3)^6}$.

**6** $x \mapsto \frac{x}{2+(1-x)^3}$.

**7** $x \mapsto (3x+4)\sqrt{5x+2}$.

### Exercice 62

**1** $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+1}$.

**2** $\int_0^{2\pi} \sin px \sin qx \mathrm{d}x$, $\int_0^{2\pi} \sin px \cos qx \mathrm{d}x$, $\int_0^{2\pi} \cos px \cos qx \mathrm{d}x$, où $(p,q) \in \mathbb{N}^2$

**3** $\int \cos^2 x \sin^2 x \mathrm{d}x$.

**4** $\int \cos^2 x \sin^3 x \mathrm{d}x$.

**5** $\int \frac{\sin(2x)}{1+\cos^2(x)} \mathrm{d}x$.

### Exercice 63

Soit, pour tout $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times (\mathbb{R} \setminus \{1\})$ :

$$f_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}.$$

Écrire $f_n(x)$ en fonction de $n$ et calculer $f_{15}(2)$.

### Exercice 64

Calculer les intégrales suivantes :

**1** $A = \int_0^x e^t \sin(2t)\mathrm{d}t$ et $B = \int_0^x e^t \cos(2t)\mathrm{d}t$.

**2** $I = \int_0^x e^t \sin(t)^2\mathrm{d}t$ et $J = \int_0^x e^t \cos(t)^2\mathrm{d}t$.

**3** $C = \int_0^{\pi/4} (2t+1)\cos(t)^2\mathrm{d}t$ et $D = \int_0^{\pi/4} (2t+1)\sin(t)^2\mathrm{d}t$.

### Exercice 65

Calculer

**1** $\int_0^{\pi} \cos(x)^3 \sin(x)\mathrm{d}x$.

**2** $\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\mathrm{d}u$.

**3** $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+2}\mathrm{d}x$.

**4** $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)}$. $(t = \tan(x/2))$

**5** $\int_0^{\pi/6} \frac{\mathrm{d}x}{\cos(x)}$.

**6** $\int_{1/2}^{3/4} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}}$. $(t = \sin(u)^2)$

**7** $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$. ($u = e^x$ puis $t = \sqrt{1+u^2}$)

### Exercice 66

Soit $f$ une fonction continue et croissante sur $[0,\pi]$. Le but de cet exercice est de montrer que : $\int_0^{\pi} f(x)\sin(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

**1** Montrer : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+, 1-\cos(x) \leqslant x$.

**2** Étudier la fonction $g\ : x \mapsto \int_0^x f(t)\sin(t)\mathrm{d}t - \int_0^{1-\cos(x)} f(t)\mathrm{d}t$. Conclure.

### Exercice 67

On définit, pour tout entier naturel non nul $n$ :

$$I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x \mathrm{d}x.$$

**1** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}.$$

**2** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$e^2 - 1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k!} + I_n.$$

**3** En déduire :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} = e^2.$$

Exercice 68

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n t \mathrm{d}t$.

**1**

**a** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$.

**b** Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \frac{1}{2(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.

**c** En déduire la limite de $(I_n)$.

**d** Calculer $f(n) = I_{n+4} - I_n$ en fonction de $n$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

**2** Déterminer la limite de la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

## 5. Formules

Exercice 69

Montrer les formules suivantes :

**1** $\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$.

**2** $\frac{\pi}{4} = 2 \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7}$.

**3** $3 \arctan(2 - \sqrt{3}) = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$.

Exercice 70

Soit $a$ et $b$ des réels tels que $ab \neq 1$. Montrer l'existence de $\varepsilon \in \{-1, 0, +1\}$ tel que :

$$\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) + \varepsilon\pi.$$

## 6. Simplifications

Exercice 71

Simplifier les expressions suivantes :

**1** $\arctan(1/2) + \arctan(1/5) + \arctan(1/8)$.

**2** $\arcsin(4/5) + \arcsin(5/13) + \arcsin(16/65)$.

Exercice 72

Simplifier, quand elles ont un sens, les expressions suivantes :

**1** $\tan(\arcsin x)$, $\sin(\arccos x)$, $\cos(\arctan x)$, $\cos(2\arccos(x))$, $\cos(2\arcsin(x))$, $\tan(2\arcsin(x))$.

**2** $\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$, $\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$, $\arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$, $\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$, $\arccos(4x^3-3x)$, $\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$.

**3** Simplifier, pour $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\operatorname{sh}(\ln(\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})))$.

**4** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\arctan(\operatorname{sh}(x)) = \arccos(1/\operatorname{ch}(x))$.

## 7. Divers

Exercice 73

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$.

Exercice 74

On considère deux fonctions $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ et $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$. Calculer $(u^v)'$.

Exercice 75

Pour $(n, a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^2$, calculer :

$$C_n(a,b) = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(a+bk) \quad \text{et} \quad S_n(a,b) = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(a+bk).$$

Exercice 76

Représenter le graphe de la fonction $f : x \mapsto \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) - 2\arctan(x)$.

Exercice 77

**1** Soit $p \in \mathbb{N}$. Simplifier $\arctan(p+1) - \arctan(p)$.

**2** En déduire la limite de la suite de terme général $S_n = \sum_{p=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right)$.

CHAPITRE 8

# Techniques fondamentales (corrigés)

Aller aux énoncés 7

## 1. Utilisation des symboles de somme et de produit

**Corrigé 53** (Symboles de somme et de produit)

**1** Pour tout $k \in [\![2, n]\!]$,

$$\frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2(k-1)} - \frac{1}{2(k+1)},$$

donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} &= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)}.\end{aligned}$$

**2** $1\,1! + 2\,2! + \cdots + n\,n! = \sum_{k=1}^{n} k(k!) = \sum_{k=1}^{n}((k+1)! - k!) = (n+1)! - 1$.

**3** On peut sommer par tranches verticales (ou horizontales), mais aussi par tranches diagonales (à $p+q$ constant) :

$$S_n = \sum_{s=0}^{n}(s+1)s = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1+3) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

**4** $\prod_{i=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{i}\right) = \prod_{i=2}^{n} \frac{i-1}{i} = \frac{1}{n}$.

**5** $\prod_{i=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = \prod_{i=2}^{n} \frac{(i-1)(i+1)}{i^2} = \prod_{i=2}^{n} \frac{i-1}{i} \prod_{i=2}^{n} \frac{i+1}{i} = \frac{n+1}{2n}$.

**6** $\displaystyle\sum_{i+j=n} \min(\{i,j\})$, $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \min(\{i,j\})$ et

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} \min(\{i,j\}) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} j + \sum_{j=i+1}^{n} i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2} + (n-i)i\\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{2n+1}{2} i - \frac{i^2}{2}\\
&= \frac{2n+1}{2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{12} n(n+1)(2n+1)\\
&= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)
\end{aligned}$$

**Remarque :** on trouve donc $\sum_{k=1}^{n} k^2$, ce qui n'est pas un hasard (essayez de voir cette somme comme un calcul de nombre de briques d'une pyramide !)

**7** $\sum_{i+j=n} ij = \sum_{i=0}^{n} i(n-i) = n\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6}(n-1)n(n+1)$.

Corrigé 54 (Sommes de puissances)

**1** On peut le faire par récurrence (puisque la formule nous est donnée). On peut aussi exploiter un chanement d'indice

$$\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=0}^{n}(n-k)$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n}(n-k)\right) = \frac{1}{2} n(n+1)$$

On peut aussi utiliser la somme télescopique $\sum_{k=0}^{n}((k+1)^2 - k^2)$.

**2** On peut le faire par récurrence, ou en considérant la somme télescopique $\sum_{k=0}^{n}((k+1)^3 - k^3)$.

**3** On trouve $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Corrigé 55 (Somme de carrés de nombres de même parité)

On peut le faire par récurrence, ou en factorisant par 4.
La seconde formule résulte de la première.

Corrigé 56 (Sommes de sommes)

$S_{m,n} = \binom{m+n+1}{m+1}$.

## 2. Systèmes

Corrigé 57 (Systèmes)

Corrigé 58 (Compatibilité d'un système)

**1** Système de Cramer si et seulement si $m \neq 0, \pm 2$ ; compatible si et seulement si $m \neq 2$.

**2** Système de Cramer si et seulement si $m \neq 0, \pm 1, \pm i$ ; compatible si et seulement si $m \neq 0, \pm i$.

**3** Système de Cramer si et seulement si $m \neq 1, \pm 2i$ ; compatible si et seulement si $m \neq 1$.

**4** Si $m \neq 0, -2$, le système est de Cramer ; sinon, le système est incompatible.

## 3. Équations

Corrigé 59 (Équations de puissances, logarithmes, exponentielles)

**1** Les expressions considérées n'ont de sens que pour $x > 0$. Soit donc $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$ si et seulement si $\sqrt{x}\ln(x) = x\ln(\sqrt{x})$ en appliquant la fonction exponentielle (qui est injective), si et seulement si $\left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right)\ln(x) = 0$ si et seulement si $x = 2\sqrt{x}$ ou $x = 1$, soit enfin $x \in \{1, 4\}$.

**2** Ces expressions n'ont de sens que si $|x| > 1$, $x < 2$ et $x < 3$, soit $x \in ]1, 2[$. Pour un tel $x$, par propriété du logarithme (morphisme et injectivité), $x$ est solution de l'équation si et seulement si $x^2 - 1 = (2 - x)(3 - x)$, soit encore $x = 7/3$. Or $7/3 \notin ]1, 2[$, donc cette équation n'a pas de solution.

**3** Ces expressions ont un sens si et seulement si $x > 2$. Pour un tel $x$, l'équation équivaut à $x^2 - 1 = (x - 2)^2$, soit à $x = 5/4$. Cette équation n'a donc pas de solution.

**4** Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $e^x + e^{-x} = \sqrt{13}$ si et seulement si $e^x$ est racine du polynôme $X^2 - \sqrt{13}X + 1$ (j'ai multiplié par le réel non nul $e^x$), si et seulement si $e^x = \frac{\sqrt{13} \pm 3}{2}$, si et seulement si $x \in \left\{\ln\left(\frac{\sqrt{13}-3}{2}\right), \ln\left(\frac{\sqrt{13}+3}{2}\right)\right\}$.

**5** Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $5^x - 5^{x+1} + 2^{3x-1} = 0$ si et seulement si $4 \cdot 5^x = 2^{3x-1}$ si et seulement si $x\ln(5) + \ln(4) = (3x - 1)\ln(2)$ si et seulement si $x = \frac{3\ln(2)}{3\ln(2) - \ln(5)}$.

Corrigé 60 (Équations trigonométriques)

**1** $\cos(x) = \frac{1}{2}$ si et seulement si $x \equiv \pm\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.
$\tan(x) = 1$ si et seulement si $x \equiv \frac{\pi}{4}\ [\pi]$.
$\sin(x) + \cos(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}$ si et seulement si $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin(x) + \cos(x)) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, si et seulement si $\cos(x - \pi/4) = \cos(\pi/6)$, si et seulement si $x \equiv \frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$ ou $x \equiv \frac{\pi}{12}\ [2\pi]$.

**2** Ces expressions ont un sens si et seulement si $x \notin \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right)$.
Pour un tel $x$, l'équation équivaut à

$$\frac{2\tan(x)^2}{1 - \tan^2(x)} = 1$$

soit à $\tan(x)^2 = \frac{1}{3}$, soit encore à $\tan(x) = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, soit enfin à $x \Leftrightarrow \pm\frac{\pi}{6}[\pi]$.

**3** Les expressions intervenant dans cette équation ont un sens si et seulement si $x \in [-1, 0]$.
Pour un tel $x$, $\arcsin(x) \in [-\pi/2, 0]$ et $\arcsin(x + 1) \in [0, \pi/2]$, donc $\arcsin(x + 1)$ et $\arcsin(x) + \frac{\pi}{6}$ appartiennent à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Comme sin est injective sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, cette équation équivaut à

$$\sin(\arcsin(x + 1)) = \sin(\arcsin(x) + \pi/6)$$

Soit à

$$x+1=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$$

ou encore à

$$(2-\sqrt{3})x+2=\sqrt{1-x^2}$$

Comme ces deux quantités sont positives (car $x\in[-1,0]$), $x$ est solution de l'équation si et seulement si

$$((2-\sqrt{3})x+2)^2=1-x^2$$

ou encore $x$ est racine de

$$4(2-\sqrt{3})X^2+4(2-\sqrt{3})X+3$$

qui n'a pas de solution réelle : l'équation initiale n'a pas de solution.
**Remarque :** puisqu'au final on n'a pas trouvé de solution, une analyse aurait suffit (plutôt que de chercher à conserver l'information en mettant des équivalences).

$\arcsin(x+1)-\arcsin(x)=\frac{\pi}{6}$.

**4** Cette équation a un sens pour tout réel $x$.

De plus, l'application $\varphi\ : x\mapsto\arctan(x)+\arctan(2x)$ est strictement croissante (comme somme de telles fonctions), et donc injective : cette équation admet au plus une solution.

Comme $\varphi(0)=0$ et $\varphi(1/2)>\frac{\pi}{4}$, on doit avoir $x\in]0,1/2[$.

Pour un tel $x$, $\arctan(x)+\arctan(2x)\in]0,\pi/2[$, intervalle sur lequel la fonction tangente est injective, donc $x$ est solution si et seulement si

$$\frac{x+2x}{1-2x^2}=1,$$

*i.e.* $3x=1-2x^2$, *i.e.* $x$ est racine de $2X^2+3X-1$, *i.e.* $x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$.

Parmi ces solutions, seule $\frac{-3+\sqrt{17}}{4}$ est à retenir (à cause de la condition $x\in]0,1/2[$).

C'est l'unique solution de cette équation.

## 4. Dérivation, intégration

Corrigé 61 (Calculs de dérivées)

Corrigé 62 (Calculs de primitives)

Corrigé 63 (Utilisation de la dérivation pour une somme)

Corrigé 64 (Calcul d'intégrales)

Corrigé 65 (Changements de variables)

**1** $\int_0^\pi\cos(x)^3\sin(x)\mathrm{d}x=\left[-\frac{\cos(x)^4}{4}\right]_0^\pi=0.$

**2** $\pi/4$

**3** $\int_0^1\frac{2x+1}{x^2+x+2}\mathrm{d}x=[\ln(x^2+x+2)]_0^1=\ln(2).$

**4** Les bornes deviennent $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et 1, $\mathrm{d}x$ devient $\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$, et $\sin(x)=\frac{2t}{1+t^2}$ de sorte que l'intégrale cherchée est égale à

$$\int_{1/\sqrt{3}}^1\frac{\mathrm{d}t}{t}=[\ln(t)]_{1/\sqrt{3}}^1=\frac{\ln(3)}{2}$$

**5** On peut se ramener à l'intégrale précédente en effectuant le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - x$.

**6** Les bornes deviennent $\pi/4$ et $\pi/3$, $\mathrm{d}t$ devient $2\sin(u)\cos(u)\mathrm{d}u$, de sorte que l'intégrale cherchée est égale à

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} 2\mathrm{d}u = 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6}$$

**Remarque :** le changement de variable $t = \sin(u)^2$ n'en est pas vraiment un, puisque la variable initiale est $t$, et que cette relation ne permet pas d'écrire $u$ en fonction de $t$. Il faut donc effectuer un changement de variable précis, comme $u = \arcsin(\sqrt{t})$ (afin de bien avoir $t = \sin(u)^2$), ou « remonter » les calculs (afin que la variable initiale soit bien $u$).

**Remarque :** certains se sont embrouillés car ils ont remarqué que $\sin(u)^2 = \frac{1}{2}$ était vrai lorsque $u = -\pi/4$ par exemple, et ne savaient pas très bien comment changer les bornes (ceci doit se comprendre à la lumière de la remarque précédente).

**7** Les bornes devient 1 et $e$, $\mathrm{d}x$ devient $\frac{\mathrm{d}u}{u}$, de sorte que l'intégrale est égale à

$$\int_1^e \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}$$

Les bornes deviennent $\sqrt{2}$ et $\sqrt{1+e^2}$, $t^2 = 1 + u^2$ donc $2t\mathrm{d}t = 2u\mathrm{d}u$, puis $\mathrm{d}u = \frac{t\mathrm{d}t}{u}$, de sorte que l'intégrale cherchée est égale à

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}},$$

soit enfin

$$\frac{1}{2}\left(\ln\frac{\sqrt{1+e^2}-1}{\sqrt{1+e^2}+1} - \ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)$$

Corrigé 66 (Inégalité intégrale)

Corrigé 67 (Suites de rationnels convergeant vers $e^2$)

Corrigé 68 (Étude de suite intégrale)

## 5. Formules

Corrigé 69 (Formules particulières avec arctangente)

**1**

**2**

**3** De l'encadrement $0 \leqslant 2 - \sqrt{3} < 1$, on déduit que $\arctan(2-\sqrt{3})$ appartient à $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$. On peut donc écrire :

$$\tan(2\arctan(2-\sqrt{3})) = \frac{2(2-\sqrt{3})}{1-(2-\sqrt{3})^2} = \frac{2(2-\sqrt{3})}{-6+4\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \arctan(\pi/6).$$

Comme $2\arctan(2-\sqrt{3}) \in [0, \pi/2[$, on en déduit que $2\arctan(2-\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6}$, puis que $3\arctan(2-\sqrt{3}) = \frac{\pi}{4}$.

D'après un exercice vu en TD, $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$. Ainsi,

$$\boxed{3\arctan(2-\sqrt{3}) = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}.}$$

Corrigé 70 (Somme de deux arctangentes)

## 6. Simplifications

Corrigé 71 (Simplifications d'expressions constantes)

**1**

**2** Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$, car $\cos^2 + \sin^2 = 1$, et cos est positive sur l'image $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ de la fonction arcsinus.

Il vient

$$\begin{aligned}
\cos\left(\arcsin(4/5) + \arcsin(5/13)\right) &= \cos\left(\arcsin(4/5)\right)\cos\left(\arcsin(5/13)\right) - \sin\left(\arcsin(4/5)\right)\sin\left(\arcsin(5\right. \\
&= \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} - \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13} \\
&= \frac{36}{65} - \frac{20}{65} \\
&= \frac{16}{65}.
\end{aligned}$$

De plus, $\arcsin(4/5) + \arcsin(5/13)$ appartient à $[0, \pi]$ (par croissance de la fonction arcsinus, et car $0 < 5/13 < 4/5 < 1$) : on a donc

$$\arcsin(4/5) + \arcsin(5/13) = \arccos(16/65).$$

D'après une propriété vue en cours, on a donc

$$\boxed{\arcsin(4/5) + \arcsin(5/13) + \arcsin(16/65) = \frac{\pi}{2}.}$$

Corrigé 72 (Simplifications d'expressions fonctionnelles)

## 7. Divers

Corrigé 73 (Limite et puissances)

Corrigé 74 (Dérivation d'une fonction s'écrivant comme puissance)

Corrigé 75 (Sommes de fonctions hyperboliques)

Corrigé 76 (Graphe d'une fonction pas si compliquée)

Corrigé 77 (Une suite avec arctangente)

**1** $\arctan(p)$ et $\arctan(p+1)$ sont des éléments de $[0, \frac{\pi}{2}[$, donc $\arctan(p+1) - \arctan(p)$ appartient à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et on peut écrire

$$\tan(\arctan(p+1) - \arctan(p)) = \frac{p+1-p}{1+p(p+1)} = \frac{1}{1+p+p^2}.$$

Comme $\arctan(p+1) - \arctan(p)$ appartient à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$\boxed{\arctan(p+1) - \arctan(p) = \arctan\left(\frac{1}{1+p+p^2}\right).}$$

**2** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après la question précédente (et puisque la somme obtenue est télescopique) :

$$S_n = \sum_{p=0}^{n} (\arctan(p+1) - \arctan(p)) = \arctan(n+1) - \arctan(0) = \arctan(n+1).$$

La fonction arctangente étant de limite $\pi/2$ en $+\infty$, $\boxed{\text{la suite de terme général } S_n \text{ converge vers } \frac{\pi}{2}.}$

CHAPITRE 9

# Structures algébriques (énoncés)

Aller aux corrigés 10

## 1. Groupes

**Exercice 78**

Déterminer les endomorphismes de $(\mathbb{Z}, +)$.

**Exercice 79**

Montrer que $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ sont isomorphes. Les groupes $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ sont-ils isomorphes ?

**Exercice 80**

Soit $G$ un groupe multiplicatif et $H$ une partie finie de $G$ non vide, stable par multiplication. Montrer que $H$ est un sous-groupe de $G$.

**Exercice 81**

Soit $G$ un groupe commutatif fini de cardinal $n$. Montrer que pour tout élément de $g$ de $G$, on a $g^n = e$.
**Indication :** considérer le produit des éléments de $G$.

## Exercice 82

**1** Soit $G$ un groupe. Montrer que l'intersection de sous-groupes de $G$ est encore un sous-groupe de $G$.

**2** Montrer que la réunion de deux sous-groupes $H_1$ et $H_2$ de $G$ est un sous-groupe de $G$ si et seulement si l'un de ces sous-groupes est inclus dans l'autre.

**3** Donner un exemple de groupe réunion de trois de ses sous-groupes, ces derniers n'étant pas comparables pour la relation d'ordre d'inclusion.

**4**

**a** Soit $A$ une partie de $G$. Montrer que l'intersection des sous-groupes de $G$ contenant $A$ est le plus petit sous-groupe de $G$ (au sens de l'inclusion) contenant $A$. Le sous-groupe est noté $< A >$, et appelé *sous-groupe de $G$ engendré par $A$.*

**b** On rappelle que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Quel est le sous-groupe de $\mathbb{C}$ additif engendré par $\{i, j\}$ ?

**c** Quel est le sous-groupe de $\mathbb{C}^*$ multiplicatif engendré par $\{i, j\}$ ?

## Exercice 83

Soit $G$ un groupe multiplicatif. On note $Z(G) = \{a \in G, \forall\, b \in G,\ ab = ba\}$ (c'est le *centre* de $G$), et pour $a \in G : C(a) = \{b \in G,\ ab = ba\}$ (c'est le *commutant* de $a$). Montrer que $Z(G)$ et $C(a)$ sont des sous-groupes de $G$.

## Exercice 84

Soit $G$ un groupe, et $a$ un élément de $G$.

**1** Montrer que les applications $\alpha_a : g \mapsto ag$ et $\beta_a : g \mapsto ga$ – appelées respectivement applications de *multiplication (ou de translation) à gauche et à droite par $a$* – sont des permutations de $G$.

**2** Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une telle application soit un endomorphisme de $G$.

**3** Montrer que l'application $\phi : a \mapsto \alpha_a$ est un morphisme injectif de $G$ vers $\mathcal{S}_G$. En déduire que tout groupe est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe de permutations (théorème de Cayley).

## Exercice 85

Soient $(G, T)$ et $(G', *)$ deux groupes. Montrer que la loi $\nabla$ sur $G \times G'$ définie par

$$\forall (g_1, g_1'), (g_2, g_2') \in G \times G', \quad (g_1, g_1') \nabla (g_2, g_2') = (g_1 T g_2, g_1' * g_2')$$

confère à $G \times G'$ une structure de groupe, appelée structure de *groupe produit*, déduite (ou héritée) de celles de $G$ et $G'$.

Exercice 86

Soit $G$ un groupe.

**1** Montrer l'équivalence des conditions suivantes :

(1) $G$ est abélien.

(2) L'application carré de $G$ dans $G$ est un endomorphisme de $G$.

(3) L'application inverse de $G$ dans $G$ est un automorphisme de $G$.

**2** On suppose que $g^2 = 1$ pour tout $g \in G$. Montrer que $G$ est abélien.

Exercice 87

Soit $G$ un groupe multiplicatif, $E$ un ensemble et $\phi : G \to E$ une bijection. On définit une opération $*$ sur $E$ par :

$$\forall x, y \in E, x * y = \phi\left(\phi^{-1}(x)\phi^{-1}(y)\right)$$

Montrer que $*$ confère à $E$ une structure de groupe, et que les groupes $G$ et $E$ sont isomorphes.

Exercice 88

Soit $G$ un groupe. On note $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de $G$.

**1** Montrer que $\mathrm{Aut}(G)$ est un groupe pour la loi $\circ$.

**2** Déterminer $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$.

**3** Pour $a \in G$ on note $\phi_a$ l'application de $G$ dans $G$ telle que $\phi_a(x) = axa^{-1}$, pour tout élément $x$ de $G$ : $\phi_a$ est appelée *conjugaison par $a$* (dans $G$). Montrer que $\phi_a$ est un automorphisme de $G$, (on dit que $\phi_a$ est un automorphisme *intérieur*).

**4** Montrer que l'application $\psi\ : a \mapsto \phi_a$ est un morphisme de groupes. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ce morphisme soit injectif.

Exercice 89

Déterminer tous les sous-groupes finis de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
**Indication :** on pourra utiliser l'exercice 1 de cette feuille de TD.

Exercice 90

**1** Soit $G$ un ensemble muni d'une loi de composition interne associative, admettant un élément neutre à gauche et tel que chaque élément de $G$ admette un symétrique à gauche. Montrer que $G$ est un groupe.

**2** Soit $G$ un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne associative $\cdot$ telle que :

$$\forall\, a, b \in G,\ \exists x, y \in G\ :\ a = x \cdot b = b \cdot y \qquad (\star)$$

Montrer que $(G, \cdot)$ est un groupe.

**3** Soit $G$ un ensemble fini non vide muni d'une loi de composition interne $\cdot$ associative pour laquelle tout élément est régulier à droite et à gauche. Montrer que $G$ est un groupe.

## 2. Anneaux, corps

Exercice 91

Étant donné deux anneaux $A$ et $B$ quelconques, existe-t-il au moins un morphisme d'anneaux de $A$ vers $B$ ?

Exercice 92

Montrer que tout morphisme de corps est injectif.

Exercice 93

Montrer que tout anneau intègre fini est un corps.

Exercice 94

Soit $(G, +)$ un groupe commutatif. On note $\mathrm{End}(G)$ l'ensemble des endomorphismes de $G$, sur lequel on définit la loi (notée abusivement) $+$ par :

$$\forall\, f, g \in \mathrm{End}(G), \forall\, x \in G, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

Montrer que $(\mathrm{End}(G), +, \circ)$ est un anneau.

Exercice 95

Soit $(A,+,\times)$ un anneau non nul. On dit que $x \in A$ est *nilpotent* s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 0$.

**1** Donner un exemple de matrice nilpotente non nulle.

**2** Montrer qu'un élément de $A$ ne peut pas être à la fois nilpotent et inversible.

**3** Donner un exemple d'élément nilpotent non nul dans l'anneau des endomorphismes de $(\mathbb{C},+)$ (voir 2 pour une définition de cet anneau).

**4** Montrer qu'il peut exister des éléments ni inversibles ni nilpotents.

**5** Montrer que si $x$ est nilpotent, alors $1-x$ est inversible.

**6** Montrer que si $x$ et $y$ sont nilpotents et commutent, alors $xy$ et $x+y$ sont nilpotents.

Exercice 96

Soit $(A,+,\times)$ un anneau. On appelle *centre* de $A$ l'ensemble $C = \{x \in A, \forall\, y \in A, xy = yx\}$. Montrer que $C$ est un sous-anneau de $A$.

Exercice 97

Soit $(A,+,\times)$ un anneau commutatif non nul. Un *idéal* $\mathcal{I}$ de $A$ est un sous-ensemble de $A$ vérifiant :
– $(\mathcal{I},+)$ est un groupe ;
– $\forall\, a \in A, \forall\, y \in \mathcal{I}, \quad ay \in \mathcal{I}$.

**1** Montrer que pour tout $\alpha \in A$, $\alpha A = \{\alpha x,\ x \in A\}$ est un idéal de $A$. Montrer en particulier que $\{0\}$ et $A$ sont deux idéaux de $A$.

**2** Montrer que $A$ est un corps si et seulement si ses seuls idéaux sont $\{0\}$ et $A$.

**3** Trouver tous les idéaux de $\mathbb{Z}$.

Exercice 98

On pose $\mathbb{Z}[i] = \{z \in \mathbb{C}, \exists (a,b) \in \mathbb{Z}^2, \quad z = a + ib\}$. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau intègre pour les lois d'addition et de multiplication déduites de celles de $\mathbb{C}$. Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 99

On pose $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{z \in \mathbb{R}, \exists (a,b) \in \mathbb{Q}^2, \quad z = a + b\sqrt{3}\}$. Établir que $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ est un corps pour les lois déduites de celles de $\mathbb{R}$.
Déterminer le groupe des automorphismes du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

Exercice 100

Soit $A$ un anneau commutatif, $I$ un idéal de $A$. On appelle *radical* de $I$ et on note $\sqrt{I}$ l'ensemble :
$$\sqrt{I} = \{x \in A,\ \exists n \in \mathbb{N}, x^n \in I\}.$$
Dans $\mathbb{Z}$, calculer $\sqrt{12\mathbb{Z}}$, $\sqrt{72\mathbb{Z}}$.

Exercice 101

Soit $A$ un anneau commutatif non nul dont tout idéal est premier, c'est-à-dire vérifie, pour tout $(x, y) \in A^2$ :
$$xy \in I \Rightarrow x \in I \text{ ou } y \in I.$$
Montrer que $A$ est un corps.

Exercice 102

Un corps $K$ est dit *algébriquement clos* si tout polynôme non constant à coefficients dans $K$ admet une racine dans $K$. Montrer qu'un corps algébriquement clos est de cardinal infini.

## 3. Compléments sur les groupes

Exercice 103

Le cardinal d'un groupe fini est également appelé *ordre* de ce groupe.
Soit $G$ un groupe fini, et $H$ un sous-groupe de $G$. On considère l'ensemble $\Omega$ des translatés à gauche de $H$ par un élément de $g$ :
$$\Omega = \{gH,\ g \in G\}$$
(pour $g \in G$ fixé, $gH$ désigne l'ensemble $\{gh,\ h \in H\}$).

**1** Montrer que la réunion des éléments de $\Omega$ est $G$.

**2** Montrer que chaque élément de $\Omega$ est de même cardinal que $H$.

**3** Montrer que deux éléments distincts de $\Omega$ sont disjoints.

**4** En déduire que l'ordre de $H$ divise celui de $G$ : c'est le théorème de Lagrange.

Exercice 104

On appelle *ordre* d'un élément $g$ d'un groupe $G$ le plus petit entier naturel non nul $k$ tel que $g^k = e$, s'il existe. On dit alors que $g$ est d'ordre fini.

**1** Montrer que pour tout élément $g$ d'un groupe fini $G$, $g$ est d'ordre fini (facile), divisant l'ordre de $G$ (moins facile).

**2** Montrer que tout groupe d'ordre pair admet un élément d'ordre 2.

**3** Donner un exemple de groupe infini dont tout élément est d'ordre fini.

**4** Montrer que si $m$ est l'ordre de $g \in G$, alors $g^k = e$ si et seulement si $m$ divise $k$.

Exercice 105

**1** Soit $G$ et $G'$ deux groupes et $f$ un morphisme de $G$ dans $G'$. Pour $a \in G$, comparer l'ordre de $a$ et celui de $f(a)$.
**2** Soit $a, b \in G$. Comparer les ordres de $a$ et de $bab^{-1}$.
**3** Soit $a, b \in G$. Comparer les ordres de $ab$ et de $ba$.

Exercice 106

Soit $G$ un groupe fini de cardinal impair. Montrer que :
$$\forall\, x \in G,\ \exists! y \in G \text{ tel que } x = y^2.$$
**Indication :** montrer que l'application carrée est surjective grâce au travail précédent. En déduire qu'elle est bijective.

CHAPITRE 10

# Structures algébriques (corrigés)

Aller aux énoncés 9

## 1. Groupes

**Corrigé 78 (Endomorphismes de $\mathbb{Z}$)**

**Analyse** Soit $f \in \mathrm{End}(\mathbb{Z})$. Notons $a = f(1)$. Par propriété du cours, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$f(n) = nf(1) = na,$$

donc $f$ est la multiplication par l'entier $a$.

**Synthèse** Réciproquement, pour tout $a \in \mathbb{Z}$, l'application $x \mapsto ax$ est bien un endomorphisme de $(\mathbb{Z}, +)$ (car la multiplication est distributive par rapport à l'addition).

Ainsi, $\mathrm{End}(\mathbb{Z}) = \{x \mapsto ax, a \in \mathbb{Z}\}$.

**Corrigé 79 (Isomorphisme de groupes)**

$(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ sont isomorphes via la fonction exponentielle par exemple.

Pour montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$ ne sont pas isomorphes, on cherche une propriété vérifiée par l'un des groupes qui, retranscrite dans l'autre, est fausse.

« Tout réel est le double d'un réel, tout réel non nul n'est pas le carré d'un réel. »

Soit $\varphi\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ un morphisme. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \varphi(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = (\varphi(x/2))^2 \geqslant 0,$$

donc $\varphi$ n'est pas surjectif : ce n'est pas un isomorphisme.

$\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$ ne sont donc pas isomorphes.

**Autre preuve**

« Certains éléments de $\mathbb{R}^*$ sont le carré de deux réels, un réel n'a qu'une seule moitié. »

Soit $\psi\ : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ un morphisme. On a

$$2\psi(-1) = \psi((-1)^2) = \psi(1) = 0,$$

donc $\psi(-1) = 0$. $\ker(\psi)$ n'est pas réduit à $\{1\}$, $\psi$ n'est pas injectif.

**Corrigé 80 (Partie finie stable par multiplication)**

D'après l'une des caractérisations des sous-groupes, il reste à vérifier la stabilité de $H$ par passage au symétrique.

Soit $h \in H$. L'idée est d'écrire $h^{-1}$ comme une puissance de $h$ à un exposant naturel.

L'application $\varphi\ : n \in \mathbb{N} \mapsto h^n$ n'est pas injective, car $\mathbb{N}$ est infini et pas $H$ : il existe donc $i, j \in \mathbb{N}$ distincts tels que $h^i = h^j$. En supposant par exemple $i > j$, on obtient $h^{i-j} = e_G$, donc $h^{-1} = h^{i-j-1}$.

Si $i - j - 1 > 0$, alors comme $h \in H$ et comme $H$ est stable par produit, $h^{-1} \in H$.

Si $i - j - 1 = 0$, alors $h^{-1} = h = e_G$, donc $h^{-1} \in H$.

$H$ est donc un sous-groupe de $G$.

**Remarque :** plutôt que de parler de $i$ et $j$, on aurait pu utiliser $\psi\ : n \in \mathbb{Z} \mapsto h^n$ qui a l'avantage d'être un morphisme, non injectif par étude des cardinaux, et donc de noyau non trivial.
**Remarque :** l'hypothèse de finitude est essentielle, comme le montre l'exemple de $\mathbb{N}$ additif (ou $\{e^n, n \in \mathbb{N}\}$ si on tient à donner un exemple multiplicatif).

Corrigé 81 (Groupe fini commutatif)

Notons $A$ le produit des élements de $G$ :

$$A = \prod_{g \in G} g.$$

(cette notation n'est pas ambiguë car $G$ est un groupe (fini) commutatif).

Soit $g_0 \in G$. L'application $g \in G \mapsto g_0 g$ est une permutation de $G$ (elle admet $g \mapsto g_0^{-1} g$ pour inverse pour la composition). On a donc

$$A = \prod_{g \in G} (g_0 g) = g_0^n \prod_{g \in G} g = g_0^n A,$$

puisque $G$ est commutatif.

$A$ étant simplifiable ($G$ est un groupe), on obtient bien $g_0^n = e$.
**Remarque :** ce résultat donne une démonstration « simple » du petit théorème de Fermat.
**Remarque :** l'hypothèse de commutativité est en fait superflue (le résultat demeure si on ne la suppose plus). Ne pas oublier qu'une invalidité de preuve ne constitue par une preuve d'invalidité.

Corrigé 82 (Opérations ensemblistes sur des sous-groupes)

**1** Soit $(H_i)_{i \in I}$ une famille de sous-groupes de $G$, et $K = \bigcap_{i \in I} H_i$.

$K$ est une partie de $G$, non vide puisque comprenant $e_G$ (qui appartient à chaque sous-groupe $H_i$, $i \in I$).

$K$ est stable par la loi de $G$ et par passage au symétrique, puisque c'est le cas de chaque $H_i$, $i \in I$.

$K$ est donc bien un sous-groupe de $G$.

**2** Le sens indirect est évident (dans ce cas $H_1 \cup H_2$ est l'un des sous-groupes $H_1$ ou $H_2$).

Montrons la réciproque par contraposition, en supposant $H_1$ et $H_2$ non comparables pour l'inclusion. On peut donc trouver $h_1 \in H_1 \setminus H_2$ et $h_2 \in H_2 \setminus H_1$. Vérifions par l'absurde que $h_1 h_2 \notin H_1 \cup H_2$.

Si $h_1 h_2 \in H_1$, alors, par structure de groupe de $H_1$, $h_2 = h_1^{-1}(h_1 h_2) \in H_1$, ce qui est exclu.

Si $h_1 h_2 \in H_2$, alors, par structure de groupe de $H_2$, $h_1 = (h_1 h_2) h_2^{-1} \in H_2$, ce qui est exclu.

$H_1 \cup H_2$ n'est pas stable par la loi de $G$, ce n'en est pas un sous-groupe.
**Remarque :** une analyse élémentaire permettait de constater que seule la stabilité par la loi du groupe pouvait tomber en défaut ($H_1 \cup H_2$ est bien une partie non vide de $G$ stable par passage au symétrique).

**3** On peut prendre $G = \mathbb{U}_2^2$, $H_1 = \{(1,1),(1,-1)\}$, $H_2 = \{(1,1),(-1,1)\}$ et $H_3 = \{(1,1),(-1,-1)\}$.

**4**

**a** Notons $K$ l'intersection des sous-groupes de $G$ contenant $A$ : c'est un sous-groupe de $G$ d'après la première question, contenant $A$ par construction. De plus, si $H$ est un sous-groupe de $G$ contenant $A$, alors il figure dans l'intersection définissant $K$, et il le contient donc, d'où le résultat.

**Remarque :** on a décrit $< A >$ comme une intersection (en le « cernant »). On peut aussi le décrire comme l'ensemble des éléments de $G$ que l'on peut construire à partir des éléments de $A$, de la loi de $G$, et de l'application de passage au symétrique.

**b** Notons $H$ le sous-groupe additif de $\mathbb{C}$ engendré par $\{i, j\}$.

$H$ étant stable par somme et passage à l'opposé, il doit contenir $J := \{ai + bj, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

Réciproquement, $J$ est une partie de $\mathbb{C}$, contenant $\{i, j\}$, et stable par différence (vérifications immédiates) : c'est donc un sous-groupe de $G$ contenant $\{i, j\}$. En tant que tel, il contient $H$.

$$H = \{ai + bj, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$$

**c** Notons $K$ le sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{C}^*$ engendré par $\{i, j\}$. Comme $\mathbb{U}_{12}$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$ comprenant $i$ et $j$, $K \subset \mathbb{U}_{12}$.

Réciproquement, $\omega := \exp(2i\pi/12) = j/i \in K$, car $K$ est stable par quotient. Comme il est stable par produit, $\omega^k \in K$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, donc $\mathbb{U}_{12} \subset K$ :

$$K = \mathbb{U}_{12}$$

Corrigé 83 (Centre et commutant)

Soit $a \in G$, $b, c \in C(a)$.

$C(a)$ est une partie de $G$, non vide car possédant $e_G$ (ou $a$, ou $a^2$, ou $a^{-1}$ etc.). De plus,

$$a(bc) = (ab)c = (ba)c = b(ac) = b(ca) = (bc)a,$$

par hypothèses sur $b$ et $c$, et associativité de la loi de $G$ : $bc \in C(a)$.

Enfin, puisque $ab = ba$, on a $b^{-1}abb^{-1} = b^{-1}bab^{-1}$, soit $b^{-1}a = ab^{-1}$ : $b^{-1} \in C(a)$.

$C(a)$ est bien un sous-groupe de $G$.

Comme $Z(G) = \bigcap_{a \in G} C(a)$, $Z(G)$ est aussi un sous-groupe de $G$.

**Remarque :** $C(a)$ n'est pas *a priori* commutatif, mais $Z(G)$ l'est toujours.

Corrigé 84 (Théorème de Cayley)

**1** $\alpha_a$ (resp. $\beta_a$) est bijective, car elle admet $\alpha_{a^{-1}}$ (resp. $\beta_{a^{-1}}$) pour inverse (pour la composition).

**2** Pour que $\alpha_a$ soit un endomorphisme, il faut que $\alpha_a(e_G) = e_G$, et donc que $a = e_G$.

Réciproquement, si $a = e_G$, alors $\alpha_a = \mathrm{Id}_G$, et est donc un endomorphisme de $G$.

**3** Soit $a, b, x \in G$.

$$\begin{aligned}((\phi(a)) \circ (\phi(b)))(x) &= (\alpha_a \circ \alpha_b)(x) \\ &= \alpha_a(bx) \\ &= abx \\ &= \alpha_{ab}(x) \\ &= (\phi(ab))(x).\end{aligned}$$

Ceci valant pour tout $x \in G$, $\phi(a) \circ \phi(b) = \phi(ab)$.

Ceci valant pour tout $(a, b) \in G^2$, $\phi$ est un morphisme de groupes.

On teste l'injectivité sur le noyau : soit $a \in \ker(\phi)$, *i.e.* $\phi(a) = \mathrm{Id}_G$. En évaluant cette relation en $e_G$, on obtient $a = e_G$. Le noyau du morphisme $\phi$ étant réduit à $e_G$, $\phi$ est bien injectif.

$\phi$ induit donc un isomorphisme de $G$ sur son image, et donc de $G$ sur un sous-groupe de $\mathcal{S}_G$.

Corrigé 85 (Structure de groupe produit)

On vérifie sans problème que $\nabla$ est bien une loi de composition interne sur $G\times G'$, associative (car $T$ et $*$ le sont), admettant $(e_G, e_{G'})$ pour élément neutre, et que tout $(g, g') \in G\times G'$ admet $(g^{-1}, (g')^{-1})$ pour symétrique.

Corrigé 86 (Caractérisation de la commutativité)

**1** Reformulons les diverses assertions :
La première signifie

$$\forall\, x, y \in G, \quad xy = yx$$

La deuxième signifie

$$\forall\, x, y \in G, \quad (xy)^2 = x^2y^2$$

La troisième signifie

$$\forall\, x, y \in G, \quad (xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$$

(car le passage au symétrique est bijectif, puisqu'involutif).
Soit $x, y \in G$. On a

$$xy = yx \Leftrightarrow xxyy = xyxy \Leftrightarrow x^2y^2 = (xy)^2,$$

car dans un groupe tout élément est simplifiable.
Ceci montre l'équivalence entre les deux premières assertions.
On a

$$(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1} \Leftrightarrow ((xy)^{-1})^{-1} = (x^{-1}y^{-1})^{-1} \Leftrightarrow xy = (y^{-1})^{-1}(x^{-1})^{-1} \Leftrightarrow xy = yx,$$

la première équivalence se justifiant par l'injectivité de la fonction de passage au symétrique.
Ceci montre l'équivalence entre la première et la troisième assertion.

**2** Par hypothèse, la fonction carré est l'endomorphisme trivial (constamment égal à 1) : $G$ est donc abélien.

Corrigé 87 (Transfert de structure)

On vérifie à la main que $(E, *)$ est un groupe, et que $\phi^{-1}$ est un isomorphisme de $E$ sur $G$.
**Remarque :** cet exercice semble compliqué, mais il ne fait que rappeler que des groupes sont isomorphes si et seulement si ils ne diffèrent que par l'écriture.

Corrigé 88 (Groupe d'automorphismes d'un groupe)

**1** $\mathrm{Aut}(G)$ est une partie non vide de $\mathcal{S}_G$, non vide car possédant $\mathrm{Id}_G$, stable par composition et passage à la bijection réciproque : c'est donc un sous-groupe de $\mathcal{S}_G$, puis un groupe pour $\circ$.

**2** On se demande pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{Z}$ l'application $n \in \mathbb{Z} \mapsto an$ est bijective.
Pour qu'elle le soit, 1 doit posséder un antécédent, et donc nécessairement, $a = \pm 1$.
Réciproquement, ces valeurs de $a$ conviennent, donc $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}) = \{\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}, -\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}\}$.

**3** Soit $a, x, y \in G$. On a

$$\phi_a(x)\phi_a(y) = axa^{-1}aya^{-1} = axya^{-1} = \phi_a(xy),$$

donc $\phi_a$ est un endomorphisme de $G$.
Il est bijectif, car il admet $\phi_{a^{-1}}$ pour inverse pour la composition (ou, si on préfère, car pour tout $y \in G$, l'unique antécédent de $y$ par $\phi_a$ est $a^{-1}ya$).

**4** Soit $a, b, x \in G$. On a

$$\psi(a) \circ \psi(b)(x) = \phi_a(\phi_b(x)) = \phi_a(bxb^{-1}) = abxb^{-1}a^{-1} = abx(ab)^{-1} = \psi(ab)(x),$$

donc $\psi$ est bien un morphisme.

Étudions son noyau : soit $a \in G$. $a$ est dans le noyau de $\psi$ si et seulement si $\psi(a) = \mathrm{Id}_G$, si et seulement si $axa^{-1} = x$ pour tout $x \in G$, si et seulement si $ax = xa$ pour tout $x \in G$. Le noyau de $\psi$ est donc le centre de $G$.

Corrigé 89 (Sous-groupes finis de $\mathbb{C}^*$)

Soit $G$ un sous-groupe fini de $\mathbb{C}^*$, de cardinal $n$. D'après l'exercice 1, pour tout $z \in G$, $z^n = 1$, donc $G \subset \mathbb{U}_n$. Par égalité des cardinaux (finis), $G = \mathbb{U}_n$.

Réciproquement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{U}_n$ est bien un sous-groupe fini de $\mathbb{C}^*$.

Corrigé 90 (Structure de groupe)

**1** Cette question est difficile.

Soit $e_G$ un élément neutre à gauche de $G$, $g \in G$, $g'$ un symétrique à gauche de $g$ (à ce stade, on ne peut affirmer l'unicité de l'élément neutre ou d'un symétrique à gauche).

On souhaite montrer que $g'$ est symétrique à droite de $g$, *i.e.* $gg' = e_G$. Pour ce faire, introduisons un symétrique à gauche $g''$ de $g'$. On a

$$gg' = e_G gg' = g''g'gg' = g''e_G g' = g''g' = e_G,$$

d'où le résultat (l'associativité a permis de ne pas mettre de parenthèses).

Reste à prouver que $e_G$ est aussi élément neutre à droite :

$$ge_G = g(g'g) = (gg')g = e_G g = g,$$

d'où le résultat.

**2** Il s'agit de montrer que $G$ admet un élément neutre, et que tout élément de $G$ admet un symétrique.

Fixons un élément $a$ de $G$. Par hypothèse, il existe un élément $e$ de $G$ tel que $ea = a$ (en prenant $b = a$ dans l'assertion $\star$). En multipliant cette relation à droite par $b$, où $b$ décrit $G$, et en utilisant encore $\star$, on constate que $e$ est élément neutre à gauche de $G$. De la même manière, $G$ admet un élément neutre à droite $e'$, puis $e = ee' = e'$.

Par hypothèse $\star$, il existe $a'$ et $a''$ dans $G$ tels que $e = aa' = a''a$, puis $a' = a''aa' = a''$, donc $a$ admet un symétrique.

$G$ est bien un groupe.

**3** Fixons $a \in G$. $a$ étant simplifiable, les applications $\alpha_a\ : g \mapsto a \cdot g$ et $\beta_a\ : g \mapsto g \cdot a$ de $G$ dans $G$ sont injectives, donc bijectives puisque $G$ est fini. En particulier, $a$ admet un antécédent par $\alpha_a$, *i.e.* il existe $e \in G$ tel que $a = ae$. On a donc, pour tout $b \in G$, $ba = bae$. Or, par surjectivité de $\beta_a$, $ba$ décrit $G$ lorsque $b$ décrit $G$, donc $e$ est élément neutre à droite de $G$. De même $G$ admet un élément neutre à gauche, qui s'avère ensuite égal à $e$, et les surjectivités de $\alpha_a$ et $\beta_a$ appliquées à $e$ montrent que $a$ admet un symétrique.

**Remarque :** en fait, cette question se ramène facilement à la précédente, la finitude de $G$ permettant de passer d'une injectivité (ce que l'on suppose dans cette question) à une surjectivité (ce que l'on suppose dans la question précédente).

**Remarque :** comme d'habitude, on doit se demander si les hypothèses peuvent être affaiblies. La finitude de $G$ ne peut être omise, comme le montre l'exemple de $(\mathbb{N}, +)$.

## 2. Anneaux, corps

Corrigé 91 (Morphisme d'anneaux)

La réponse est non. Par exemple, il n'existe pas de morphisme d'anneaux de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{Z}$. En effet, si on disposait d'un tel morphisme $\varphi$, alors on aurait

$$2\varphi(1/2) = \varphi(1) = 1,$$

d'où l'absurdité $\varphi(1/2) = \frac{1}{2}$.
**Remarque :** autre exemple (moins intéressant) : si $A$ et nul et pas $B$, alors un morphisme d'anneaux $\psi$ de $A$ vers $B$ doit vérifier à la fois $\psi(0_A) = 0_B$ et $\psi(1_A) = 1_B$, ce qui est impossible puisque $0_A = 1_A$ et que $0_B \neq 1_B$.
**Remarque :** en revanche, entre deux groupes, il existe au moins un morphisme, le morphisme trivial (envoyant tout élément du premier sur l'élément neutre du second).

Corrigé 92 (Morphisme de corps)

Soit $\varphi$ un morphisme de corps de $K$ vers $L$. Vérifions que $\ker(\varphi)$ est trivial, *i.e.* réduit à $0_K$. Soit $x \in K \setminus \{0_K\}$. $x$ est donc inversible, puis

$$\varphi(x)\varphi(x^{-1}) = \varphi(xx^{-1}) = \varphi(1_K) = 1_L,$$

donc $\varphi(x) \neq 0_L$ : $x \notin \ker(\varphi)$.
$\varphi$ est donc bien injectif.
**Remarque :** en examinant cette preuve, on constate plus généralement que, étant donné un morphisme d'anneaux $\psi\ : A \to B$, les inversibles de $A$ ne sont jamais dans le noyau de $\psi$ (sauf dans le cas peu intéressant où $B$ est l'anneau nul).

Corrigé 93 (Anneau intègre fini)

Il manque le fait que tout élément non nul soit inversible. Soit donc un tel anneau $A$, et $a \in A \setminus \{0_A\}$. L'application

$$b \mapsto ab$$

de $A$ dans $A$ est injective (puisque $A$ est intègre), et donc bijective puisque $A$ est fini. En particulier, $1_A$ admet un antécédent par cette application, donc $a$ est inversible.
**Remarque :** $A$ étant intègre, il est commutatif, il suffisait donc de trouver un inverse à droite (comme on l'a fait).
**Remarque :** en fait, tout anneau fini non nul sans diviseur de zéro est un corps (c'est plus ou moins le théorème de Wedderburn), mais la démonstration dépasse largement le cadre de la prépa.

Corrigé 94 (Anneau des endomorphismes d'un groupe commutatif)

Il est clair que $+$ et $\circ$ sont des lois de composition interne sur $\mathrm{End}(G)$, associatives, et que $+$ est commutative (puisqu'elle l'est dans $G$).
De plus, l'application identiquement nulle $x \mapsto e_G$ et l'application identique $x \mapsto x$ sont clairement des élements neutres respectifs pour $+$ et $\circ$ dans $\mathrm{End}(G)$.
Tout élément $f$ de $\mathrm{End}(G)$ admet $-f\ : x \mapsto -(f(x))$ pour symétrique dans $\mathrm{End}(G)$.
Vérifions la distributivité de la composition par rapport à l'addition (qui est le point le plus difficile) : soit $f, g, h \in \mathrm{End}(G)$.
Soit $x \in G$.
On a , par définition des termes ci-dessous

$$\begin{aligned}((f+g)\circ h)(x) &= (f+g)(h(x)) \\ &= f(h(x)) + g(h(x)) \\ &= (f\circ h + g\circ h)(x),\end{aligned}$$

donc $\circ$ est distributive à droite de $+$.

On a également,

$$\begin{aligned}(h\circ(f+g))(x) &= h((f+g)(x))\\ &= h(f(x)+g(x))\\ &= h(f(x))+h(g(x))\\ &= (h\circ f+h\circ g)(x),\end{aligned}$$

où la troisième égalité se justifie par le fait que $h$ soit un endomorphisme de $G$, donc $\circ$ est distributive à gauche de $+$.

$(\mathrm{End}(G),+,\circ)$ est bien un anneau.

**Remarque :** en général, cet anneau n'est pas commutatif, car la composition n'est pas commutative (sauf exception).

**Remarque :** il faut bien mettre en valeur la différence d'argumentation pour les deux distributivités. En fait, la distributivité à droite de $\circ$ par rapport à $+$ est toujours vérifiée, même si les fonctions considérées ne sont pas des morphismes (par exemple, $(\cos+\sin)\circ\exp = \cos\circ\exp+\sin\circ\exp$, mais $\exp\circ(\cos+\sin)\neq\exp\circ\cos+\exp\circ\sin$).

Corrigé 95 (Éléments nilpotents d'un anneau)

**1** La matrice $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ convient.

**2** Raisonnons par l'absurde, en supposant disposer de $a\in A$ nilpotent et inversible. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $a^n=0_A$. On a $a^n=0_A$, donc, puisque $a$ et $a^{-1}$ commutent

$$1_A=(aa^{-1})^n=a^n(a^{-1})^n=0_A,$$

ce qui contredit le fait que $A$ soit non nul.

**3** L'application partie imaginaire $\mathrm{Im}\ :\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ est un endomorphisme de $(\mathbb{C},+)$, non nul (car non nul en $i$ par exemple), de carré nul (carré s'entendant au sens de la composition).

**4** 3 dans l'anneau $\mathbb{Z}$ n'est ni nilpotent, ni inversible.

Autre exemple : la matrice $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ n'est ni nilpotente, ni inversible (et c'est un diviseur de zéro).

**5** Supposons $x$ nilpotent, et soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $x^n=0_A$. On utilise la formule de Bernoulli aux éléments $1_A$ et $x$ (qui commutent bien) :

$$1=1^n-x^n=(1-x)\sum_{k=0}^{n-1}x^k=\sum_{k=0}^{n-1}x^k(1-x),$$

donc $1-x$ est inversible d'inverse $\sum_{k=0}^{n-1}x^k$ (que l'on peut aussi écrire $\sum_{k\in\mathbb{N}}x^k$, puisque $x^k=0$ dès que $k\geqslant n$).

**6** Supposons que $x$ et $y$ commutent, et qu'il existe $m,n\in\mathbb{N}^*$ tels que $x^m=y^n=0$.

Comme $x$ et $y$ commutent, $(xy)^m=x^my^m=0$, donc $xy$ est nilpotent.

**Remarque :** en examinant cette preuve on constate que si deux éléments d'un anneau commutent et que l'un (au moins) d'entre eux est nilpotent, alors leur produit l'est aussi.

Nous voulons maintenant montrer que $x+y$ est nilpotent, *i.e.* qu'il existe $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $(x+y)^p=0$.

Or la formule du binôme de Newton s'applique, puisque $x$ et $y$ commutent :

$$(x+y)^p=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}x^ky^{p-k}$$

Pour que $(x+y)^p$ soit nul, il suffit que tous les termes de la somme ci-dessus le soient. Soit $k \in [\![0,p]\!]$ : pour que $\binom{p}{k}x^k y^{p-k} = 0$, il suffit que $x^k = 0$ ou $y^{p-k} = 0$, et donc il suffit que $k \geqslant m$ ou $p - k \geqslant n$ (soit encore $k \leqslant p - n$).

Ainsi, en prenant $p = m + n$, on obtient bien $(x+y)^p = 0$, donc $x + y$ est nilpotent.

**Remarque :** on pouvait même prendre $p = m + n - 1$.

**Remarque :** l'hypothèse de commutation est essentiel, comme le montre l'exemple de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Corrigé 96 (Centre d'un anneau)

$C$ est une partie de $A$, comprenant $1_A$.

De plus, soit $b, c \in C$, et $a \in A$. On a

$$(b-c)a = ba - ca = ab - ac = a(b-c)$$

donc $C$ est stable par différence, et

$$a(bc) = (ab)c = (ba)c = b(ac) = b(ca) = (bc)a,$$

donc $C$ est stable par produit.

Au final, $C$ est bien un sous-anneau de $A$.

Corrigé 97 (Idéaux)

**1** Soit $\alpha \in A$. $\alpha A$ est l'image de l'endomorphisme $x \mapsto \alpha x$ (c'est un morphisme par ditributivité) : c'est donc un sous-groupe de $A$ (on pouvait aussi dire que c'était une partie non vide stable par différence).

De plus, pour tout $a, x \in A$, $a(\alpha x) = \alpha(ax)$ puisque l'anneau est supposé commutatif : la seconde condition est aussi vérifiée, et $\alpha A$ est bien un idéal de $A$.

Comme $\{0\} = 0A$ et $A = 1A$, $\{0\}$ et $A$ sont bien des idéaux de $A$ (il était également facile de le montrer directement).

**2** Supposons que $A$ soit un corps, et soit $\mathcal{I}$ un idéal de $A$ non réduit à 0 : soit $a \in \mathcal{I} \setminus \{0\}$. Comme $A$ est un corps et que $a$ est non nul, il est inversible. D'après la seconde propriété, $1 = a^{-1}a \in \mathcal{A}$. Toujours d'après cette propriété, pour tout $x \in A$, $x = x \cdot 1 \in \mathcal{I}$, donc $\mathcal{I} = A$.

Réciproquement, supposons que $A$ ne possède que $\{0\}$ et $A$ pour idéaux. Nous voulons montrer que $A$ est un corps. Il reste à montrer que tout élément non nul est inversible.

Soit $a \in A \setminus \{0\}$. L'idéal $aA$ possédant un élément non nul (à savoir $a$), $aA = A$. En particulier, $1 \in aA$, ce qui montre que $a$ est inversible, d'où le résultat.

**3** Un idéal de $\mathbb{Z}$ doit déjà en être un sous-groupe, et donc de la forme $a\mathbb{Z}$ pour un certain $a \in \mathbb{N}$ (cela se montre en utilisant la division euclidienne).

Réciproquement, pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $a\mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$ (par la première question), les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont donc les $a\mathbb{Z}$, où $a$ décrit $\mathbb{N}$.

**Remarque :** un idéal de la forme $aA$ est dit principal. Un anneau (commutatif) dans lequel tout anneau est principal est dit principal. Nous venons donc de montrer que $\mathbb{Z}$ est principal (tous ne le sont pas !).

Corrigé 98 (Anneau des entiers de Gauss)

Nous montrons que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$ : pour cela on vérifie qu'il possède 1, qu'il est stable par différence et par produit (détails laissés au lecteur).

Cherchons les inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

*Analyse* Soit $z \in \mathbb{Z}[i]^\times$ : soit $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tels que $z = a + ib$ et $z^{-1} = c + id$. On a donc

$$(a + ib)(c + id) = 1,$$

puis, en passant aux carrés des modules :

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = 1,$$

donc $a^2 + b^2 = 1$, puis $z = a + ib \in \{1, -1, i, -i\}$.

*Synthèse* Réciproquement, $1$, $-1$, $i$ et $-i$ sont bien des éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$ :

$$\mathbb{Z}[i]^\times = \{1, -1, i, -i\}.$$

Corrigé 99 (Groupe d'automorphismes d'une extension quadratique de $\mathbb{Q}$)

On montre que $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$. Pour ce faire, on vérifie que $1 \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$, que $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ est stable par différence (essentiellement parce que $\mathbb{Q}$ l'est), et enfin que $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \setminus \{0\}$ est stable par quotient. Soit $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, tels que $z = a + \sqrt{3}b$ et $z' = c + \sqrt{3}d$ soient non nuls, *i.e.* $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(c, d) \neq (0, 0)$, par irrationnalité de $\sqrt{3}$.

On a, en multipliant par la quantité conjuguée $c - \sqrt{3}d$ (non nulle par irrationnalité de $\sqrt{3}$)

$$\frac{z}{z'} = \frac{(a + \sqrt{3}b)(c - \sqrt{3}d)}{c^2 - 3d^2} = \frac{ac - 3bd}{c^2 - 3d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 - 3d^2}\sqrt{3},$$

donc $\frac{z}{z'} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ ($\frac{ac-3bd}{c^2-3d^2}$ et $\frac{bc-ad}{c^2-3d^2}$ sont rationnels).

$\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ est donc bien un corps.

Déterminons ses automorphismes :

*Analyse* Soit $\varphi$ un automorphisme de ce corps. On a en particulier, pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$,

$$q\varphi(p/q) = \varphi(p) = p\varphi(1) = p, \quad i.e. \varphi(p/q) = p/q.$$

$\varphi$ laisse donc fixe tout nombre rationnel.

De plus,

$$(\varphi(\sqrt{3}))^2 = \varphi(3) = 3,$$

puis $\varphi(\sqrt{3}) = \varepsilon\sqrt{3}$, où $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

Soit $a, b \in \mathbb{Q}$. On a donc $\varphi(a + b\sqrt{3}) = a + \varepsilon\sqrt{3}b$, ce qui laisse donc deux possibilités pour $\varphi$.

*Synthèse* Réciproquement, $\mathrm{Id}_{\mathbb{Q}(\sqrt{3})}$ est bien un automorphisme de ce corps, ainsi que

$$\psi\ : a + b\sqrt{3} \mapsto a - b\sqrt{3}$$

(vérifications laissées au lecteur).

**Remarque :** $\psi$ est bien définie en tant qu'application par existence mais aussi *unicité* de l'écriture d'un élément de $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ sous la forme $a + b\sqrt{3}$, avec $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$.

Corrigé 100 (Radical d'un idéal)

$\sqrt{12\mathbb{Z}} = \sqrt{72}\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z}$.

**Remarque :** ce n'est pas demandé dans l'exercice, mais on peut montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal contenant $I$.

Corrigé 101 (Une caractérisation des corps)

Il s'agit encore une fois de montrer que tout élément non nul $x$ admet un inverse. Considérons l'idéal principal $x^2A$. Comme cet idéal est premier, et que $x^2 = x \cdot x$, on a $x \in x^2A$, *i.e.* il existe $y \in A$ tel que $x = x^2y$. on aimerait maintenant simplifier par $x$. il suffirait pour cela que $x$ soit simplifiable, *i.e.* qu'il ne soit pas un diviseur de zéro.

Or par hypothèse, l'idéal $\{0\}$ est premier, ce qui se traduit par le fait que $A$ n'admette pas de diviseur de zéro, d'où le résultat.

Corrigé 102 (Corps algébriquement clos)

Soit $K$ un corps fini. Le polynôme non constant $\prod_{x\in K}(X-x)+1$ n'a pas de racine dans $K$, ce corps n'est donc pas algébriquement clos.

Le résultat est établi par contraposition.

## 3. Compléments sur les groupes

Corrigé 103 (Théorème de Lagrange)

Corrigé 104 (Ordre d'un élément d'un groupe)

Corrigé 105 (Résultats élémentaires sur les ordres)

Corrigé 106 (Racine carrée dans un groupe d'ordre impair)

CHAPITRE 11

# Équations différentielles (énoncés)

Aller aux corrigés 12
Dans tous les exercices, on demande de trouver des solutions réelles.

## 1. Équations différentielles linéaires d'ordre un

**Exercice 107**

Résoudre :
**1** $y' - \frac{x}{1+x^2}y = \frac{1}{1+x^2} + \frac{3}{\sqrt{1+x^2}}$.
**2** $y' + y\ \mathrm{cotan}(x) = \sin x$.
**3** $y' + y = xe^{3x}\cos(x) + (x-1)e^{-x}$.
**4** $y' - 2y = (x^2+1)e^{4x} + (x^3 - x^2 + x + 1)e^{2x}$.
**5** $y' + y = \cos x + \sin x$
**6** $y' - 2xy = \operatorname{sh} x - 2x \operatorname{ch} x$
**7** $y' + y\sin x = \sin 2x$.

## 2. Équations différentielles linéaires d'ordre deux à coefficients constants

**Exercice 108**

Résoudre
**1** $y'' - 2y' + y = \cos(mx)e^x$, où $m \in \mathbb{R}$.
**2** $y'' - 2y' + y = x^3e^x + 2x\cos(x) + x^3 + 3$.
**3** $y'' + y = x\cos(x)^3$.

**Exercice 109**

Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer la solution $f$ de l'équation :

$$y'' - 2y' + (1+m^2)y = (1+4m^2)\cos(mx)$$

qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

**Exercice 110**

Résoudre l'équation différentielle $x'' + x = \sin(t)$, puis l'équation différentielle $x'' + x = |\sin(t)|$.

## 3. Équations différentielles d'un autre type

Exercice 111

Résoudre l'équation de Bernoulli $x^2y^2 - xy' - 3y = 0$ en supposant que $y$ ne s'annule pas et en posant $z = \frac{1}{y}$.

Exercice 112

**1** Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation

$$(\mathcal{E}) \quad y'' + \frac{1}{x^2}y = 0.$$

**Indication :** on pourra utiliser le changement de variable $t = \ln(x)$.
**2** L'équation différentielle $(\mathcal{E})$ possède-t-elle des solutions non bornées ? Déterminer les solutions bornées de $(\mathcal{E})$.

Exercice 113

Résoudre l'équation $y''' = y$.

Exercice 114

Trouver les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $xy' = y + \sin(x)y^2$ ne s'annulant pas.
**Indication :** on pourra poser $z = 1/y$.

Exercice 115

Résoudre l'équation $y' = e^{x+y}$.

## 4. Équations fonctionnelles ou problèmes se ramenant à des équations différentielles

### Exercice 116

On se propose de montrer qu'il existe une seule fonction $f$ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$(f(0) = -4) \wedge (\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x)f'(x) = 1)$$

et de trouver cette fonction.

**1** On suppose disposer d'une telle fonction $f$. On considère $g\ : x \mapsto f(-x)f(x)$.

**a** Montrer que $f$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

**b** Montrer que $g$ est constante et trouver sa valeur.

**c** Montrer que $f$ est solution de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{16}y$ et qu'elle vérifie $f(0) = -4$.

**2** En déduire le résultat voulu.

### Exercice 117

**1** Déterminer les fonctions $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que

$$f'(x) + f(-x) = e^x,$$

pour tout réel $x$.

**2** Déterminer les fonctions $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que

$$f''(x) + f(-x) = 0,$$

pour tout réel $x$.

### Exercice 118

Déterminer les fonctions $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que :

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y),$$

pour tous réels $x$ et $y$.

### Exercice 119

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + \int_0^x (x - t)f(t)\mathrm{d}t = 1.$$

### Exercice 120

Résoudre sur $\mathbb{R}$ :

**1** $xy' + y = x^3$.

**2** $xy' - y = 0$.

**3** $x^2y' + y = 0$.

**4** $xy' - 2y = 0$.

### Exercice 121

Résoudre sur $\mathbb{R}$

**1** $x(x^2 - 1)y' + 2y = x^2$.

**2** $xy' - 2y = x^4$.

**3** $(e^x - 1)y' + (e^x + 1)y = 3 + 2e^x$.

CHAPITRE 12

# Équations différentielles (corrigés)

Aller aux énoncés 11
Dans tous les exercices, on demande de trouver des solutions réelles.

## 1. Équations différentielles linéaires d'ordre un

**Corrigé 107 (Ordre un sans problème de raccord)**

On note à chaque fois $\mathcal{E}$ l'équation étudiée, $\mathcal{S}_\mathcal{E}$ son ensemble de solutions, $\mathcal{H}$ son équation homogène associée $\mathcal{S}_\mathcal{H}$ son ensemble de solutions.

**1** $\mathcal{S}_\mathcal{H} = \{x \mapsto C\sqrt{1+x^2}, C \in \mathbb{R}\}$.

On utilise le principe de superposition. Pour le second membre $\frac{1}{1+x^2}$, on trouve $x \mapsto x$ pour solution évidente.

Pour le second membre $\frac{3}{\sqrt{1+x^2}}$, on utilise la méthode de variation de la constante, en cherchant une solution de la forme $x \mapsto C(x)\sqrt{1+x^2}$. On trouve $x \mapsto 3\arctan(x)\sqrt{1+x^2}$ pour solution particulière.

On a donc

$$\mathcal{S}_\mathcal{E} = \{x \mapsto x + 3\arctan(x)\sqrt{1+x^2} + C\sqrt{1+x^2}, C \in \mathbb{R}\}$$

**2**

$$\mathcal{S}_\mathcal{E} = \{x \mapsto \frac{x}{2\sin(x)} - \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{C}{\sin(x)}, C \in \mathbb{R}\}$$

**3**

$$\mathcal{S}_\mathcal{E} = \{x \mapsto \left(\frac{4}{17}x - \frac{15}{289}\right)e^{3x}\cos(x) + \left(\frac{1}{17}x - \frac{8}{289}\right)e^{3x}\sin(x) + \left(\frac{x^2}{2} - x + C\right)e^{-x}, C \in \mathbb{R}\}$$

**4**

$$\mathcal{S}_\mathcal{E} = \{x \mapsto \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right)e^{4x} + \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + C\right)e^{2x}\}, C \in \mathbb{R}$$

**5**

$$\mathcal{S}_\mathcal{E} = \{x \mapsto \sin(x) + Ce^{-x}, C \in \mathbb{R}\}$$

**6**

$$\mathcal{S}_\mathcal{E} = \{x \mapsto \mathrm{ch}(x) + Ce^{x^2}, C \in \mathbb{R}\}$$

**7**

$$\mathcal{S}_\mathcal{E} = \{x \mapsto 2(1+\cos(x)) + Ce^{\cos(x)}, C \in \mathbb{R}\}$$

## 2. Équations différentielles linéaires d'ordre deux à coefficients constants

Corrigé 108 (Ordre deux à coefficients constants)

Résoudre

**1** Si $m \neq 0$ :

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \{x \mapsto -\frac{\cos(mx)}{m^2}e^x + (\lambda x + \mu)e^x, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

Si $m = 0$ :

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \{x \mapsto 1 + (\lambda x + \mu)e^x, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

**2**

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \{x \mapsto \frac{x^5}{20}e^x - \cos(x) - \sin(x) - x\sin(x) + x^3 + 6x^2 + 18x + 27 + (\lambda x + \mu)e^x, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

**3**

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \{\frac{3}{16}x^2\sin(x) + \frac{3}{128}\sin(x) + \frac{3}{16}x\cos(x) - \frac{1}{32}x\cos(3x) + \frac{3}{128}\sin(3x) + A\sin(x) + B\cos(x), (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

Corrigé 109 (Exemple de problème de Cauchy pour l'ordre deux)

**Remarque :** l'existence et l'unicité d'une solution à ce problème de Cauchy est attestée par le cours (il n'y a donc pas de synthèse à effectuer).

L'équation caractéristique associée à l'équation

$$(\mathcal{E}) \quad y'' - 2y' + (1 + m^2)y = (1 + 4m^2)\cos(mx)$$

admet 1 pour unique solution lorsque $m = 0$, et les complexes distincts $1 + im$ et $1 - im$ lorsque $m \neq 0$.

On observe immédiatement que la solution au problème de Cauchy considéré est, dans le cas où $m = 0$, la $\boxed{\text{fonction constante de valeur 1.}}$

On se place désormais dans le cas où $m \neq 0$. On cherche d'abord une solution particulière de

$$(\mathcal{E}') \quad y'' - 2y' + (1 + m^2)y = (1 + 4m^2)e^{imx},$$

sous la forme $x \mapsto \lambda e^{imx}$ pour un certain complexe $\lambda$ (puisque $im \notin \{1 + im, 1 - im\}$, $m$ étant supposé réel), que l'on détermine par identification.

On trouve $\lambda = 1 + 2im$ : une solution particulière de $\mathcal{E}'$ est donc $x \mapsto (1 + 2im)e^{imx}$.

Les coefffficients 1, $-2$ et $1 + m^2$ devant $y''$, $y'$ et $y$ étant réels (car $m$ l'est), une solution particulière de $\mathcal{E}$ est $x \mapsto \cos(mx) - 2m\sin(mx)$. La solution générale de $\mathcal{E}$ est donc

$$x \mapsto \cos(mx) - 2m\sin(mx) + (a\cos(mx) + b\sin(mx))e^x,$$

où $a$ et $b$ décrivent $\mathbb{R}$. En cherchant $f$ sous cette forme, on constate que les conditions initiales conduisent à l'unique choix $(a, b) = (0, 2m)$. L'unique solution au problème de Cauchy considéré est donc :

$$\boxed{x \mapsto \cos(mx) + 2m\sin(mx)(e^x - 1).}$$

Corrigé 110 (Centrale MP 08)

### 3. Équations différentielles d'un autre type

Corrigé 111 (Une équation de Bernoulli)

Corrigé 112 (Centrale MP 07)

**1** On cherche les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on ait :

$$f''(x) + \frac{1}{x^2}f(x) = 0.$$

Pour cela, on utilise le changement de variable, en considérant $g = f \circ \exp$ (et donc $f = g \circ \ln$).

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ :

$$f'(x) = \frac{g'(\ln(x))}{x}$$

puis

$$f''(x) = \frac{g''(\ln(x))}{x^2} - \frac{g'(\ln(x))}{x^2}$$

de sorte que

$$f''(x) + \frac{1}{x^2}f(x) = \frac{g''(\ln(x))}{x^2} - \frac{g'(\ln(x))}{x^2} + \frac{g(\ln(x))}{x^2}$$

Ainsi, $f$ est solution de $\mathcal{E}$ si et seulement si $g$ est solution de

$$y'' - y' + y = 0,$$

*i.e.* il existe des réels $\lambda$ et $\mu$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$g(t) = \left(\lambda \cos(\sqrt{3}t/2) + \mu \sin(\sqrt{3}t/2)\right) e^{t/2}$$

Les solutions de $\mathcal{E}$ si et seulement si il existe des réels $\lambda$ et $\mu$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ :

$$f(x) = \left(\lambda \cos(\sqrt{3}\ln(x)/2) + \mu \sin(\sqrt{3}\ln(x)/2)\right) \sqrt{x}$$

**2** La seule solution bornée est la fonction identiquement nulle.

Corrigé 113 (Équation différentielle linéaire d'ordre trois)

On peut déjà chercher des fonctions solutions. Il est clair que les combinaisons linéaires des fonctions $\alpha : x \mapsto \exp(x)$, $\beta : x \mapsto \cos(\sqrt{3}x/2)e^{-x/2}$ et $\gamma : x \mapsto \sin(\sqrt{3}x/2)e^{-x/2}$ vérifient cette équation.

Réciproquement, utilisons une sorte de variation de la constante : il n'y a pas de restriction à chercher les solutions sous la forme $f : x \mapsto C(x)e^x$, où $C$ est trois fois dérivable (car la fonction exponentielle est trois fois dérivable, ainsi que $1/\exp$).

Cherchons tout d'abord les solutions complexes :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'''(x) = (C'''(x) + 3C''(x) + 3C'(x) + C(x))e^x,$$

donc $f$ est solution de $\mathcal{E}$ si et seulement si $C'$ est solution de

$$y'' + 3y' + 3y = 0,$$

*i.e.* il existe des complexes $\lambda$ et $\mu$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait :

$$C'(x) = (\lambda \exp(jx) + \mu \exp(j^2x),$$

soit encore il existe des complexes $A$, $B$ et $C$ tels que

$$C(x) = (A \exp(jx) + B \exp(j^2x) + C,$$

soit enfin $f$ est combinaison linéaire de $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$.

Pour passer aux solutions réelles, on sait que les combinaisons linéaires à coefficients réels de $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ conviennent, et si, réciproquement, $f$ est une solution réelle, alors c'est une solution complexe, donc il existe des coefficients complexes $a$, $b$ et $c$ tels que $f = a\alpha + b\beta + c\gamma$, puis, comme $f$, $\alpha$ et $\beta$ sont à valeurs réelles,

$$f = \mathrm{Re}(f) = \mathrm{Re}(a)\alpha + \mathrm{Re}(b)\beta + \mathrm{Re}(c)\gamma.$$

Ainsi, une fonction à valeurs réelles est solution de $\mathcal{E}$ si et seulement si $f$ est combinaison linéaire à coefficients réels des fonctions $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$.

**Remarque :** voir un des sujets de DM pour une autre approche.

Corrigé 114 (Équation différentielle non linéaire d'ordre 2)

Corrigé 115 (Équation différentielle à variables séparées)

## 4. Équations fonctionnelles ou problèmes se ramenant à des équations différentielles

Corrigé 116 (Équation fonctionnelle)

Corrigé 117 (Équations pseudo différentielles)

Corrigé 118 (Équation fonctionnelle avec deux variables)

Corrigé 119 (Équation fonctionnelle avec intégrale)

Corrigé 120 (Problèmes de raccord)

Corrigé 121 (Toujours des problèmes de raccord)

CHAPITRE 13

# Arithmetique (énoncés)

Aller aux corrigés 14

## 1. Congruences, équations diophantiennes, division euclidienne

### Exercice 122

**1** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 3 ne divise jamais $n^2 + 1$.
**2** Montrer que le produit de quatre entiers consécutifs est divisible par 24.
**3** Montrer que 39 divise $7^{37} + 13^{37} + 19^{37}$.
**4** Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Si 9 divise $a^3 + b^3 + c^3$, alors 3 divise $a$ ou $b$ ou $c$.
**5** Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que $a^2 + b^2$ est divisible par 7 si et seulement si $a$ et $b$ le sont.

### Exercice 123

**1** Trouver, pour tout entier naturel non nul $n$, le reste de la division de $\sum_{k=1}^{n} k$ par 2.
**2** Trouver le reste de la division euclidienne de $234^{122}$ par 7.
**3** Trouver le reste de la division de $(a^2 + (a-1)^2)^2$ par $4a^2$ ($a \in \mathbb{N}^*$).

### Exercice 124

**1** Trouver le chiffre des unités de $7^{7^7}$.
**2** Trouver les deux derniers chiffres de la représentation décimale de $19^{19^{19}}$.
**3** Montrer que chaque nombre du type

$$2^{2^n} + 1$$

(où $n \geqslant 2$) se termine par 7.
**4** Montrer qu'un nombre entier positif de six chiffres dont la représentation décimale est de la forme « abcabc » est nécessairement divisible par 13.
**5** On admet que $2^{29}$ est un nombre de 9 chiffres, tous différents (en base 10). Quel est le chiffre manquant ?
**6** Trouver la somme des chiffres de la somme des chiffres de la somme des chiffres de $4444^{4444}$.

Exercice 125

**1** Montrer qu'il n'existe pas de couple d'entiers $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que
$$x^2 - 5y^2 = 3.$$

**2** L'équation diophantienne
$$x^3 + 2y^3 = 4z^3$$
possède-t-elle dans $\mathbb{Z}^3$ une autre solution que le triplet nul ?

Exercice 126

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2. Calculer le reste de la division euclidienne de $(n-1)!$ par $n$.

## 2. Diviseurs, pgcd, ppcm

Exercice 127

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fraction $\frac{n^3+n}{2n^2+1}$ est irréductible.

Exercice 128

**1** Soit $a$ et $b$ deux entiers relatifs non nuls et premiers entre eux. Montrer qu'il existe une infinité de couples $(x, y)$ de $\mathbb{Z}^2$ tels que $ax + by = 1$. Montrer que si $(x_0, y_0)$ est l'un d'eux, les autres sont donnés par $x = x_0 + kb$ et $y = y_0 - ka$, $k$ décrivant $\mathbb{Z}$.
**2** En déduire que si $a$ et $b$ sont deux entiers relatifs non nuls, il existe une infinité de couples d'entiers $(x, y)$ tels que $ax + by = a \wedge b$. Expliquer comment calculer les solutions d'une telle équation (appliquer scrupuleusement l'algorithme d'Euclide à $|a|$ et $|b|$).
**3** En déduire la résolution générale d'une équation du type $ax + by = c$.
**4** Résoudre $2520x - 3960y = 6480$ $(x, y \in \mathbb{Z})$.

Exercice 129

Montrer que $\text{ppcm}(1, 2, \ldots, 2n) = \text{ppcm}(n + 1, n + 2, \ldots, 2n)$.

Exercice 130

Soit $n$ un entier strictement positif, et soit $d(n)$ le nombre d'entiers positifs divisant $n$. Prouver que $d(n)$ est impair si et seulement si $n$ est un carré parfait (c'est-à-dire le carré d'un nombre entier).

Exercice 131

Pour tout entier naturel non nul $n$, on note $S(n)$ la somme de ses diviseurs naturels. Montrer que si $m$ et $n$ sont deux entiers naturels non nuls premiers entre eux, alors $S(mn) = S(m)S(n)$.

Exercice 132

Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}^*$ et $b_i = \prod_{j \neq i} a_j$. Montrer que $a_1, \ldots, a_n$ sont deux à deux premiers entre eux si et seulement si $b_1, \ldots, b_n$ sont premiers entre eux dans leur ensemble.

### 3. Nombres premiers, nombres composés, divers

Exercice 133

Montrer que si $p$ et $8p-1$ sont premiers, alors $8p+1$ est composé (on pourra considérer la congruence de $p$ modulo 3).

Exercice 134

Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4n+3$.

Exercice 135

Trouver une condition nécessaire sur $n \in \mathbb{N}^*$ pour que $2^n - 1$ soit premier. Même question avec $2^n + 1$.

Exercice 136

Montrer que, peu importe la base, le nombre 10101 est composé.

Exercice 137

Montrer que pour tout entier strictement positif $n$, il existe $n$ nombres consécutifs composés.

Exercice 138

On pose $F_n = 2^{(2^n)} + 1$.

**1** Montrer que $\prod_{k=0}^{n-1} F_k = F_n - 2$.

**2** Si $n \neq m$, quel est le pgcd de $F_n$ et de $F_m$ ?

**3** À l'aide de ce qui précède, montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

### Exercice 139

En observant que $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$, et en considérant une suite géométrique de raison $\sqrt{2} - 1$, montrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

### Exercice 140

Deux mathématiciens, $P$ et $S$, cherchent deux nombres entre 2 et 200. $P$ connaît leur produit, et $S$ leur somme. Tous les deux réfléchissent, puis s'ensuit la discussion suivante :

**1** P : Je ne peux pas déterminer ces deux nombres.

**2** S : Je le savais.

**3** P : Alors je les ai trouvés.

**4** S : Alors moi aussi.

Trouver ces nombres.

CHAPITRE 14

# Arithmetique (corrigés)

Aller aux énoncés 13

## 1. Congruences, équations diophantiennes, division euclidienne

Corrigé 122 (Divisibilité)

Corrigé 123 (Calculs de restes)

Corrigé 124 (Chiffres en base 10)

Corrigé 125 (Équations diophantiennes)

Corrigé 126 (Centrale MP 08)

## 2. Diviseurs, pgcd, ppcm

Corrigé 127 (Une fraction irréductible)

Corrigé 128 (Autour de la relation de Bézout)

Corrigé 129 (Égalité de ppcm)

Corrigé 130 (Une caractérisation des carrés parfaits)

Corrigé 131 (Somme des diviseurs)

Corrigé 132 (Entiers premiers entre eux dans leur ensemble)

## 3. Nombres premiers, nombres composés, divers

Corrigé 133 (Nombres premiers)

Corrigé 134 (Une petite partie du théorème de Dirichlet)

Corrigé 135 (Nombres de Mersenne et de Fermat)

Corrigé 136 (Nombre composé dans toute base)

Corrigé 137 (Nombres composés consécutifs)

Corrigé 138 (ENS Lyon 08))

Corrigé 139 (Irrationalité de $\sqrt{2}$, preuve originale)

Corrigé 140 (Transfert d'information)

CHAPITRE 15

# Suites (énoncés)

Aller aux corrigés 16

## 1. Borne supérieure, corps des nombres réels

**Exercice 141**

Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Montrer l'existence d'une suite $(a_n)$ d'éléments de $A$, de limite $\sup(A)$.

**Exercice 142**

Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que $A$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout réel $x$, il existe une suite d'éléments de $A$, de limite $x$.

**Exercice 143**

Soit $G$ un sous-groupe de $\mathbb{R}$ additif, non réduit à 0. Notons $a$ la borne inférieure de $G \cap \mathbb{R}_+^*$. Montrer que si $a > 0$, alors $G = a\mathbb{Z}$ (on dit que $G$ est discret). Montrer que si $a = 0$, alors $G$ est dense dans $\mathbb{R}$ (*i.e.* rencontre tout intervalle $]\alpha, \beta[$, où $\alpha < \beta$).

**Exercice 144**

**1** Montrer que tout endomorphisme du groupe $(\mathbb{Q}, +)$ est linéaire, *i.e.* de la forme $x \mapsto \alpha x$ pour un certain rationnel $\alpha$.

**2** Montrer que $\mathrm{Id}_{\mathbb{Q}}$ est l'unique automorphisme du corps des nombres rationnels.

**3** Montrer que $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ est l'unique automorphisme du corps des nombres réels.

**Exercice 145**

Une partie $U$ de $\mathbb{R}$ est dite ouverte si pour tout élément $u$ de $U$, il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]u - \varepsilon, u + \varepsilon[ \subset U$. Une partie $F$ de $\mathbb{R}$ est dite fermée si son complémentaire dans $\mathbb{R}$ est ouvert.
Montrer qu'une partie $F$ de $\mathbb{R}$ est fermée si et seulement si la limite de toute suite convergente d'éléments de $F$ appartient à $F$.

Exercice 146

Soit $A$ et $B$ deux parties non vides de $\mathbb{R}$.

**1** On suppose $B$ bornée et $A$ incluse dans $B$. Montrer que $A$ et $B$ admettent des bornes supérieures et inférieures (dans $\mathbb{R}$), et que

$$\inf(B) \leqslant \inf(A) \leqslant \sup(A) \leqslant \sup(B).$$

**2** On suppose que, pour tout couple $(a, b) \in A \times B$, $a \leqslant b$. Montrer que $A$ admet une borne supérieure, $B$ une borne inférieure, et que $\sup(A) \leqslant \inf(B)$.

**3** On suppose $A$ et $B$ majorées. On note $A+B$ l'ensemble des réels s'écrivant comme somme d'un élément de $A$ et d'un élément de $B$. Montrer que $A+B$ admet une borne supérieure, et que $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

## 2. Convergence, divergence

Exercice 147

Soit $l$ un réel, et $(u_n)$ une suite réelle. Les assertions suivantes sont-elles équivalentes à la convergence de la suite $(u_n)$ vers $l$ ?

**1** $\forall \varepsilon \in ]0,1[, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - l| \leqslant \varepsilon.$

**2** $\forall \varepsilon > 1000, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - l| \leqslant \varepsilon.$

**3** $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in [\![1000, +\infty[\![, \forall n \geqslant N, |u_n - l| \leqslant \varepsilon.$

**4** $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - l| \leqslant \varepsilon.$

**5** $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - l| < \varepsilon.$

**6** $\exists N \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \geqslant N, |u_n - l| \leqslant \varepsilon.$

## Exercice 148

**1** Étudier la convergence des suites suivantes : $u = \left(n - \sqrt{n^2 - n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, $v = \left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $w = \left(\frac{n \sin(n)}{n^2+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

**2** On considère $k$ réels $A_1, \ldots, A_k$, avec $A_1 \geqslant A_2 \geqslant \cdots \geqslant A_k \geqslant 0$. Évaluer

$$\lim_{n \to \infty} \left(A_1^n + \cdots + A_k^n\right)^{\frac{1}{n}}$$

**3** Étant donné $x$ réel, étudier la suite indexée par $\mathbb{N}^*$, de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} E(kx)$$

**4** Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^2}$ $(n \in \mathbb{N})$ converge (on pourra considérer la suite de terme général $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ $(n \geqslant 1)$).

**5** Étudier la convergence de la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{E(\sqrt{k+1}) - E(\sqrt{k})}{k+1}.$$

**6** Soit $\alpha$ un nombre irrationnel positif, et $(p_n, q_n)$ une suite de couples d'entiers naturels non nuls, telle que $\lim_n \frac{p_n}{q_n} = \alpha$. Montrer que les suites $(p_n)$ et $(q_n)$ divergent vers $+\infty$.

## Exercice 149

Montrer que toute suite de nombres entiers relatifs convergente est stationnaire.

## Exercice 150

Soient $u$ et $v$ deux suites à valeurs strictement positives, telles que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$. Montrer les implications suivantes :

$$(\lim v_n = 0 \Rightarrow \lim u_n = 0) \text{ et } (\lim u_n = +\infty \Rightarrow \lim v_n = +\infty).$$

## Exercice 151

Montrer que la suite de terme général $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ tend vers $+\infty$.

Exercice 152

On considère une suite $u = (u_n)_{n\geqslant 1}$ et la suite des *moyennes* $v = (v_n)_{n\geqslant 1}$, de terme général

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

**1** Montrer que si la suite $u$ croît, il en est de même de $v$.

**2** Montrer que si $u$ tend vers une limite finie ou infinie $l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $v$ tend vers $l$ (c'est le théorème de Cesàro).

**3** Montrer, en donnant un contre-exemple, que la réciproque est fausse.

**4** Soit $(u_n)$ une suite de réels strictement positifs, telle que la suite de terme général $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tende vers un réel $\lambda$. Montrer que la suite de terme général $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers $\lambda$.

Exercice 153

**1** Montrer que le sous-groupe $\mathbb{Z} + \pi\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (on admettra que $\pi$ est irrationnel). En déduire que la suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

**2** Retrouver ce résultat par un raisonnement élémentaire.

Exercice 154

**1** Montrer que si l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est injective, alors la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

**2** Soit $\varphi$ une permutation de $\mathbb{N}^*$ telle que la suite $\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)_n$ soit convergente. Que dire alors de $\lim_n \frac{\varphi(n)}{n}$ ?

## 3. Relations de comparaison, comportement à l'infini

Exercice 155

Trouver des équivalents simples des suites de termes généraux $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, de $\frac{e^n + n!}{n+1}$, $\frac{e^n + e^{-n} + n}{\sqrt{n^2+n} - n}$, $e^{n^2 + n! + \frac{1}{n}}$.

Exercice 156

**1** Montrer que la suite de terme général $\frac{n + 3\sin(n)}{2n + (-1)^n}$ converge.

**2** Montrer que la suite de terme général $\frac{E(\ln(n))}{\ln(n^2+n)}$ converge.

### Exercice 157

On définit la suite $u = (u_n)$ par son terme initial $u_0 = \frac{5}{2}$, et la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{5}{u_n}\right)$$

Montrer que $u$ converge vers une limite $l$ que l'on calculera, et qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\gamma \in ]0,1[$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n - l < \alpha\left(\gamma^{(2^n)}\right)$$

**Remarque :** la vitesse de convergence est remarquable, on dit qu'elle est (au moins) quadratique. Nous reverrons cette suite dans un cadre plus général ultérieurement.

### Exercice 158

On définit la suite de Fibonacci, $(u_n)$, par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et :

$$\forall n > 1, \quad u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

**1** Chercher les suites géométriques vérifiant la relation de récurrence (mais pas nécessairement les conditions initiales).
**2** Grâce à la question précédente, trouver une fonction $f$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = f(n)$.
**3** En déduire un équivalent simple de $(u_n)$, et la limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

### Exercice 159

Soit $(u_n)$ une suite de réels de limite nulle et telle que

$$u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}.$$

**1** Montrer que si l'on suppose $(u_n)$ décroissante, alors $u_n \sim \frac{1}{2n}$.
**2** Montrer que ce résultat peut tomber en défaut si l'on ne suppose plus $(u_n)$ décroissante.

### Exercice 160

Trouver des équivalents simples des suites de termes généraux $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ et $\sum_{k=0}^{n} k!$.

Exercice 161

**1** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x + \ln(x) = n$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$ admet une unique solution, que nous noterons $u_n$.
**2** Étudier la monotonie de $(u_n)$. En déduire la limite de cette suite.
**3** Montrer que $u_n \sim n$.
**4** Montrer que $u_n - n \sim -\ln(n)$.

Exercice 162

Soit $(u_n)_{n \geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n^5 + nu_n = 1$. Étudier $(u_n)$. Donner un développement asymptotique à deux termes de $u_n$.

Exercice 163

Si $n \in \mathbb{N}$, soit $x_n$ la solution de $\tan x = x$ qui appartient à $[n\pi, n\pi + \pi/2[$. Donner un développement de $x_n$ à la précision $1/n^2$.

## 4. Suites extraites

Exercice 164

Montrer que toute suite réelle non majorée admet une suite extraite divergeant vers $+\infty$.

Exercice 165

Montrer qu'une suite monotone dont une suite extraite est convergente est elle-même convergente.

Exercice 166

Soit $u = (u_n)$ une suite de réels, et soit $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite extraite de $u$ : il existe donc $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $v_n = u_{\varphi(n)}$, pour tout entier naturel $n$. Soit $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite extraite de $v$ ($\forall\, n \in \mathbb{N}, w_n = v_{\psi(n)}$). Montrer que $w$ est une suite extraite de $u$, et exprimer le terme général $w_n$ de $w$ en fonction de $u$, $\varphi$ et $\psi$ (et $n$).

Exercice 167

Soit $(u_n)$ une suite réelle. Montrer que si les suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent, alors $u$ converge.

Exercice 168

Donner un exemple de suite $(u_n)$ divergente, telle que pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, la suite extraite $(u_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

## 5. Suites adjacentes

Exercice 169

Soit $u = (u_n)$ une suite de réels positifs décroissante, de limite nulle. On pose, pour tout entier $n$ :

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$$

**1** Montrer que la suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie est convergente (on pourra montrer que les suites extraites $(v_{2n})$ et $(v_{2n+1})$ sont adjacentes).
**2** Soit $l = \lim_n v_n$. Montrer : $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |v_n - l| \leqslant u_{n+1}$.

Exercice 170

Soit $a, b$ deux réels, avec $0 < a \leqslant b$. On considère les suites $u$ et $v$ définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$, et :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

Montrer que $u$ et $v$ sont adjacentes. Leur limite commune est appelée moyenne arithmético-géométrique de $a$ et $b$.

## 6. Suite de nombres complexes

Exercice 171

Énoncer et montrer un théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites complexes.

Exercice 172

Soit $(z_n)$ la suite complexe définie par son terme initial $z_0 \in \mathbb{C}$ et la relation de récurrence

$$z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(z_n + |z_n|\right),$$

pour tout entier naturel $n$.
Étudier la convergence de $(z_n)$.

CHAPITRE 16

# Suites (corrigés)

Aller aux énoncés 15

## 1. Borne supérieure, corps des nombres réels

Corrigé 141 (Borne supérieure et suites)

Cas où $\sup A$ est un réel $l$ : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_n \in A \cap [l - \frac{1}{n}, l]$ (puisque $l$ est le plus petit des majorants de $A$). On a alors par encadrement la converence de $(a_n)$ vers $l$.

Dans le cas où $\sup(A) = +\infty$, il suffit de prendre, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un élement $a_n$ commun à $A$ et $[n, +\infty[$ (il en existe car $A$ n'est pas majorée) : cette suite d'élements de $A$ tend vers $+\infty$.

Corrigé 142 (Caractérisation séquentielle de la densité)

Supposons $A$ dense dans $\mathbb{R}$ : soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut trouver un point $a_n$ de $A$ dans $[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}]$ : cette suite de points de $A$ converge vers $x$.

Réciproquement, supposons que $A$ vérifie cette propriété séquentielle : soit $x$ et $y$ deux réels, où $x < y$. On peut trouver une suite $(a_n)$ de points de $A$ de limite $l = \frac{x+y}{2}$. En prenant $\varepsilon = \frac{y-x}{2}$ dans l'assertion formelle de convergence de $(a_n)$ vers $l$, on trouve un rang $N$ à partir duquel $|a_n - l| \leqslant \varepsilon$, *i.e.* $a_n \in [x, y]$. $a_N$ par exemple est un point de $A$ dans $[x, y]$.

D'où la densité de $A$ dans $\mathbb{R}$.

Corrigé 143 (Sous-groupes de $\mathbb{R}$)

Puisque $G$ n'est pas réduit à 0, il admet un élément non nul. Puisqu'il est en outre stable par passage à l'opposé (en tant que groupe additif), il possède un élément strictement positif, ce qui prouve l'existence de $a$.

Supposons $a > 0$. Montrons d'abord que $a \in G$. Raisonnons par l'absurde, en supposant $a \notin G$. Par définition de $a$, $2a$ ne minore par $G \cap \mathbb{R}_+^*$, et il existe donc un élément $b$ de $G$ dans $]a, 2a[$. De même, il existe $c \in G \cap ]a, b[$. Mais $b - c$ est alors un point de $G$ (par structure de groupe additif) dans $]0, a[$, ce qui est absurde.

Ainsi, $a \in G$. Par structure de groupe additif, $a\mathbb{Z} \subset G$.

Montrons l'inclusion réciproque : soit $g \in G$, et soit $k$ l'entier tel que

$$ka \leqslant g < (k+1)a.$$

Le réel $g - ka$ est un élément de $G$ dans $[0, a[$ : il est donc nul par définition de $a$, puis $g = ka \in a\mathbb{Z}$.

Finalement, on a bien $G = a\mathbb{Z}$.

Supposons maintenant $a = 0$, et montrons la densité de $G$ dans $\mathbb{R}$. Soit $x, y \in \mathbb{R}$, où $x < y$. Puisque $a = 0$, on peut trouver un élément $g$ de $G$ dans $]0, y - x[$. Soit $k$ l'entier tel que

$$kg \leqslant x < (k+1)g.$$

On a donc

$$(k+1)g = kg + g < x + (y - x) = y,$$

donc $(k+1)g$ est un élément de $G$ dans $]x, y[$, d'où le résultat souhaité.

Corrigé 144 (Automorphismes de corps classiques)

**1** On rappelle que si $\varphi \; : G \to G'$ est un morphisme de groupes additifs, alors, pour tout $(n,g) \in \mathbb{Z} \times G$,

$$\varphi(ng) = n\varphi(g).$$

Soit $\varphi$ un endomorphisme de $(\mathbb{Q},+)$ : soit $r = \frac{p}{q}$ un rationnel mis sous forme canonique. On a

$$q\varphi(r) = \varphi(qr) = \varphi(p) = p\varphi(1),$$

donc $\varphi(r) = r\varphi(1)$ : $\varphi$ est la multiplication par le réel $\varphi(1)$.

**2** Bien sûr, $\mathrm{Id}_{\mathbb{Q}}$ est un automorphisme du corps des rationnels. Si, réciproquement, $\varphi$ est un tel automorphisme, alors c'est la multiplication par $\varphi(1)$ d'après la question précédente. Or $\varphi(1) = 1$ puisque $\varphi$ est un morphisme d'anneaux, donc $\varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{Q}}$.

**3** Bien sûr, $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ est un automorphisme du corps des réels.

Considérons réciproquement un tel automorphisme $\varphi$. On sait déjà que $\varphi(x) = x$ pour tout rationnel $x$. Montrons que ce résultat subsiste lorsque $x$ est supposé réel.

Pour ce faire, montrons d'abord la croissance de $\varphi$ : soit $x, y \in \mathbb{R}$, où $x \leqslant y$. On a

$$\varphi(y) - \varphi(x) = \varphi(y-x) = \varphi(\sqrt{y-x}^2) = \left(\varphi(\sqrt{y-x})\right)^2 \geqslant 0,$$

d'où la croissance de $\varphi$.

Soit désormais $x \in \mathbb{R}$, $(\alpha_n)$ et $(\beta_n)$ des suites de rationnels de limite $x$, respectivement croissante et décroissante (on peut par exemple prendre les suites d'approximations décimales).

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\alpha_n \leqslant x \leqslant \beta_n,$$

d'où

$$\alpha_n \leqslant \varphi(x) \leqslant \beta_n$$

en appliquant la fonction croissante $\varphi$, qui fixe tout rationnel.

En passant à la limite, on obtient bien $\varphi(x) = x$.

On a donc bien $\varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Corrigé 145 (Caractérisation séquentielle des fermés de $\mathbb{R}$)

Corrigé 146 (Autour de la borne supérieure)

## 2. Convergence, divergence

Corrigé 147 (Expression formelle de la convergence)

**1** Oui.

**2** Non.

**3** Oui.

**4** Non (l'assertion exprime le fait que $(u_n)$ stationne en la valeur $l$).

**5** Oui.

**6** Non (l'assertion exprime le fait que $(u_n)$ stationne en la valeur $l$).

Corrigé 148 (Étude élémentaire de convergence ou de divergence)

Corrigé 149 (Suite convergente d'entiers relatifs)

Corrigé 150 (Taux comparés)

Corrigé 151 (Série harmonique)

Corrigé 152 (Théorème de Cesàro)

Corrigé 153 (Image des entiers par la fonction sinus)

Corrigé 154 (Suite d'entiers naturels)

### 3. Relations de comparaison, comportement à l'infini

Corrigé 155 (Équivalents simples)

Corrigé 156 (Équivalents et convergence)

Corrigé 157 (Algorithme de Babylone, ou de Héron d'Alexandrie)

Corrigé 158 (suite de Fibonacci)

Corrigé 159 (Équivalent d'une suite)

Corrigé 160 (Équivalents plus durs)

Corrigé 161 (Exemple de suite implicite)

Corrigé 162 (Une autre suite implicite)

Corrigé 163 (Une suite implicite avec tangente)

On a $\tan(x_n - n\pi) = \tan(x_n) = x_n$, or $x_n - n\pi \in [0, \pi/2[$, donc

$$x_n - n\pi = \arctan(x_n) = \frac{\pi}{2} + \mathrm{o}(1).$$

Ainsi a-t-on : $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \mathrm{o}(1)$.

Pour aller plus, loin, on écrit, plus finement :

$$x_n - n\pi = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x_n}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right),$$

obtenant ainsi :

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Pour aller plus loin, on écrit :

$$\begin{aligned}
x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} &= -\arctan\left(\frac{1}{x_n}\right) \\
&= -\arctan\left(\frac{1}{n\pi - \frac{\pi}{2} + \mathrm{o}(1/n)}\right) \\
&= -\frac{1}{n\pi - \frac{\pi}{2} + \mathrm{o}(1/n)} + \mathrm{o}(1/n^3) \\
&= -\frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + \mathrm{o}(1/n^2)
\end{aligned}$$

Finalement,

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + \mathrm{o}(1/n^2).$$

## 4. Suites extraites

Corrigé 164 (Extraction d'une suite non majorée)

Corrigé 165 (Extraction convergente d'une suite monotone)

Corrigé 166 (Suite extraite de suite extraite)

Corrigé 167 (De la convergence de sous-suites à la convergence)

Corrigé 168 (Infinité de sous-suites convergentes)

## 5. Suites adjacentes

Corrigé 169 (Critère spécial des séries alternées)

Corrigé 170 (Moyenne arithmético-géométrique)

## 6. Suite de nombres complexes

Corrigé 171 (Théorème de Bolzano-Weierstrass complexe)

Corrigé 172 (Suite récurrente complexe)

CHAPITRE 17

# Espaces vectoriels (énoncés)

Aller aux corrigés 18
$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

## 1. Espaces vectoriels, première approche

**Exercice 173**

On munit $\mathbb{R}_+^*$ des lois $\oplus$ et $\otimes$ définies par $a \oplus b = ab$ et $\lambda \otimes a = a^\lambda$, pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, tout réel $\lambda$. Montrer que $E = (\mathbb{R}_+^*, \oplus, \otimes)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

**Exercice 174**

Dire si les objets suivants sont des espaces vectoriels pour les lois usuelles :

(1) L'ensemble des fonctions réelles sur $\mathbb{R}$, de limite finie en $+\infty$ ;

(2) L'ensemble des solutions $(x_1, x_2, x_3)$ du système : $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases}$

(3) L'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ vérifiant $f(1/2) = 0$.

(4) L'ensemble des fonctions sur $[a, b]$ dérivables, vérifiant $f(a) = 7f(b) + 2f'((a+b)/2)$.

(5) L'ensemble des fonctions sur $[0, 1]$ admettant un point fixe.

(6) L'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ qui s'annulent en 0 ou en 4.

(7) L'ensemble des suites réelles convergentes.

(8) L'ensemble des suites réelles bornées.

(9) L'ensemble des suites réelles négligeables devant $(n)$.

(10) L'ensemble des polynômes de degré exactement $n$.

(11) L'ensemble des polynômes de degré au plus $n$.

(12) L'ensemble des fonctions de classe $C^2$ vérifiant $f'' + \omega^2 f = 0$.

(13) L'ensemble des nombres complexes d'argument $\pi/4 + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

(14) L'ensemble des points $(x, y)$ de $\mathbb{R}^2$, vérifiant $\sin(x + y) = 0$.

(15) L'ensemble des vecteurs $(x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux au vecteur $(-1, 3, -2)$.

(16) L'ensemble des polynômes ne comportant pas de terme de degré 7.

Exercice 175

Soit $U$ un sous-espace vectoriel de $E$, et
$$A = \{f \in L(E) |\, U \subset \mathrm{Ker}(f)\}.$$
Montrer que $A$ est un sous-espace vectoriel de $L(E)$.

## 2. Applications linéaires, première approche

Exercice 176

Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires :

(1) $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x^2$.
(2) $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 4x - 3$.
(3) $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x^2}$.
(4) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (y, x)$.
(5) $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \ : f \mapsto \left(t \mapsto \frac{f(t)}{1+t^2}\right)$.
(6) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 3x + 5y$.
(7) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sqrt{3x^2 + 5y^2}$.
(8) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sin(3x + 5y)$.
(9) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (-x, y)$.
(10) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto xy$.
(11) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : M \mapsto \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{V}$ où $\overrightarrow{V} = (4, -1, 1/2)$.
(12) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (2x - 3y + z, x - y + z/3)$.
(13) $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln(3^{x\sqrt{2}})$.

Exercice 177

Soient $F$ et $G$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.

Exercice 178

Soient $f$ et $g$, applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définies par $f(z) = \bar{z}$ et $g(z) = \mathrm{Re}(z)$. Montrer que $f$ et $g$ sont linéaires sur $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et non linéaires sur $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel

Exercice 179

Donner un exemple d'endomorphisme non nul de carré nul (carré au sens de la composition, bien entendu).

Exercice 180

Montrer que l'espace vectoriel des solutions réelles de $y'' - 3y' + 5y = 0$ est isomorphe à $\mathbb{R}^2$.

## 3. Opérations sur les sous-espaces vectoriels

Exercice 181

Soit $F$, $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $E$ si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 182

Soient $f$ et $g$ deux endomorphismes de $E$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par $g$. Montrer que l'implication réciproque peut être fausse.

Exercice 183

Soit $E$ l'espace vectoriel des suites réelles convergentes. Soit $F$ le sous-espace vectoriel de $E$ constitué des suites réelles convergeant vers 0, et $G$ celui des suites constantes. Montrer que $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $E$.

Exercice 184

Soit $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. On définit l'application $f : F \times G \to E$ par $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

**1** Montrer que f est linéaire.

**2** Déterminer le noyau et l'image de $f$.

Exercice 185

Soit $f$ une forme linéaire non nulle sur $E$. On fixe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \neq 0$, et on note $H = \mathrm{Ker}\, f$. Montrer : $\quad E = H \oplus \mathbb{K}x_0$.

## 4. Endomorphismes d'un espace vectoriel

Exercice 186

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que pour tout vecteur $x$ de $E$, $f(x)$ est colinéaire à $x$. Montrer que $f$ est une homothétie.

Exercice 187

**1** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, vérifiant $f^3 + 2f + 5\mathrm{Id}_E = 0$. Montrer que $f$ est un automorphisme de $E$.

**2** Soit $f$ un endomorphisme de $E$, vérifiant l'identité $f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E = 0$. Établir $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id}_E)$, $\mathrm{Im}(f + 2\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$, $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id}_E)$.

**3** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^3 = f^2 + f$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$. Généraliser cet exemple

Exercice 188

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On introduit l'ensemble $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E),\ f \circ g = g \circ f\}$, appelé *commutant* de $f$.

**1** Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

**2** Décrire $\mathcal{C}(f)$ lorsque $f$ est un projecteur.

Exercice 189

Soit $u$ un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel $E$. Montrer que $v \mapsto uv - vu$ est un endomorphisme nilpotent de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 190

Soit $(u, v) \in (L(E))^2$, tel que $u^2 = u$ et $vu = 0$. Montrer que : $\mathrm{Im}(u + v) = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$.

Exercice 191

Soit $E$ et $F$ deux espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$. On suppose que $v \circ u = \mathrm{Id}_E$. Montrer : $\mathrm{Ker}\, v \oplus \mathrm{Im}\, u = F$.

Exercice 192

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

**1** Montrer que $(\mathrm{Ker}\, f^n)$ est croissante pour l'inclusion.

**2** Montrer que $(\mathrm{Im}\, f^n)$ est décroissante pour l'inclusion.

**3** Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = f(\mathrm{Ker}(f^2))$.

## 5. Projecteurs, symétries

Exercice 193

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^2+f-2\mathrm{Id}_E = 0$. On a vu $E = \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\mathrm{Ker}(f+2\mathrm{Id}_E)$. Montrer que le projecteur $p$ sur $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f+2\mathrm{Id}_E)$ appartient à $\mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, f)$. On pose $q = \mathrm{Id}_E - p$. Expliquer en quoi $p$ et $q$ permettent de calculer les puissances de $f$.

Exercice 194

Soit $p$ et $q$ deux projecteurs de $E$.

**1** On suppose que $p\circ q = 0$. On note $r = p+q-q\circ p$. Montrer que $r$ est un projecteur, de noyau $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$ et d'image $\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$.

**2** Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si : $p \circ q = q \circ p = 0$.

**3** On suppose que $p$ et $q$ commutent. Montrer que $p \circ q$ est le projecteur de $E$ sur $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q)$.

Exercice 195

Soit $p$ et $q$ deux projecteurs de $E$ tels que $p \circ q = q \circ p = 0$,

$$\begin{array}{rcccl} \Pi & : & \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}(E) \\ & & f & \mapsto & p\circ f\circ p \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcccl} \Theta & : & \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}(E) \\ & & f & \mapsto & q\circ f\circ q \end{array}.$$

Vérifier que $\Pi$ et $\Theta$ sont des projecteurs de $\mathcal{L}(E)$, et que $\Pi \circ \Theta = \Theta \circ \Pi = 0$.

## 6. Familles de vecteurs

Exercice 196

**1** Montrer que si $(u_1, u_2, u_3)$ est un triplet de vecteurs tous non nuls de $\mathbb{R}^3$, orthogonaux deux à deux, alors $(u_1, u_2, u_3)$ est libre.
**2** La famille $(x \mapsto \cos(x+a))_{a\in\mathbb{R}}$ est-elle libre ?
**3** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $a_1, \ldots, a_n$ des réels distincts deux à deux. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on introduit $P_i : x \mapsto \prod_{j=1, j\neq i}^{n}(x - a_j)$. Montrer que $(P_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est libre.
**4** *(Mines MP 08, Mines MP 09)* Montrer que la famille des fonctions réelles de la variable réelle $t \mapsto |t - a|$, lorsque $a$ décrit $\mathbb{R}$, est libre.
**5** Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit $g_a : x \mapsto e^{ax} \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Montrer que $(g_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre.
**6** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $h_n : x \mapsto x^n \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Montrer que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.
**7** Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose $u^m = (\sin(1/n^m))_{n\in\mathbb{N}^*}$. Montrer que $(u^m)_{m\in\mathbb{N}}$ est libre.
**8** *(X MP 08)* Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x^n)$. Montrer que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.
**9** *(X MP 08)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La famille de fonctions

$$(x \mapsto \sin(nx), x \mapsto \sin((n-1)x)\cos(x), \ldots, x \mapsto \sin(x)\cos((n-1)x))$$

est-elle libre ?
**10** *(X MP 08)* Soit $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \ln(1+x)$. Montrer que $(f, f\circ f, f\circ f\circ f)$ est un système libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Exercice 197

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille libre de $E$ et $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de scalaires. On pose $s = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$. Condition nécessaire et suffisante pour que $(u_i + s)_{1\leqslant i\leqslant n}$ soit libre ?

CHAPITRE 18

# Espaces vectoriels (corrigés)

Aller aux énoncés 17
$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

## 1. Espaces vectoriels, première approche

Corrigé 173 (Comment voir $\mathbb{R}_+^*$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel)

Corrigé 174 (Structure d'espace vectoriel)

Corrigé 175 (Sous-espace vectoriel de L(E))

## 2. Applications linéaires, première approche

Corrigé 176 (Exemples d'applications linéaires, ou pas)

Corrigé 177 (Composée, image et noyau)

Corrigé 178 (Importance du corps de base)

Corrigé 179 (Exemple d'élément nilpotent non nul)

Corrigé 180 (Isomorphisme et équations différentielles)

## 3. Opérations sur les sous-espaces vectoriels

Corrigé 181 (Union de deux sous-espaces vectoriels)

Corrigé 182 (Stabilité du noyau et de l'image par un élément du commutant)

Corrigé 183 (Supplémentarité dans l'espace des suites convergentes)

Corrigé 184 (Application somme)

Corrigé 185 (Supplémentaires d'un hyperplan)

## 4. Endomorphismes d'un espace vectoriel

Corrigé 186 (Lorsque tout vecteur non nul est propre)

Corrigé 187 (Polynôme annulateur)

Corrigé 188 (Commutant d'un endomorphisme)

Corrigé 189 (La nilpotence passe au crochet de Lie)

Corrigé 190 (Lorsque la somme des images est l'image de la somme)

Corrigé 191 (Supplémentarité et inverses unilatéraux *(Mines PSI 09)*)

Corrigé 192 (Intersection de l'image et du noyau)

## 5. Projecteurs, symétries

Corrigé 193 (Projecteurs et puissances d'un endomorphisme)

Corrigé 194 (Projecteurs)

Corrigé 195 (Projecteurs de $\mathcal{L}(E)$)

## 6. Familles de vecteurs

Corrigé 196 (Liberté de familles)

Corrigé 197 (Translation d'une famille libre *(Mines MP 08, X MP 08)*)

CHAPITRE 19

# Fonctions numériques (énoncés)

Aller aux corrigés 20

## 1. Limites

**Exercice 198**

Montrer que la fonction sinus n'admet pas de limite en $+\infty$.

**Exercice 199**

Caractériser les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodiques admettant une limite en $+\infty$.

**Exercice 200**

**1** Montrer que si $f : [0,1] \to [0,1]$ est continue, alors $f$ admet un point fixe.
**2** Montrer que si $f : [0,1] \to [0,1]$ est croissante, alors $f$ admet un point fixe.
**3** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue décroissante. Montrer que $f$ admet un unique point fixe.
**4** Soit $I$ un segment et $f$ une application continue telle que $f(I) \subset I$. Montrer que $f$ admet au moins un point fixe.
**5** Même question, en supposant cette fois $I \subset f(I)$.

## 2. Continuité

**Exercice 201**

Soit $I$ un intervalle réel, $f$ une application continue de $I$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $f(I)$ est infini ou $f$ est constante.

**Exercice 202**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle $I$, telle que $|f|$ soit constante sur $I$. Montrer que $f$ est constante sur $I$.

**Exercice 203**

Un homme parcourt 8 kilomètres en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle de temps d'une demi-heure durant lequel il a parcouru 4 kilomètres.

## Exercice 204

Déterminer le prolongement par continuité des fonctions suivantes (on pourra utiliser des résultats sur les dérivées) :

**1** $f : x \mapsto \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}$.

**2** $g : x \mapsto \frac{x^2-2x-3}{\sqrt{x+1}}$.

**3** $h : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\sqrt{1+x}-1}$.

## Exercice 205

Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues sur un intervalle $I$. Montrer que $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ sont continues.

## Exercice 206

**1** Montrer que si $f : [0, 1] \to [0, 1]$ est continue, alors $f$ admet un point fixe.

**2** Montrer que si $f : [0, 1] \to [0, 1]$ est croissante, alors $f$ admet un point fixe.

**3** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue décroissante. Montrer que $f$ admet un unique point fixe.

**4** Soit $I$ un segment et $f$ une application continue telle que $f(I) \subset I$. Montrer que $f$ admet au moins un point fixe.

**5** Même question, en supposant cette fois $I \subset f(I)$.

## Exercice 207

On pose $f : x \mapsto |x| \left(2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$. Montrer que $f$ est continue et minimale en 0, mais que pour tout $\varepsilon > 0$, $f_{|[0,\varepsilon]}$ n'est pas monotone.

## Exercice 208

**1** Montrer qu'une fonction continue sur un segment et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ est minorée par un réel strictement positif.

**2** Soit $f$ une fonction numérique continue sur $\mathbb{R}$ ayant une limite finie $l_-$ en $-\infty$ et une limite finie $l_+$ en $+\infty$. Montrer que $f$ est bornée, puis que si $l_- = l_+$, alors $f$ atteint sa borne inférieure ou sa borne supérieure.

**3** Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $[0, 1]$ telles que, pour tout $x \in [0, 1]$ : $0 < f(x) < g(x)$.
Montrer qu'il existe un réel $C > 1$ tel que, pour tout $x \in [0, 1]$ : $C f(x) \leqslant g(x)$.

## Exercice 209

Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue, périodique et non constante admet une plus petite période (strictement positive).

Exercice 210

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer : $\sup\limits_{[a,b]} f = \sup\limits_{]a,b[} f$.

Exercice 211

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nulle en tout irrationnel, et valant $\frac{1}{q}$ en tout rationnel $\frac{p}{q}$ mis sous sa forme canonique. Donner le lieu de continuité de $f$.

Exercice 212

Montrer qu'il n'existe pas de fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et $f(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

Exercice 213

**1** Trouver toutes les fonctions $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x^2) = f(x).$$

**2** Déterminer les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

**3** Déterminer les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f\left(\frac{x + y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

**4** Trouver toutes les fonctions $f$ continues sur $\mathbb{R}$ admettant pour périodes 1 et $\sqrt{2}$.
**5** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante et involutive ($i.e.$ $\forall x \in \mathbb{R}, f \circ f(x) = x$). Montrer que $f$ est l'application identique sur $\mathbb{R}$.
**6** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(ax + b) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, où $a$ est fixé différent de 1 et $-1$, et $b \in \mathbb{R}$. Montrer que $f$ est constante.
**7** Déterminer les applications $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telles que $\lim\limits_{0} f = +\infty$, $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ et : $\forall x, y > 0, \quad f(xf(y)) = yf(x)$.
**Indication :** étudier les points fixes de $f$.

## 3. Fonctions lipschitziennes

Exercice 214

**1** Montrer que la somme de deux fonctions lipschitziennes l'est.

**2** Montrer que la composée de deux fonctions lipschitziennes l'est.

**3** Montrer que si $f$ et $g$ sont lipschitziennes sur un domaine borné, alors leur produit est lipschitzien.

**4** Soit $f$ une fonction lipschitzienne sur un segment, ne s'annulant pas. Montrer que $\frac{1}{f}$ est lipschitzienne.

Exercice 215

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $k$-lipschitzienne avec $0 \leqslant k < 1$ ($f$ est dite *contractante*).

**1** Montrer que $f$ admet au plus un point fixe.

**2** On fixe $u_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite récurrente $(u_n)$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pout tout entier naturel $n$ converge vers un (donc le) point fixe de $f$. Estimer la vitesse de convergence de $(u_n)$ vers $x$.
**Indication :** on pourra montrer que la suite $(u_n)$ est de Cauchy.

## 4. Uniforme continuité

Exercice 216

Montrer que $x \mapsto x\ln(x)$ est uniformément continue sur $]0, 1]$.

Exercice 217

**1** Montrer que toute fonction lipschitzienne est uniformément continue.

**2** Montrer que la fonction racine carrée est uniformément continue mais non lipschitzienne.

**3** Donner un exemple de fonction continue non uniformément continue.

Exercice 218

Montrer qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 219

**1** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application uniformément continue. Montrer que si $(x_n)$ et $(y_n)$ sont des suites d'éléments de $I$ telles que $\lim\limits_n (y_n - x_n) = 0$, alors $\lim\limits_n (f(y_n) - f(x_n)) = 0$.

**2** Réciproquement, cette propriété séquentielle entraîne-t-elle l'uniforme continuité de $f$ ?

**3** Montrer que $t \mapsto \sin(t^2)$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 220

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue, telle que $f(n) \to +\infty$. Montrer que $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

Exercice 221

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b[ \to \mathbb{R}$ continue, $b \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que $f$ admet une limite finie en $b$. Montrer que $f$ est uniformément continue sur $[a, b[$.

Exercice 222

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application uniformément continue. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tel que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leqslant \alpha|x| + \beta.$$

CHAPITRE 20

# Fonctions numériques (corrigés)

Aller aux énoncés 19

## 1. Limites

Corrigé 198 (Limite de sinus en l'infini)

Corrigé 199 (Fonctions périodiques et limite en l'infini)

Corrigé 200 (Points fixes)

## 2. Continuité

Corrigé 201 (Cardinal de l'image d'un intervalle par une fonction continue)

Corrigé 202 (Fonction continue de valeur absolue constante)

Corrigé 203 (Enfin une application concrète)

Corrigé 204 (Prolongements par continuité)

Corrigé 205 (Continuité du max et du min)

Corrigé 206 (Points fixes)

Corrigé 207 (Minimum et monotonie)

Corrigé 208 (Minoration, majoration, encadrement)

Corrigé 209 (Fonction continue périodique non constante)

Corrigé 210 (Borne supérieure d'une fonction continue sur l'intérieur d'un segment)

Corrigé 211 (Lieu de continuité original)

Corrigé 212 (Fonction continue passant d'un rationnel à un irrationnel, et réciproquement)

Corrigé 213 (Équations fonctionnelles)

## 3. Fonctions lipschitziennes

Corrigé 214 (Opérations sur les fonctions lipschitziennes)

Corrigé 215 (Théorème du point fixe de Picard)

## 4. Uniforme continuité

Corrigé 216 (Exemple d'uniforme continuité)

Corrigé 217 (Uniforme continuité et caractère lipschitzien)

Corrigé 218 (Uniforme continuité et périodicité)

Corrigé 219 (Caractérisation séquentielle de l'uniforme continuité)

Corrigé 220 (Uniforme continuité et limite en l'infini)

Corrigé 221 (Uniforme continuité et limite finie en un point adhérent)

Corrigé 222 (Contrôle d'une fonction uniformément continue)

CHAPITRE 21

# Dénombrement (énoncés)

Aller aux corrigés 22

## 1. Dénombrement

Exercice 223

**1** Soit $E$ une association de $n$ membres. Combien y a-t-il de manières différentes de constituer un bureau constitué d'un président, d'un secrétaire et d'un trésorier (avec cumul des charges interdit) ?

**2** Combien y a-t-il de tirages de deux dés à $n$ faces possibles ?

**3** Soit $E = [\![1, 6]\!]$. Combien peut-on former de nombres différents avec trois chiffres distincts choisis dans $E$ ? Quelle est la somme de ces nombres ?

**4**

- **a** Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ ?
- **b** Combien y a-t-il d'applications croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ ?

**5** Un jeu de cartes contient 32 cartes. On en prend 3 successivement, sans remise. Combien de configurations permettent d'obtenir au moins un coeur ?

**6** On dispose 4 pions numérotés de 1 à 4 sur 3 cases numérotées de 1 à 3. Une case peut éventuellement contenir plusieurs pions. De combien de façons peut-on opérer de sorte qu'une case au moins soit vide ?

**7** Une urne contient 6 boules blanches numérotées de 1 à 6 et 5 boules noires numérotées de 1 à 5. On tire successivement 4 boules sans remise. Combien de résultats amènent 3 boules blanches et une boule noire ?

**8** De combien de façons peut-on répartir un groupe de 10 personnes en trois groupes numérotés 1, 2 et 3 de sorte qu'il y ait au moins une personne dans chaque groupe ?

**9** Combien y a-t-il de mots :

- **a** de 6 lettres écrits avec les lettres A à F ?
- **b** de 5 lettres écrits avec deux A et trois B ?
- **c** de 6 lettres écrits avec exactement deux A et trois B ?
- **d** de 6 lettres écrits avec deux A, trois B, un C ?

**10** Combien existe-t-il d'anagrammes du mot chaise ? d'anagrammes du mot anagramme ?

**11** Un jeu comporte 32 cartes dont 8 par couleur. Une main est constituée de 8 cartes non ordonnées.

- **a** Quel est le nombre de mains possibles ?
- **b** Combien de mains contiennent au moins un as ?
- **c** Combien contiennent exactement un roi ?
- **d** Combien contiennent au moins un coeur ou une dame ?
- **e** Combien ne contiennent que des cartes de 2 couleurs au plus ?

**12** Un tiroir contient 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures vertes et 2 paires de chaussures rouges. On choisit deux chaussures au hasard et simultanément.

- **a** Combien y a t-il de tirages possibles ?
- **b** Combien amènent deux chaussures de la même couleur ?
- **c** Combien amènent un pied gauche et un pied droit ?
- **d** Combien permettent de reconstituer une vraie paire de chaussures ?

Exercice 224

Par combien de zéros se termine le nombre $1000000!$ ?

Exercice 225

**1** Montrer :

$$\forall(p,q,r)\in\mathbb{N}^3,\quad \sum_{i=0}^{r}\binom{p}{i}\binom{q}{r-i}=\binom{p+q}{r}.$$

**2** En déduire une expression plus simple de $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$.

Exercice 226

**1** Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, calculer

$$\operatorname{Card}\left\{(A,B)\in\mathcal{P}([\![1,n]\!])^2, A\subset B\right\}.$$

**2** Soit $E$ un ensemble fini de cardinal $n\geqslant 1$. Calculer

$$\sum_{A\subset E}\operatorname{Card}(A),\quad \sum_{A,B\subset E}\operatorname{Card}(A\cap B)\quad \text{et}\quad \sum_{A,B\subset E}\operatorname{Card}(A\cup B).$$

Exercice 227

Soit $E$ un ensemble fini, $A$ et $B$ des parties de $E$. Combien y a-t-il de parties $X$ de $E$ telles que $A\cup X=B$ ?

Exercice 228

Soit $E$ un ensemble de cardinal $n$ et $(A,B)\in\mathcal{P}(E)^2$. Déterminer le nombre de $X\in\mathcal{P}(E)$ telles que $A\cap X=B$.

Exercice 229

On fixe un entier $n\geqslant 1$, et $p\in[\![1,n]\!]$. Calculer :

$$\operatorname{Card}\{(a_1,\dots,a_p)\in\mathbb{N}^p, a_1+\cdots+a_p=n\}.$$

## 2. Ensembles finis, curiosités

Exercice 230

On appelle *monoïde* un ensemble muni d'une loi de composition interne associative, admettant un élément neutre pour cette loi. Montrer qu'un monoïde fini et régulier (*i.e.* tout élément est simplifiable à gauche et à droite) est un groupe.

Exercice 231

Soit $G$ un groupe multiplicatif fini d'élement neutre $e$.

**1** Montrer que pour tout $g \in G$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^n = e$.

**2** Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $g \in G$, on ait $g^n = e$.

Exercice 232

Soit $A$ et $B$ deux ensembles. L'ensemble $A$ est dit *équipotent* à $B$ s'il existe une bijection de $A$ sur $B$.

**1** Montrer que l'équipotence est une relation d'équivalence.
Un ensemble est dit *dénombrable* s'il est équipotent à $\mathbb{N}$.

**2** Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

**3** Montrer que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

**4** Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

**5** Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 233

Soit $n$ un entier naturel non nul. On choisit $n+1$ nombres quelconques (distincts deux à deux) dans $[\![1, 2n]\!]$. Montrer qu'il en existe deux qui sont premiers entre eux. Montrer qu'il en existe deux tels que l'un divise l'autre.

Exercice 234

Calculer $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$ par trois méthodes différentes.

Exercice 235

Soit $S$ un ensemble de 10 entiers distincts choisis parmi les nombres $1, 2, \ldots, 99$. Montrer que $S$ contient toujours deux sous-ensembles disjoints dont la somme de leurs éléments respectifs est la même.

Exercice 236

Monsieur et Madame Machin ont été invités à une soirée à laquelle assistaient aussi quatre autres couples, ce qui faisait un total de dix personnes. À l'arrivée des invités, un certain nombre de poignées de mains furent échangées, d'une manière imprévisible, mais sujette à deux conditions évidentes : personne n'a serré sa propre main, et aucun mari n'a serré la main de sa femme. À la fin, par curiosité, M. Machin circulait dans l'assistance en demandant à chaque personne : « Combien de mains avez-vous serrées ? … Et vous ? … Et vous ? » M. Machin a posé la question à neuf personnes (tout le monde, y compris sa femme), et a obtenu neuf réponses différentes. Combien de mains Madame Machin a-t-elle serrées ?

CHAPITRE 22

# Dénombrement (corrigés)

Aller aux énoncés 21

## 1. Dénombrement

Corrigé 223 (Dénombrement concret)

Corrigé 224 (Nombre de zéros)

Corrigé 225 (Formules de convolution de Vandermonde)

Corrigé 226 (Dénombrement lié à des parties)

Corrigé 227 (Mines PSI 08)

Corrigé 228 (X PC 08)

Notons $N$ le nombre cherché.

Si $B$ n'est pas inclus dans $A$, alors $N = 0$.

Supposons désormais $B$ inclus dans $A$. Notons $\Omega$ l'ensemble des parties $X$ de $E$ telles que $A \cap X = B$. Une partie $X$ de $E$ appartient à $\Omega$ si et seulement si elle contient $B$, et est disjointe de $A \setminus B$.

L'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \Omega & \to & \mathcal{P}(E \setminus A) \\ & X & \mapsto & X \cap (E \setminus A) \end{array}$$

est bijective, d'application inverse

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathcal{P}(E \setminus A) & \to & \Omega \\ & H & \mapsto & H \cup B \end{array}$$

$\Omega$ est donc de cardinal $N = 2^{n-\mathrm{Card}(A)}$.

Corrigé 229 (Décomposition d'un entier en somme)

## 2. Ensembles finis, curiosités

Corrigé 230 (Monoïde fini et régulier)

Corrigé 231 (Élément d'un groupe fini)

Corrigé 232 (Ensembles dénombrables)

Corrigé 233 (Utilisation du principe des tiroirs)

Corrigé 234 (X MP 08)

Corrigé 235 (Parties disjointes de même somme)

Corrigé 236 (Mondanités)

CHAPITRE 23

# Dimension finie (énoncés)

Aller aux corrigés 24

## 1. Familles de vecteurs

Exercice 237

**1** Montrer que les vecteurs $x_1 = (0,1,1)$, $x_2 = (1,0,1)$ et $x_3 = (1,1,0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver dans cette base les composantes du vecteur $x = (1,1,1)$.

**2** Donner, dans $\mathbb{R}^3$, un exemple de famille libre, qui n'est pas génératrice.

**3** Donner, dans $\mathbb{R}^3$, un exemple de famille génératrice, mais qui n'est pas libre.

**4** Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble $E$ des vecteurs $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ vérifiant l'équation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. L'ensemble $E$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ ? Si oui, en donner une base.

**5** Soient $v_1 = (1,0,0,-1), v_2 = (2,1,0,1), v_3 = (1,-1,1,-1), v_4 = (7,2,0,-1)$ et $v_5 = (-2,-3,1,0)$. Donner une base du sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$. Déterminer un supplémentaire $G$ de $F$ dans $\mathbb{R}^4$.

**6** (Mines MP 08) Soit $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x = y - 2z \text{ et } y = 3t\}$. Quelle est la structure de $F$ ? Donner une base de $F$ et la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 238

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ des formes linéaires sur $E$ ($k \in \mathbb{N}^*$). Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

(1) $(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ est libre dans $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

(2) Pour tous scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, il existe un vecteur $x$ de $E$ tel que, pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, on ait : $\varphi_i(x) = \lambda_i$.

Exercice 239

**1** *(X MP 08)* On se place dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$. La famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est-elle liée ?

**2** Le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$ est-il de dimension finie ?

## 2. Sous-espaces vectoriels

Exercice 240

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

**1** Soit $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels stricts de $E$. Montrer que $F \cup G \neq E$.

**2** Soit $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$ ayant même dimension. Montrer que $F$ et $G$ possèdent un supplémentaire commun.

Exercice 241

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$, $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}, u(e_i) = e_{i+1}$ et $u(e_n) = 0$. Déterminer les sous-espaces stables par $u$.

Exercice 242

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $U$ un sous-espace vectoriel de $E$.

**1** Montrer que si $U$ est de dimension finie, alors, pour tout endomorphisme $f$ de $E$ : $(U \subset f(U)) \Rightarrow (U = f(U))$.

**2** Montrer que la propriété précédente tombe en défaut si on ne suppose plus $U$ de dimension finie.

Exercice 243

Soit $K$ un corps, $L$ un sous-corps de $K$. Montrer que $K$ est un $L$-espace vectoriel. On suppose que le $L$-espace vectoriel $K$ est de dimension finie $p$. On considère un $K$-espace vectoriel $E$ de dimension finie $n$. Montrer que $E$ est un $L$-espace vectoriel de dimension finie $np$.

## 3. Applications linéaires

Exercice 244

Donner un exemple d'endomorphisme d'un espace vectoriel injectif et non surjectif, puis d'un endomorphisme surjectif et non injectif.

Exercice 245

Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels de dimensions finies.

**1** Soit $(x, y) \in E \times F$. À quelle condition existe-t-il $f \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $f(x) = y$ ?

**2** Soient $(x_1, y_1)$ et $(x_2, y_2)$ dans $E \times F$. À quelle condition existe-t-il $f \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$ ?

Exercice 246

Soit $E$ et $F$ deux espaces vectoriels, $E$ étant de dimension finie. Soit $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$.

**1** Montrer que si $f$ est nulle sur une famille génératrice de $E$, alors $f$ est identiquement nulle.

**2** Montrer que si $f, g$ coïncident sur une famille génératrice de $E$, alors $f = g$.

**3** Montrer que si (dans le cas où $E = F$), pour tout $x \in E$, $(x, f(x))$ est liée, alors $f$ est une homothétie.

Exercice 247

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$. On dit qu'un endomorphisme $f$ de $E$ est *cyclique* s'il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de $E$.

**1** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$. Montrer que $f$ est cyclique

**2** Montrer que le commutant d'un endomorphisme cyclique est constitué de ses polynômes.

Exercice 248

**1** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall\, x \in E, \exists p_x \in \mathbb{N}^*, \quad f^{p_x}(x) = 0.$$

Montrer que $f$ est nilpotent.

**2** Montrer que ce résultat ne subsiste pas en dimension infinie.

Exercice 249

Soit $f$ un automorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie non nulle. Montrer que $f^{-1}$ est un polynôme en $f$.

Exercice 250

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$ ;

(2) $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$ ;

(3) $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

Exercice 251

Soit $E$ un espace vectoriel. On note $E^*$ son dual.

**1** Montrer que si $f$ et $g$ sont deux formes linéaires sur $E$ de même noyau, alors $f$ et $g$ sont colinéaires.

**2** On suppose ici que $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\begin{array}{rccc} \Phi_n : & E & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & f^{(n)}(0) \end{array}.$$

Montrer que $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.

**3** Ici, $E$ est de dimension 3, et $u$ est un endomorphisme de $E$ tel que $u^2 = 0$. Montrer l'existence de $(a, f) \in E \times E^*$ tel que, pour tout $x \in E$ :

$$u(x) = f(x)a.$$

Exercice 252

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $f^2 - f \circ g + 2f - \mathrm{Id}_E = 0$. Montrer que $f \circ g = g \circ f$.

Exercice 253

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie, et $(f, g) \in L(E)^2$ avec $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g)$. Montrer que ces sommes sont directes.

Exercice 254

**1** *(Mines MP 09)* Soit $E$ et $F$ deux espaces vectoriels de dimension finie, $G$ un sous-espace de $E$. On pose $L = \{u \in \mathcal{L}(E, F), G \subset \mathrm{Ker}\, u\}$. Montrer que $L$ est un espace vectoriel et donner sa dimension.

**2** *(X PC 09)* Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $n$ et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension $p$ avec $1 \leqslant p \leqslant n-1$. Déterminer la dimension de $\{\varphi \in E^*, \varphi_{|F} = 0\}$.

Exercice 255

Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Caractériser les endomorphismes $f$ de $E$ tels que, pour tout $x$ de $E$, l'ensemble $\{f^n(x),\ n \in \mathbb{N}\}$ soit fini.

Exercice 256

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe un automorphisme $g$ de $E$ et un projecteur $p$ de $E$ tels que $f = g \circ p$.

## 4. Rang

Exercice 257

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = 0$ et $f \neq 0$. Montrer que $\mathrm{rg}(f) = 1$.

Exercice 258

**1** Soit $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$ deux morphismes entre espaces vectoriels de dimensions finies. Montrer :

$$|\,\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leqslant \mathrm{rg}(u + v) \leqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v).$$

**2** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, et $u, v$ deux éléments de $\mathcal{L}(E)$. Montrer :

$$\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) - n \leqslant \mathrm{rg}(u \circ v) \leqslant \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v))$$

Exercice 259

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, E)$ telles que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$. Montrer que $\mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont supplémentaires dans $E$, puis que $f, g, g \circ f, f \circ g$ ont le même rang.

Exercice 260

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $f$ et $g$ deux endomorphismes de $E$ tels que $f \circ g = 0$ et $f + g \in \mathrm{GL}(E)$. Montrer : $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) = \dim E$.

CHAPITRE 24

# Dimension finie (corrigés)

Aller aux énoncés 23

## 1. Familles de vecteurs

Corrigé 237 (Travail en basse dimension)

Corrigé 238 (Liberté d'une famille de formes linéaires)

Corrigé 239 (Travail dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel des réels)

## 2. Sous-espaces vectoriels

Corrigé 240 (Supplémentaire commun à deux sous-espaces (Mines MP 08))

Corrigé 241 (Sous-espaces stables par un endomorphisme nilpotent cyclique *(X PC 09)*)

Corrigé 242 (Sous-espace inclus dans son image)

Corrigé 243 (Le b.a.-ba des extensions de corps)

## 3. Applications linéaires

Corrigé 244 (Non équivalence entre injectivité et surjectivité d'un endomorphisme)

Corrigé 245 (Existence d'une application linéaire à valeurs imposées *(X PC 09)*)

Corrigé 246 (Propagation des propriétés par linéarité)

Corrigé 247 (Endomorphismes cycliques *(Centrale PC 09)*)

Corrigé 248 (De la nilpotence ponctuelle à la nilpotence globale)

Corrigé 249 (Quand l'inverse est un polynôme)

Corrigé 250 (Supplémentarité de l'image et du noyau d'un endomorphisme)

Corrigé 251 (Sur le dual)

Corrigé 252 (Endomorphismes commutant)

Corrigé 253 (Sommes d'images et de noyaux)

Corrigé 254 (Dimension et annulation sur un sous-espace)

Corrigé 255 (Finitude ponctuelle des itérées *(ENS Lyon MP 09)*)

Corrigé 256 (Une décomposition en produit d'automorphisme et de projecteur)

## 4. Rang

Corrigé 257 (Calculs de rang)

Corrigé 258 (Inégalités et rang)

Corrigé 259 (Égalité de rangs)

Corrigé 260 (Une somme de rangs)

CHAPITRE 25

# Suites récurrentes (énoncés)

Aller aux corrigés 26

**Exercice 261**

**1** On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}$$
et on définit la suite $(x_n)$ en posant $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer la convergence de $(x_n)$.

**2** Étudier la convergence de la suite $(u_n)$ définie par : $u_0 = a > 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$.

**3** Étudier les suites récurrentes définies par un terme initial et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f$ est successivement la fonction sinus, la fonction cosinus, la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$, la fonction $x \mapsto 1+x^2$.

**4** *(X PC 09)* Étudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^3+3}{3u_n+1}$.

**Exercice 262**

Pour chacune des suites suivantes, expliciter le terme général en fonction de l'indice.

**1** $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, et $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**2** $(u'_n)$ définie par $u'_0 = 0$, $u'_1 = 2$ et $u'_{n+2} = 2u'_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**3** $(v_n)$ définie par $v_1 = 1$, $v_2 = 4$ et $v_{n+2} = \frac{v_{n+1}^3}{v_n^2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**4** $(w_n)$ définie par : $w_1 = 1$, $w_2 = 3$ et $w_{n+2} = -w_{n+1} + 6w_n + 4$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**5** $(z_n)$ définie par : $z_1 = 1$, $z_2 = 3$ et $z_{n+2} = 2z_{n+1} - z_n + 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 263**

**1** Étudier la suite $(u_n)$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{2-u_n}$.

**2** Étudier la duite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n-4}{u_n-3}$.

**3** Soit $a, b \in \mathbb{R}^*$. On définit la suite $(u_n)$ par $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et l'itératrice $x \mapsto a + \frac{b}{x}$. On suppose que l'équation $x^2 = ax + b$ admet deux solutions réelles $\alpha, \beta$, avec $|\alpha| > |\beta|$. Étudier la suite $(u_n)$.

## Exercice 264

**1** Soit $s > 0$ et $a_0 \in ]0, 1/s[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_{n+1} = a_n - sa_n^2$. Montrer que $a_n \sim \frac{1}{sn}$.

**Indication :** on pourra écrire : $\frac{1}{na_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k-1}}\right) + \frac{1}{na_0}$.

**2** *(X PC 08)* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Donner un équivalent de $u_n$.

**3** *(INT PSI 08)* On considère la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2}$. Étudier la convergence de $u_n$. Trouver un équivalent de $u_n$ quand $n$ tend vers l'infini.

**4** *(ENS Lyon MP 09)* La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est définie par : $u_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$. Donner un équivalent de $u_n$.

## Exercice 265

Soit $f$ une fonction 1-lipschitzienne de $[0, 1]$ dans lui-même, $(x_n)$ la suite définie par $x_0 \in [0, 1]$ et $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + f(x_n))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(x_n)$ converge.

## Exercice 266

Rappeler le domaine de définition de la fonction arccos. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = \cos(u_{n+1})$. Que dire de $u_0$ ?

CHAPITRE 26

# Suites récurrentes (corrigés)

Aller aux énoncés 25

Corrigé 261 (Étude élémentaire de suites récurrentes)

Corrigé 262 (Suites récurrentes linéaires, ou presque)

Corrigé 263 (Suites homographiques)

Corrigé 264 (Comportement asymptotique de suites récurrentes)

Corrigé 265 (Suite récurrente et fonction lipschitzienne (ENS Cachan MP 08))

Corrigé 266 (Suite récurrente à l'envers)

CHAPITRE 27

# Polynômes (énoncés)

Aller aux corrigés 28

La lettre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels ou le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, $n, p, q$ sont des entiers naturels.

## 1. Arithmétique des polynômes

### Exercice 267

**1** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $a, b \in \mathbb{K}$, $a \neq b$. Quel est le reste de la division euclidienne de $P$ par $(X-a)$, par $(X-a)(X-b)$ ?

**2** Trouver le reste de la division euclidienne de $X^6 - 5X^4 + 3X^3 - X^2 + X + 2$ par $(X-1)^3$.

**3** Trouver par trois méthodes le reste de la division euclidienne de $P = X^5 + 4X^3 + 3X^2 - X + 6$ par $(X-1)^2(X+2)$.

**4** Chercher le reste de la division euclidienne de $(X+1)^n - X^n - 1$ par $X^2 + X + 1$.

**5** Soit $B = X^3 - X^2 + X - 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$ : $A_n = (X^2+X+1)^n - X^{2n} - X^n - 1$.

- **a** Donner une condition sur $n$ pour que $B$ divise $A_n$.
- **b** Donner le reste de la division euclidienne de $A_n$ par $B$.

### Exercice 268

**1** Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{K}_3[X]$ divisibles par $X+1$ et dont les restes des divisions par $X+2, X+3, X+4$ sont égaux.

**2** *(Mines PSI 09)* Trouver le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré minimal tel que : $P$ divisé par $X^2+X+1$ donne un reste égal à $X-1$ et $P$ divisé par $(X-1)^2$ donne un reste égal à $2-X$.

### Exercice 269

**1**

- **a** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Démontrer que $P - X$ divise $P(P) - X$.
- **b** Résoudre dans $\mathbb{C}$ : $(z^2+3z+1)^2 + 3z^2 + 8z + 4 = 0$.

**2** Trouver $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que $X^2+X+1$ divise $X^5 + \lambda X^3 + \mu X^2 + 1$.

**3** Soit $A, B, P \in \mathbb{K}[X]$ avec $P$ non constant. Montrer que si $A \circ P$ (autre notation pour $A(P)$) divise $B \circ P$, alors $A$ divise $B$.

Exercice 270

Trouver un couple de Bézout pour $A = X^5 + 1$ et $B = X^7 + X^6 + X^3 + 1$.

Exercice 271

**1** Factoriser $P(X) = 3X^4 + 11X^3 + 20X^2 + 7X - 5$, sachant que $P$ admet au moins deux racines rationnelles (comptées avec leur ordre de multiplicité).
**2** Factoriser $X^8 + X^4 + 1$ sur $\mathbb{R}$.
**3** *(CCP MP 08)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Factoriser en produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ : $X^{2n} - 2\cos(\theta)X^n + 1$.
**4** Démontrer que $1 + (X-1)^2(X-3)^2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 272

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ non associés et $D = P \wedge Q$.
Montrer qu'il existe un unique couple $(U, V)$ de polynômes tels que :

$$UP + VQ = D, \deg U < \deg Q - \deg D \text{ et } \deg V < \deg P - \deg D$$

Exercice 273

Soit $\mathcal{E} = \{P \in \mathbb{R}[X] : \exists Q, R \in \mathbb{R}[X] \text{ tq } P = Q^2 + R^2\}$.
**1** Montrer que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication.
**2** Montrer que $\mathcal{E} = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tq } \forall\, x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0\}$.

Exercice 274

Montrer que pour tous polynômes non constants $P$ et $Q$, $\deg(P(Q)) = \deg(P)\deg(Q)$.

## 2. Polynômes et algèbre linéaire

Exercice 275

Soit $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{R}_3[X]$.
**1** On suppose que : $P_1(1) = P_2(1) = P_3(1) = P_4(1) = 0$. La famille $(P_1, P_2, P_3, P_4)$ est-elle liée ?
**2** On suppose que : $P_1(0) = P_2(0) = P_3(0) = P_4(0) = 1$. La famille $(P_1, P_2, P_3, P_4)$ est-elle liée ?

Exercice 276

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

**1** Calculer $A^3 - 3A^2 + 2A$.

**2** Quel est le reste de la division euclidienne de $X^n$ par $X^3 - 3X^2 + 2X$ ?

**3** Calculer $A^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

**4** $A$ est-elle inversible ?

Exercice 277

**1** Soit $\phi \ : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P + P'$. Montrer que $\phi$ est un automorphisme.

**2** Étudier de même $\psi \ : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto aP + XP'$, où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 278

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $U_p = \frac{\prod_{k=0}^{p-1}(X-k)}{p!}, p \in \mathbb{N}$ (par convention, un produit indexé par l'ensemble vide vaut 1), et

$$\begin{array}{rccc} \Delta \ : & \mathbb{K}[X] & \rightarrow & \mathbb{K}[X] \\ & P & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$$

**1** Démontrer que la famille $(U_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

**2** Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\Delta^n(U_p)$.

**3** En déduire que : pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, on a $P = P(0) + (\Delta P)(0)U_1 + (\Delta^2 P)(0)U_2 + \cdots + (\Delta^n P)(0)U_n$.

**4** *(X MP 09)* Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P$ prend en tout entier relatif une valeur entière relative si et seulement si les coordonnées de $P$ dans la base $(U_p)$ sont entières.

**5** *(X MP 09)* On prolonge naturellement l'application $\Delta$ en un endomorphisme de $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$. Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ une fonction. Montrer que $f$ est polynomiale si et seulement si il existe un entier naturel $n$ tel que $\Delta^n(f) = 0$.

**6** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n$. Démontrer que la famille $(P(X), P(X+1), \ldots, P(X+n))$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$

Exercice 279

**1** *(TPE)* Soit $a, b \in \mathbb{K}$, $a \neq b$, et $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $P_k = (X-a)^k(X-b)^{n-k}$. Démontrer que la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

**2** *(Mines PSI 09)* Soit $P$ un polynôme de degré $n$ et $a_0, \ldots, a_n$ des scalaires deux à deux distincts. Montrer que la famille $(P(X + a_k))_{0\leqslant k\leqslant n}$ constitue une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 280

**1** *(Mines MP 09)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique $(c_1, \dots, c_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que, pour tout $P$ de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$ :

$$\int_{-1}^{1} P(t)\mathrm{d}t = 2P(0) + \sum_{k=1}^{n} c_k(P(k) + P(-k) - 2P(0)).$$

**2** *(Centrale MP 07)* Soit $A = \{P \in \mathbb{R}_n[X], \sum_{k=1}^{n} P^{(k)}(1) = 0\}$. Quelle est la dimension de $A$ ? Donner une base de $A$.

**3** *(X MP 09)* Déterminer les $a \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ tels qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_4[X], \quad P'(a) = \alpha P(-2) + \beta P'(-2) + \gamma P(-1) + \delta P(1/2).$$

Exercice 281

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire de degré $n$, scindé à racines simples. On note $a_1, \dots, a_n$ les racines de $P$. Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{Q(a_i)}{P'(a_i)} = \frac{Q^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}.$$

## 3. Racines d'un polynôme

Exercice 282

**1** Soit $\mathcal{A} = \{P \in \mathbb{C}[X], P \neq 0 \text{ et } P(X^2) = P(X)P(X-1)\}$. Soit $P \in \mathcal{A}$. Montrer que les racines de $P$ sont de module 1. Déterminer $\mathcal{A}$.

**2** *(Mines PC 09)* Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X+4)P(X) = XP(X+1)$.

**3** *(Centrale PC 09)* Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P'$ divise $P$.

**4** Trouver les $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P = P'P''$.

Exercice 283

**1** *(X PC 08)* Soit $P = X^3 + 2X^2 + X + 1$. Déterminer le nombre de racines réelles de $P$. On note $x_1, x_2, x_3$ les racines de $P$. Déterminer : $x_1 + x_2 + x_3$, $x_1x_2x_3$, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$, $\frac{1}{x_1-2} + \frac{1}{x_2-2} + \frac{1}{x_3-2}$, $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$.

**2** Soit $x_1, x_2, x_3, x_4$ les racines de $X^4 + X + 1$. Calculer $\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{x_i - 1}$.

**3** Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$. Montrer que ces nombres sont en progression géométrique si et seulement si $(ab + ac + bc)^3 = abc(a + b + c)^3$.

Exercice 284

**1** *(Mines MP 09)* Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que $P'$ est scindé sur $\mathbb{R}$.
**2** *(X MP 09)* Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $Q + aQ'$ est scindé sur $\mathbb{R}$.
**3** *(X MP 09)* Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$ des polynômes scindés sur $\mathbb{R}$. On pose $R = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^{(k)}$. Montrer que $R$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 285

**1** *(Mines MP 07, X MP 09)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que les racines complexes du polynôme $\prod_{k=0}^{n}(X-k) + a$ sont de multiplicité au plus 2.
**2** *(X MP 09)* Soit $P$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que toute racine multiple de $P'$ est racine de $P$.

Exercice 286

Soient $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$. Montrer que les racines complexes de $P$ ont un module majoré par $\max\{1, |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|\}$

Exercice 287

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(X) = nX^n - \sum_{k=0}^{n-1} X^k \in \mathbb{C}[X]$.
**1** Soit $z$ une racine de $P$ distincte de 1. Montrer que $|z| < 1$.
**2** Montrer que les racines de $P$ sont simples.

Exercice 288

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On suppose que $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$. Montrer que $P \in \mathbb{Q}[X]$.

## 4. Divers

Exercice 289

**1** Soit $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que le polynôme $P_n = \frac{X^n(bX-a)^n}{n!}$ et ses dérivées successives prennent, en 0 et $\frac{a}{b}$, des valeurs entières.
**2** Montrer que la suite de terme général $I_n = \int_0^{\pi} P_n(t)\sin(t)\mathrm{d}t$ converge vers 0.
**3** Montrer par l'absurde que $\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

**Exercice 290**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) \geqslant 0$. Démontrer que pour tout réel $x$, on a $(P + P' + P'' + \dots)(x) \geqslant 0$.

**Exercice 291**

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ et $P = X^2 + aX + b$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z}, \quad P(n)P(n+1) = P(k)$.

CHAPITRE 28

# Polynômes (corrigés)

Aller aux énoncés 27

La lettre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels ou le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, $n, p, q$ sont des entiers naturels.

## 1. Arithmétique des polynômes

Corrigé 267 (Calculs de restes)

Corrigé 268 (Contraintes de restes)

Corrigé 269 (Divisibilité de polynômes)

Corrigé 270 (Couple de Bézout)

Corrigé 271 (Décomposition en produit d'irréductibles)

Corrigé 272 (Couple de Bézout optimal)

Corrigé 273 (Polynômes positifs)

Corrigé 274 (Degré d'un polynôme composé)

## 2. Polynômes et algèbre linéaire

Corrigé 275 (Familles de $\mathbb{R}_3[X]$ *(TPE PC 08)*)

Corrigé 276 (Puissances de matrices)

Corrigé 277 (Un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$ *(TPE PC 08)*)

Corrigé 278 (Un opérateur sur les polynômes)

Corrigé 279 (Bases d'espaces polynomiaux)

Corrigé 280 (Formes linéaires sur des espaces de polynômes)

Corrigé 281 (Une relation polynomiale *(X MP 08)*)

### 3. Racines d'un polynôme

Corrigé 282 (Équation d'inconnue polynomiale *(Mines MP 08, X MP 09)*)

Corrigé 283 (Relations coefficients-racines)

Corrigé 284 (Polynômes scindés)

Corrigé 285 (Multiplicité de racines)

Corrigé 286 (Majoration du module des racines *(X-ENS PSI 08)*)

Corrigé 287 (Etude des racines d'un polynôme *(Mines MP 08)*)

Corrigé 288 (Polynôme complexe laissant stable l'ensemble des rationnels *(Mines PSI 08)*)

### 4. Divers

Corrigé 289 (Irrationnalité de $\pi$)

Corrigé 290 (D'un polynôme positif à un autre)

Corrigé 291 (Une curiosité polynomiale)

CHAPITRE 29

# Analyse asymptotique (énoncés)

Aller aux corrigés 30

## 1. Comparaison de fonctions

**Exercice 292**

Donner des équivalents simples aux points considérés pour les fonctions définies par les formules suivantes :

**1** $2e^x - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2}$ en 0.

**2** $(\cos x)^{\sin x} - (\cos x)^{\tan x}$ en 0.

**3** $\arctan x + \arctan \frac{3}{x} - \frac{2\pi}{3}$ en $\sqrt{3}$.

**4** $\sqrt{x^2+1} - 2\sqrt[3]{x^3+x} + \sqrt[4]{x^4+x^2}$ en $+\infty$.

**5** $\operatorname{argch}\left(\frac{1}{\cos x}\right)$ en 0.

## 2. Formules de Taylor

**Exercice 293**

Soit $f\ : x \mapsto \frac{x^3}{1+x^6}$. Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

## 3. Calcul de développements limités

**Exercice 294**

Donner le développement limité en 0 à l'ordre indiqué des fonctions :

**1** tan à l'ordre 7.

**2** $x \mapsto \sin(\tan(x))$ à l'ordre 7.

**3** $x \mapsto (\ln(1+x))^2$ à l'ordre 4.

**4** $x \mapsto \exp(\sin(x))$ à l'ordre 3.

**5** $x \mapsto \sin^6(x)$ à l'ordre 9.

**6** $\cos(x) \cdot \ln(1+x)$ à l'ordre 4.

**7** $\frac{1}{\cos x}$ à l'ordre 4.

**8** $\arcsin\left(\ln(1+x^2)\right)$ à l'ordre 6.

**9** $(1+x)^{\frac{1}{1+x}}$ à l'ordre 3.

### Exercice 295

**1** Montrer que la fonction $f\ : x \mapsto \frac{\sin(x)}{1-x\sin(x)}$ définit une bijection d'un voisinage de 0 sur $\mathbb{R}$.
**2** Montrer que $f^{-1}$ admet un $\mathrm{DL}_3(0)$, et le calculer.
**3** Même étude pour $g\ : x \mapsto 2x + \sin(x)$.

## 4. Utilisation des développements limités

### Exercice 296

**1** Déterminer la limite en 0 de $\frac{\arctan x - \sin x}{\tan x - \arcsin x}$.
**2** Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\tan x - \mathrm{sh}\, 2x}{(1-\cos 3x)\arctan x}$.
**3** *(CCP MP)* Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - 4\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x} + 3\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)$.

### Exercice 297

Étudier la position du graphe de l'application $x \mapsto \ln(1+x+x^2)$ par rapport à sa tangente en 0 et 1.

### Exercice 298

**1** Étudier les branches infinies de la fonction $f\ : x \mapsto x^2 \arctan(\frac{1}{1+x^2})$.
**2** Étudier les branches infinies de la fonction $g\ : x \mapsto x\sqrt{\frac{x-1}{3x+1}}$.

### Exercice 299

Donner le $DL_7(0)$ de $f\ :\ x \mapsto \arcsin(\arctan x) - \arctan(\arcsin x)$. En déduire un équivalent de cette fonction.

### Exercice 300

**1** Développer de deux manières $(1-e^x)^n$ en 0 à l'ordre $n+2$.
**2** En déduire $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^p$ pour $p \in [\![0, n+2]\!]$.

## 5. Développements asymptotiques

### Exercice 301

**1** Donner un développement asymptotique de la suite de terme général $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ à la précision $\frac{1}{n^3}$.
**2** Donner un développement asymptotique à deux termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ donnée par $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $u_{n+1} = \ln(n + u_n)$.
**3** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^n + x - 1 = 0$ d'inconnue $x \in [0, 1]$ admet une unique solution $v_n$. Donner un développement asymptotique à deux termes de $v_n$.
**Indication :** une fois la limite de $(v_n)$ déterminée, on pourra poser $w_n = 1 - v_n$, puis utiliser le logarithme.
**4** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $x_n$ l'unique solution dans $]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ de l'équation $\tan(x) = x$. Donner un développement asymptotique à la précision $\frac{1}{n^2}$ de $x_n$.
**5** Soit $(x_n)$ la suite récurrente de terme initial $x_0 \in ]0, \pi/2]$ et d'itératrice sinus. Donner un développement asymptotique à deux termes de $x_n$ (ne donner qu'un équivalent si les séries ne sont pas connues).

### Exercice 302

**1** Donner un développement à la précision $\frac{1}{x^3}$ de la fonction arctangente en $+\infty$.
**2** Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'équation $x + \ln(x) = a$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$ possède une unique solution, notée $f(a)$. Donner un développement asymptotique à deux termes de $f$ en $+\infty$.
**3** Montrer que pour tout $\alpha > e$, l'équation $e^x = \alpha x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ admet exactement deux solutions, que nous noterons $f(\alpha)$ et $g(\alpha)$, avec $f(\alpha) < g(\alpha)$. Donner des développements asymptotiques à deux termes de $f$ et $g$ en $+\infty$.

### Exercice 303

Soit $u_0 \in ]0, 2\pi[$, puis $u_{n+1} = \sin(u_n/2)$.
**1** Montrer que $(u_n)$ tend vers 0.
**2** Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} (2^n u_n) = A$ pour un certain $A > 0$.
**3** Trouver un équivalent simple de $(u_n - A2^{-n})$ (ne faire cette question que si les séries sont connues).

CHAPITRE 30

# Analyse asymptotique (corrigés)

Aller aux énoncés 29

## 1. Comparaison de fonctions

Corrigé 292 (Équivalents de fonctions)

## 2. Formules de Taylor

Corrigé 293 (Dérivées successives en 0)

## 3. Calcul de développements limités

Corrigé 294 (Développements limités en 0)

Corrigé 295 (Développement limité d'une réciproque)

## 4. Utilisation des développements limités

Corrigé 296 (Calcul de limite par les développements limités)

Corrigé 297 (Positions relatives locales d'une courbe et de sa tangente en un point)

Corrigé 298 (Branches infinies de fonctions numérique par les développements limités)

Corrigé 299 (Équivalent par un développement limité)

Corrigé 300 (Résultat combinatoire par les développements limités)

## 5. Développements asymptotiques

Corrigé 301 (Développements asymptotiques de suites)

Corrigé 302 (Développements asymptotiques de fonctions)

Corrigé 303 (Suite récurrente par sinus de l'angle moitié *(Mines-Pont MP 06)*)

CHAPITRE 31

# Fractions rationnelles (énoncés)

Aller aux corrigés 32

## 1. Décomposition en éléments simples

**Exercice 304**

Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ de la fraction rationnelle $F$ donnée par :

**1** $\frac{X^5}{(X-1)^4}$.

**2** $\frac{X^3+X^2-X+1}{(X^2+1)(X^2+4)}$.

**3** $\frac{X^2-4}{X^2-3}$.

**4** $\frac{1}{X^3(X^2-1)}$.

**5** $\frac{2X^4+X^3+3X^2-6X+1}{2X^3-X^2}$.

**6** $\frac{2X^5-8X^3+8X^2-4X+1}{X^3(X-1)^2}$.

**Exercice 305**

Donner la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de

$$F = \frac{2X^8+5X^6-12X^5+30X^4+36X^2+24}{X^4(X^2+2)^3}.$$

**Exercice 306**

Soit $x_1, \dots, x_n$, $n$ scalaires distincts deux à deux. On pose

$$P(X) = (X-x_1)\dots(X-x_n) \text{ et } F(X) = \frac{1}{P}$$

Décomposer $F$ et $F^2$ en éléments simples (on exprimera les coefficients en fonction des $P'(x_i)$ et $P''(x_i)$).

Exercice 307

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ :

**1** *(Mines MP 05)* $\frac{1}{X(X+1)...(X+n)}$.

**2** *(Mines MP 05)* Soit $P$ un polynôme unitaire de degré $n$ et $Q = \prod_{i=0}^{n}(X-i)$.

**a** Décomposer $P/Q$ en éléments simples.

**b** Montrer que : $\max\{|P(k)|, 0 \leqslant k \leqslant n\} \geqslant n!/2^n$.

**3** $\frac{1}{(X-1)(X^n-1)}$.

**4** $\frac{1}{X^2(X-1)^n}$.

**5** $\frac{1}{(X^n-1)^2}$.

## 2. Calculs liés aux fractions rationnelles

Exercice 308

Calculer :

**1** $\frac{1}{1\times2\times3} + \frac{1}{2\times3\times4} + \frac{1}{3\times4\times5} + \dots$

**2** $\frac{1}{1\times3} + \frac{1}{5\times7} + \frac{1}{9\times11} + \frac{1}{13\times15} + \dots$

Exercice 309

**1** *(X PC 08)* Soit $P = X^3 + 2X^2 + X + 1$. Déterminer le nombre de racines réelles de $P$. On note $x_1, x_2, x_3$ les racines de $P$. Déterminer : $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$, $\frac{1}{x_1-2} + \frac{1}{x_2-2} + \frac{1}{x_3-2}$

**2** On note $w_1, \dots, w_{n-1}$ les racines de $X^n - 1$ différentes de 1. Calculer : $\prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1-w_i}$, $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1-w_i}$.

Exercice 310

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ non pôle de $F$, $F(n) \in \mathbb{Q}$. Montrer que $F \in \mathbb{Q}(X)$.

## Exercice 311

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ à racines simples : $x_1, \ldots, x_n$.
**1** *(Centrale MP 05, X MP 07)* Calculer : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P'(x_k)}$.
**2** On suppose $P(0) \neq 0$. Montrer : $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i P'(x_i)} = -\frac{1}{P(0)}$.
**3** *(Centrale MP 05)* Calculer : $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{P''}{P'}\right)(x_k)$.
**4** *(Centrale MP 05)* Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 2$. On note $x_1, \ldots, x_n$ les racines de $P$ comptées avec leurs multiplicités, et on suppose que $x_1$ est une racine simple. On note $y_2, \ldots, y_n$ les racines de $P'$ comptées avec leurs multiplicités. Montrer que :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{x_1 - x_k} = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{x_1 - y_k}.$$

## Exercice 312

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(P) \geqslant 2$.
**1** *(Centrale MP 06)*
**a** *(Théorème de Gauss-Lucas)* Montrer que les zéros de $P'$ sont dans l'enveloppe convexe des zéros de $P$.
**Remarque :** cette question est à réserver à ceux qui connaissent la notion d'enveloppe convexe. On peut toutefois répondre aux questions suivantes sans faire une référence explicite à celle-ci.
**b** On suppose que toute racine de $P$ est de partie réelle positive. Montrer qu'il en va de même des racines de $P'$.
**c** On suppose de plus que $P$ possède des racines non imaginaires pures. Montrer que toute racine imaginaire pure de $P'$ est racine de $P$.
**2** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si les racines de $P$ sont réelles et simples, alors le polynôme $Q = P'^2 - PP''$ n'a pas de racines réelles.

CHAPITRE 32

# Fractions rationnelles (corrigés)

Aller aux énoncés 31

## 1. Décomposition en éléments simples

Corrigé 304 (Décompositions élémentaires en éléments simples)

Corrigé 305 (Une décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$)

Corrigé 306 (Décomposition en éléments simples par développement limité)

Corrigé 307 (Décompositions en éléments simples plus difficiles)

## 2. Calculs liés aux fractions rationnelles

Corrigé 308 (Sommes et fractions rationnelles)

Corrigé 309 (Reprise d'un exercice sur les polynômes)

Corrigé 310 (Fraction rationnelle à coefficients rationnels *(Centrale MP 06)*)

Corrigé 311 (Sommes classiques et fractions rationnelles)

Corrigé 312 (Utilisation de la dérivée logarithmique)

CHAPITRE 33

# Matrices (énoncés)

Aller aux corrigés 34
$n$ désigne un entier naturel non nul.

## 1. Calcul matriciel

### Exercice 313

**1** Soit $A$ et $B$ deux matrices carrées $n \times n$ telles que $AB = A + I_n$. Montrer que $A$ et $B$ commutent.
**2** Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ tel que $AB = I_n + A + A^2$. Montrer que $AB = BA$.
**3** Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = A + B$. Montrer que $A$ et $B$ commutent.

### Exercice 314

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^2 = A + 2I_3$. En déduire que $A$ est inversible et calculer son inverse.

### Exercice 315

**1** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $B = A - I_3$. Calculer $B^n$, puis $A^n$, pour tout entier naturel $n$.
**2** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour tout entier $n$, calculer $A^n$.
**3** Soit $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $(A(\theta))^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$.
**4** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $A^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
**5** Calculer les puissances de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Faire le lien avec la suite de Fibonacci.

**Exercice 316**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On nomme *commutant* de $A$ et on note $C(A)$ l'ensemble des $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$.

**1** Montrer que $C(A)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, contenant l'ensemble $\mathbb{K}[A]$ des polynômes en $A$.

**2** Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des scalaires distincts deux à deux. Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec $D = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

**Exercice 317**

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AXB = 0.$$

Montrer que $A = 0$ ou $B = 0$.

**Exercice 318**

**1** Trouver les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

**2** Trouver les matrices $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commutant avec toute matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

**Exercice 319**

Soit $A$ et $B$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose $I_n - AB$ inversible. Montrer que $I_n - BA$ est inversible et déterminer son inverse.

**Exercice 320**

Soit $F$ et $G$ les sous-ensembles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définis par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & 0 & c \\ 0 & b+c & 0 \\ c+a & 0 & a+b \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

et

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a+b+d & a & c \\ 0 & b+d & 0 \\ a+c+d & 0 & a+c \end{pmatrix}, (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

Montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont on déterminera des bases.

## 2. Matrices et morphismes

Exercice 321

**1** Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A$.

On pose $e_1' = (1, 1, 1)$, $e_2' = (1, -1, 0)$, $e_3' = (1, 0, 1)$ et $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$.

**a** Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

**b** Écrire la matrice de $f$ dans cette base.

**c** Déterminer des bases de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.

**2** Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On pose $e_1' = (1, 0, 1)$, $e_2' = (-1, 1, 0)$, $e_3' = (1, 1, 1)$ et $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$.

**a** Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

**b** Déterminer la matrice de $f$ dans $\mathcal{B}'$.

**c** Calculer $M_{\mathcal{B}}(f^n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**3** Soit $h$ l'homomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ défini par rapport à deux bases $(e_1, e_2, e_3)$ et $(f_1, f_2)$ par la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

**a** On prend dans $\mathbb{R}^3$ la nouvelle base :

$$(e_1', e_2', e_3') = (e_2 + e_3, e_3 + e_1, e_1 + e_2).$$

Quelle est la nouvelle matrice $A_1$ de $h$ ?

**b** On choisit pour base de $\mathbb{R}^2$ les vecteurs :

$$(f_1', f_2') = \left(\frac{1}{2}(f_1 + f_2), \frac{1}{2}(f_1 - f_2)\right)$$

en conservant la base $(e_1', e_2', e_3')$ de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la nouvelle matrice $A_2$ de $h$ ?

Exercice 322

Soient, dans $\mathbb{R}^3$, $P$ le plan d'équation $z = x - y$, $D$ la droite d'équations : $x = -y = z$. Trouver la matrice canonique de la projection $p$ de $\mathbb{R}^3$ sur $P$ parallèlement à $D$.

Exercice 323

Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 3. Soit $f$ un endomorphisme non nul de $E$. Montrer que $f$ est de carré nul si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ telle que

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 3. Rang d'une matrice, opérations élémentaires

Exercice 324

**1** Calculer le rang des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix}1&1&2&1&1\\2&1&1&1&1\\1&1&1&2&1\\2&1&1&1&1\\1&1&1&1&2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\1&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\\1&0&0&1&0\\1&0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&1&1&1&3\\0&2&1&1&2\\1&1&1&2&2\\2&1&1&1&3\\1&-1&1&1&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&1&1&1&2\\0&2&1&1&2\\1&1&1&2&2\\2&1&1&1&3\\1&-1&1&1&0\end{pmatrix}.$$

Si on est courageux, on pourra calculer l'inverse lorsque la matrice est inversible.

**2** Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \geqslant 2$. Déterminer le rang de la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, dont tous les coefficients sont égaux à $a$ sauf les diagonaux qui valent 1.

**3** Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang 1 si et seulement si il existe deux vecteurs colonne $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nuls tels que $A = X^tY$.

**4** Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{K})$ telle que $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$. Déterminer le rang de $A$.

Exercice 325

Montrer que toute matrice de rang $r$ est la somme de $r$ matrices de rang 1.

Exercice 326

**1** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang 1. On écrit $M = P + iQ$, où $P, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer : $\operatorname{rg}(P) \leqslant 2$.

**2** Montrer : $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(B) \leqslant \operatorname{rg}(AB) + n$.

Exercice 327

En utilisant les opérations élémentaires, calculer l'inverse de

$$\begin{pmatrix}1&2&3&\dots&n\\0&1&2&\dots&n-1\\0&0&1&\dots&n-2\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\dots&1\end{pmatrix}.$$

## 4. Similitude, équivalence

Exercice 328

Soit $A$ et $B$ deux matrices carrées de taille $n$.

**1** Montrer que si $A$ et $B$ sont semblables, et si $P$ est un polynôme, alors $P(A)$ et $P(B)$ sont semblables.

**2** En déduire que s'il existe un polynôme $P$ tel que $P(A) = 0$ mais $P(B) \neq 0$, alors $A$ et $B$ ne sont pas semblables.

**3** Application : montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables.

**4** Soit $A = \begin{pmatrix} 29 & 38 & -18 \\ -11 & -14 & 7 \\ 20 & 27 & -12 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $A$ et $B$ ont même rang, même déterminant (notion que l'on verra plus tard, mais que l'on a rencontrée en début d'année), même trace mais ne sont pas semblables (calculer $(A - I_3)^2$ et $(B - I_3)^2$).

Exercice 329

Soit $H$ un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($n \geqslant 2$).

**1** Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $H = \{M, \mathrm{tr}(AM) = 0\}$.

**2** En déduire que $H$ contient une matrice inversible.

Exercice 330

**1** Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = I_2$, non scalaire. Montrer que $A$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**2** Soit $(A, B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $AB$ et $BA$ sont semblables. Ce résultat subsiste-t-il si $A$ n'est plus supposée inversible ?

**3** Soit $(i, j, k, l) \in [\![1, n]\!]^4$. Les matrices $E_{i,j}$ et $E_{k,l}$ sont-elles semblables ?

Exercice 331

Soient $A$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices triangulaires supérieures.

**1** Montrer que $AB$ est triangulaire supérieure.

**2** Montrer que si $A$ est triangulaire supérieure stricte, alors $A^n = 0_n$ (en particulier, $A$ est nilpotente).

**3** Soit $\varphi$ un automorphisme de $\mathbb{K}^n$ et $F$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ tel que $\varphi(F) \subset F$. Montrer que $\varphi^{-1}(F) \subset F$.

**4** Montrer que si $A$ est inversible, alors $A^{-1}$ est triangulaire supérieure.

**Exercice 332**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente, on définit : $\exp A = \sum_{i \geqslant 0} \frac{A^i}{i!}$.
Montrer que si $A$ et $B$ sont nilpotentes et commutent, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$. En déduire que $\exp(A)$ est toujours inversible et calculer son inverse.

**Exercice 333**

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!], |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$$

(on dit que $A$ est à *diagonale dominante*).
Montrer que $A$ est inversible.

CHAPITRE 34

# Matrices (corrigés)

Aller aux énoncés 33

$n$ désigne un entier naturel non nul.

## 1. Calcul matriciel

Corrigé 313 (Matrices commutant)

Corrigé 314 (Calcul d'inverse d'une matrice)

Corrigé 315 (Puissances de matrices)

Corrigé 316 (Commutant d'une matrice)

Corrigé 317 (Nullité de produits de matrices)

Corrigé 318 (Matrices commutant avec un ensemble de matrices)

Corrigé 319 (Inverse d'une matrice (X MP 09))

Corrigé 320 (Sous-espaces de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$)

## 2. Matrices et morphismes

Corrigé 321 (Changement de base)

Corrigé 322 (Matrice d'un projecteur *(*Mines MP 08))

Corrigé 323 (Représentation matricielle des endomorphismes de carré nul en dimension 3)

## 3. Rang d'une matrice, opérations élémentaires

Corrigé 324 (Calculs de rangs)

Corrigé 325 (Somme de matrices de rang 1)

Corrigé 326 (Inégalités entre rangs)

Corrigé 327 (Un calcul d'inverse)

## 4. Similitude, équivalence

Corrigé 328 (Condition suffisante de non similitude)

Corrigé 329 (Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$)

Corrigé 330 (Similitude de matrices)

Corrigé 331 (Produit et inverse de matrices triangulaires supérieures)

Corrigé 332 (Exponentielle d'une matrice nilpotente)

Corrigé 333 (Matrice à diagonale dominante (X MP 09, X PSI 09))

CHAPITRE 35

# Probabilités (énoncés)

Aller aux corrigés 36

## 1. Probabilité sur un univers fini

**Exercice 334**

**1** Au Tarot, à cinq joueurs, quelle est la probabilité d'obtenir au moins un bout dans une main ? *On rappelle qu'un jeu de Tarot est constitué de* 78 *cartes dont* 3 *cartes appelées « bout », et qu'à* 5 *joueurs, les mains sont de* 15 *cartes.*

**2** On considère un jeu de 52 cartes dont on pioche 5 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir un full (3 cartes d'une même hauteur et 2 autres d'une autre et même hauteur) ?

**Exercice 335**

**1** On lance deux dés équilibrés. Montrer que la probabilité qu'au moins l'un de ces deux dés donne un nombre pair est égale à $\frac{3}{4}$.

**2** On lance un dé équilibré 2 fois de suite.

**a** Quelle est la probabilité que la somme des numéros obtenus soit égale à 8 ?

**b** Il y a 11 sommes possibles. Pourquoi la réponse à la question précédente n'est-elle pas $\frac{1}{11}$ ?

**3** On lance 3 dés distincts. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 faces identiques ? Et 3 faces distinctes ?

**4** On lance un dé équilibré jusqu'à obtenir un 6 pour la troisième fois. Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :

**a** $A_n$ : « le troisième 6 apparait au $n$-ième lancer » (où $n \geqslant 3$)

**b** $B_n$ : « au $n$-ième lancer le troisième 6 n'est toujours pas apparu » (où $n \geqslant 3$)

**c** $C$ : « le troisième 6 n'apparait jamais. »

**5** On lance un dé équilibré jusqu'à obtenir un 6 pour la quatrième fois.
Déterminer la probabilité de l'évènement $A_n$ : « le quatrième 6 apparait au $n$-ième lancer » (où $n \geqslant 4$).

Exercice 336

**1** Un tiroir contient 15 paires de chaussettes toutes différentes. On prend 6 chaussettes. Quelle est la probabilité d'obtenir :

**a** 3 paires complètes ?

**b** au moins une paire ?

**c** exactement une paire ?

**2** Un tiroir contient $n$ chaussettes dont 3 rouges. Quelle doit être la valeur de $n$ pour qu'en prenant au hasard 2 chaussettes, la probabilité qu'on obtienne 2 chaussettes rouges soit égale à $\frac{1}{2}$ ?

Exercice 337

**1** On range les 20 tomes d'une encyclopédie sur une étagère, complètement au hasard. Quelle est la probabilité que les tomes 1 et 2 se trouvent côte à côte ?

**2** Une loterie compte 1000 billets dont 2 gagnants. Combien faut-il acheter de billets, pour avoir au moins une chance sur deux de gagner quelque chose ?

**3**

**a** On choisit au hasard une partie à 3 éléments de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ avec $n \geqslant 3$. Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :
– $A$ : « la partie contient 1 et 2 »
– $B$ : « la partie ne contient ni 1 ni 2 »
– $C$ : « la partie contient 1 ou 2 »

**b** Reprendre les trois questions précédentes, lorsque l'on choisit au hasard une partie quelconque de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ avec $n \geqslant 3$.

Exercice 338

**1** Si l'on jette 4 fois un dé à six faces, est-il plus probable qu'on obtienne au moins un 6 ou qu'on n'en obtienne pas ?

**2** Maintenant on jette 24 fois deux dés à six faces, est-il plus probable qu'on obtienne au moins un double 6 ou qu'on n'en obtienne pas ?

Exercice 339

Les $n$ invités d'un repas de Noël déposent un cadeau au pied du sapin. L'hôte prend l'initiative de distribuer au hasard un cadeau à chacun de ses invités. Quelle est la probabilité que personne ne reçoive le cadeau qu'il a amené ?

## 2. Conditionnement et indépendance

Exercice 340

Une maladie affecte une personne sur mille. On dispose d'un test sanguin qui détecte la présence de cette maladie chez 99% des malades. Mais le test donne un résultat faussement positif chez $0,2\%$ des personnes saines testées.
Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement malade lorsque son test est positif ?

Exercice 341

On lance deux dés équilibrés et on considère les évènements $A$ « le premier dé donne un nombre pair », $B$ « le second dé donne un nombre pair » et $C$ « les deux dés donnent des nombres de même parité ». Les événements $A$ et $B$ sont-ils indépendants ? Même question avec $A$ et $C$, avec $A$ et $B \cap C$ et avec $B \cup C$.

Exercice 342

**1** Une urne contient 20 boules blanches et 30 boules noires. On tire successivement et sans remise 3 boules. Quelle est la probabilité que la première soit noire, la deuxième blanche, et la troisième noire ?

**2** Deux urnes $U_1$ et $U_2$ contiennent au départ chacune 12 boules blanches et 13 boules noires. On tire une boule de $U_1$, on note sa couleur, et on la met dans $U_2$. On tire alors dans $U_2$. Quelle est la probabilité de tirer deux fois une boule noire ?

**3** L'urne 1 contient 10 boules blanches et 2 boules noires. L'urne 2 contient 2 boules blanches et 2 boules noires. On choisit, au hasard, l'une de ces 2 urnes indiscernables et on pioche 2 boules dans cette urne.

**a** Quelle est la probabilité que les 2 boules tirées soient blanches ?

**b** L'expérience est réalisée, et les 2 boules tirées sont blanches. Quelle est la probabilité que l'urne choisie soit la 1 ?

Exercice 343

On lance indéfiniment une pièce équilibrée. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $P_k$ l'événement « obtenir Pile au $k$-ème lancer » et $A_k = P_k \cap \overline{P_{k+1}}$. La famille $(A_k)_k$ est-elle une famille d'événements mutuellement indépendants ? d'événements indépendants deux à deux ?

### Exercice 344

On considère une sauterelle se déplaçant par sauts successifs sur les trois sommets $A, B$ et $C$ d'un triangle. Au début de l'expérience, on la place sur le sommet $A$ et ensuite elle se déplace de la manière suivante :
– si elle se trouve en $A$, elle saute sur l'un des trois sommets de façon équiprobable,
– si elle se trouve en $B$, alors elle fait un saut sur place,
– si elle se trouve en $C$, alors elle fait un saut sur place une fois sur trois, et elle saute en $B$ sept fois plus souvent qu'en $A$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $A_n$ (respectivement $B_n$ et $C_n$) l'évènement : « au $n$-ème saut la sauterelle choisit le sommet $A$ (resp. $B$ et $C$) » et on note $a_n, b_n$ et $c_n$ leur probabilité respective.

**1** Exprimer $a_{n+1}$ en fonction de $a_n, b_n$ et $c_n$. Exprimer de même $b_{n+1}$ et $c_{n+1}$.

**2** Exprimer $c_{n+2}$ en fonction de $c_n$ et $c_{n+1}$.

**3** En déduire une expression de $c_n$ en fonction de $n$.

**4** Étudier la convergence des suites $(a_n)_n, (b_n)_n$ et $(c_n)_n$.

### Exercice 345

Trois prisonniers sont dans une cellule. Ils savent que deux vont être condamnés à mort et un gracié, mais ils ne savent pas qui. L'un d'entre eux va voir le gardien et lui demande : « Je sais bien que tu ne peux rien me dire, mais tu peux au moins me montrer un de mes compagnons qui sera exécuté ». Le gardien réfléchit, se dit que de toutes manières au moins l'un des deux autres prisonniers sera condamné, et s'exécute. Le prisonnier lui répond alors : « Merci, avant, j'avais une chance sur trois d'être gracié, et maintenant, j'ai une chance sur deux. » A-t-il raison de croire que sa probabilité d'être exécuté a varié ?

### Exercice 346

On dispose de deux pièces d'apparence identique, la pièce $A$ donnant Pile avec la probabilité $a \in ]0,1[$, et la pièce $B$ donnant Pile avec la probabilité $b \in ]0,1[$.
Pour le premier lancer, on choisit une pièce au hasard, et pour les lancers suivants, on adopte la stratégie suivante : si on obtient Pile, on garde la pièce pour le lancer suivant, et si on obtient Face, on change de pièces pour le lancer suivant.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $A_k$ l'évènement « le $k$-ème lancer se fait avec la pièce $A$ » et $E_k$ l'évènement « le $k$-ème lancer donne Pile ».

**1** Déterminer une relation entre $P(E_k)$ et $P(A_k)$.

**2** Déterminer une relation entre $P(A_{k+1})$ et $P(A_k)$.

**3** En déduire $P(A_k)$ puis $P(E_k)$.

CHAPITRE 36

# Probabilités (corrigés)

Aller aux énoncés 35

## 1. Probabilité sur un univers fini

Corrigé 334 (Probabilités sur les cartes)

Corrigé 335 (Probabilités sur les dés)

Corrigé 336 (Probabilités sur les chaussettes)

Corrigé 337 (Probabilités diverses)

Corrigé 338 (Le paradoxe du chevalier de Méré)

Corrigé 339 (Dérangements à Noël)

## 2. Conditionnement et indépendance

Corrigé 340 (Test sanguin)

Corrigé 341 (Indépendances et dés)

Corrigé 342 (Indépendance et boules)

Corrigé 343 (Indépendance et lancers d'une pièce)

Corrigé 344 (Sauterelles à foison)

Corrigé 345 (Prisonniers)

Corrigé 346 (Lancers de pièces)

CHAPITRE 37

# Intégration (énoncés)

Aller aux corrigés 38

Sauf mention contraire, $a$ et $b$ sont deux réels, $a < b$. On admet (provisoirement) le théorème fondamental de l'analyse, faisant le lien entre primitive et intégrale.

## 1. Annulation et intégrales

**Exercice 347**

Déterminer les fonctions $f$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, continues, telles que $\int_a^b f(t)dt = (b - a)\sup_{[a,b]} |f|$.

**Exercice 348**

**1** Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$, d'intégrale nulle sur $[a, b]$. Montrer que $f$ s'annule sur $]a, b[$.
**2** Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $a \in ]0, 1[$ tel que $f(a) = a$.
**3** Soit $f$ continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \int_0^1 f(u)u^k du = 0.$$

Montrer que $f$ admet au moins $n + 1$ zéros distincts dans $]0, 1[$.
**4** *(X PC 09)* Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, \pi], \mathbb{R})$. On suppose que : $\int_0^\pi f(t)\cos(t)\mathrm{d}t = \int_0^\pi f(t)\sin(t)\mathrm{d}t = 0$. Montrer que $f$ s'annule au moins deux fois sur $[0, \pi]$.
**5** *(Cachan 07)* Soit $f$ une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, $2\pi$-périodique et de moyenne nulle. Montrer que $f + f''$ s'annule quatre fois au moins sur $[0, 2\pi[$.

Exercice 349

**1** Soit $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues, telles que :

$$\forall\, x \in [0,1], f(x) = \int_0^x g(t)\mathrm{d}t \text{ et } g(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Montrer $f = g = 0$.

**2** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_{[0,1]} f^2 = \int_{[0,1]} f^3 = \int_{[0,1]} f^4$. Montrer $f = 0$ ou $f = 1$.

**3** Soit $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall g \in \mathcal{E}\left([0,1], \mathbb{R}\right), \quad \int_{[0,1]} fg = 0.$$

Montrer que $f = 0$.

**4** *(Centrale 08)* Soit $f, g \; : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \int_a^b f \int_a^b g = 0$. Montrer que $f = 0$ ou $g = 0$.

**5** Soit $f$ continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^1 f^n(u)du$ ne prenne qu'un nombre fini de valeurs quand $n$ décrit $\mathbb{N}$. Montrer que $f = -1$ ou $f = 0$ ou $f = 1$.

## 2. Inégalités intégrales

Exercice 350

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $a < b < c$. Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,c])$. Montrer :

$$\frac{1}{c-a}\int_a^c f(t)\mathrm{d}t \leqslant \max\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t, \frac{1}{c-b}\int_b^c f(t)\mathrm{d}t\right).$$

Exercice 351

**1** Soit $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$, continues et positives, telles que $fg \geqslant 1$. Montrer

$$\left(\int_{[0,1]} f\right)\left(\int_{[0,1]} g\right) \geqslant 1.$$

**2** *(X MP 05)* Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_{[0,1]} f = 0$, $m$ le minimum de $f$ et $M$ son maximum. Prouver $\int_{[0,1]} f^2 \leqslant -mM$.

**3** *(X MP 05)* Soit $f$ et $g$ deux fonctions croissantes et continues sur $[0,1]$. Comparer $\int_{[0,1]} fg$ et $(\int_{[0,1]} f)(\int_{[0,1]} g)$.

## 3. Suites et intégrales

### Exercice 352

**1** En remarquant que $\frac{(-1)^k}{k} = -\int_0^1 (-x)^{k-1} \mathrm{d}x$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

**2** *(Mines MP 08)* Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{3k+1}$.

**3** *(Mines MP 08)* Nature de la suite de terme général $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}$.

### Exercice 353

**1** *(Mines PC)* Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}_+^*)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 x^n f(x) \mathrm{d}x$. Que peut-on dire de la suite $(I_n)$ ?

**2** *(X PC 09)* Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$ : $I_n = n \int_0^1 t^n f(t) \mathrm{d}t$. Déterminer la limite de $(I_n)$.

**3** *(Centrale et Mines MP 05, TPE 09)* Soit $f$ une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer la limite de $I_n = \int_0^1 f(t^n) \mathrm{d}t$.

### Exercice 354

On considère une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, décroissante de limite nulle en $+\infty$, telle que $\int_0^x f(t) \mathrm{d}t$ tende vers un réel $l$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

**1** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n^2} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_0^n f(t) \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n^2-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

En déduire que $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n^2} f\left(\frac{k}{n}\right)$ tend vers $l$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**2** Application : calculer

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n^2} \frac{n}{n^2+k^2}.$$

### Exercice 355

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$. Montrer que la suite de terme général $\int_a^b f(t) \cos(nt) \mathrm{d}t$ converge vers 0.

**Indication :** le montrer d'abord pour les fonctions en escalier.

## 4. Sommes de Riemann

**Exercice 356**

Calculer à l'aide d'une somme de Riemann : $\int_a^b e^t \mathrm{d}t$.

**Exercice 357**

Calculer :

**1** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

**2** $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+n^2}$.

**3** $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$ ;

**Exercice 358**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}.$$

Calculer $l = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$. En appliquant l'égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 à la fonction arctangente (en $\frac{k}{n}$, évaluée en $\frac{k-1}{n}$), donner un équivalent de $u_n - l$.

**Exercice 359**

En utilisant les sommes de Riemann et l'égalité des accroissements finis, montrer que si $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$, alors $\int_{[a,b]} f' = f(b) - f(a)$.

**Exercice 360**

Soit $f$ et $g$ continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Calculer :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

## 5. Divers

**Exercice 361**

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}_+^*)$ et $\Phi\ : f \in E \mapsto \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{f(t)} \times \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$. Déterminer $\inf \Phi$ et $\sup \Phi$.

**Exercice 362**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux telle que $f$ soit de limite $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$. Montrer que $\frac{1}{x} \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ tend vers $l$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 363**

**1** *(X PC 09)* Déterminer les $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\mathrm{d}t$.
**2** *(Centrale PC 09)* Trouver les $f \in \mathcal{C}^0([0,1],[0,1])$ telles que $\int_0^1 f = \int_0^1 f^2$.

**Exercice 364**

**1** On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $f : x \mapsto \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t$. Calculer la limite de $f$ en 0, en $+\infty$.
**2** Étudier en 1 la fonction $x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$.

**Exercice 365**

Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{+\infty} f + f' = 0$ est de limite nulle en $+\infty$.

CHAPITRE 38

# Intégration (corrigés)

Aller aux énoncés 37

Sauf mention contraire, $a$ et $b$ sont deux réels, $a < b$. On admet (provisoirement) le théorème fondamental de l'analyse, faisant le lien entre primitive et intégrale.

## 1. Annulation et intégrales

Corrigé 347 (Lorsque la valeur moyenne est aussi le maximum)

Corrigé 348 (Annulation de fonction et intégrales)

Corrigé 349 (Nullité de fonction et intégrales)

## 2. Inégalités intégrales

Corrigé 350 (Inégalité entre valeurs moyennes)

Corrigé 351 (Inégalités intégrales)

## 3. Suites et intégrales

Corrigé 352 (Suites étudiées à l'aide d'intégrales)

Corrigé 353 (Limite de suites d'intégrales)

Corrigé 354 (Comparaison somme intégrale)

Corrigé 355 (Lemme de Lebesgue)

## 4. Sommes de Riemann

Corrigé 356 (Calcul d'intégrale en passant par une somme de Riemann)

Corrigé 357 (Calcul de limites par les sommes de Riemann)

Corrigé 358 (Estimation de la vitesse de convergence d'une somme de Riemann)

Corrigé 359 (Le théorème fondamental de l'analyse par les sommes de Riemann)

Corrigé 360 (Une pseudo-somme de Riemann)

## 5. Divers

Corrigé 361 (Extremums d'une fonction définie par des intégrales *(CCP 09)*)

Corrigé 362 (Cesàro intégral)

Corrigé 363 (Équations fonctionnelles intégrales)

Corrigé 364 (Fonctions définies par une intégrale)

Corrigé 365 (Équation différentielle et limite à l'infini)

CHAPITRE 39

# Primitives et formules de Taylor (énoncés)

Aller aux corrigés 40

## Exercice 366

Calculer

**1** $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+1}$.

**2** $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^4-1)}$.

**3** $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)^2}$.

**4** $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+ix}$.

**5** $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}$.

**6** *(X MP 08)* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-x^2}{1-x^2+x^4}\mathrm{d}x$.

**7** *(X MP 08)* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $(a, b \in \mathbb{R}_+^*)$.

## Exercice 367

Calculer

**1** $\int_0^{2\pi} \sin px \sin qx \mathrm{d}x$, $\int_0^{2\pi} \sin px \cos qx \mathrm{d}x$, $\int_0^{2\pi} \cos px \cos qx \mathrm{d}x$, où $(p, q) \in \mathbb{N}^2$

**2** $\int \cos^2 x \sin^2 x \mathrm{d}x$.

**3** $\int \cos^2 x \sin^3 x \mathrm{d}x$.

**4** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^3 x}\mathrm{d}x$.

**5** $\int_{\sqrt{2}}^{\pi+\sqrt{2}} \frac{(\cos(2t))^3}{2+\sin^2 t \cos^2 t}\mathrm{d}t$.

**6** $\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+3\sin^2 x}$.

**7** $\int \frac{\sin(x)\mathrm{d}x}{\sin^3(x)+\cos^3(x)}$.

**8** $\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$.

**9** $\int \frac{\sin(2x)}{1+\cos^2(x)\mathrm{d}x}$.

## Exercice 368

Calculer

**1** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x(1+\operatorname{sh} x)}$.

**2** $\int \frac{\mathrm{d}x}{5\operatorname{ch} x+3\operatorname{sh} x+4}$.

## Exercice 369

Calculer

**1** $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x+1}\mathrm{d}x$.

**2** $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}}$.

**3** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$.

**4** *(X MP 08)* $\int_a^b \sqrt{(b-x)(x-a)}\mathrm{d}x$.

**5** *(X MP 08)* $\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\sin t}\mathrm{d}t$.

**6** $\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x-1}}$.

**7** $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x+1}}\mathrm{d}x$.

## Exercice 370

Trouver les primitives de $f$, où $f$ est successivement donnée par

**1** $x \mapsto x\arctan(x)^2$.

**2** $x \mapsto \frac{1}{x+x\ln(x)^2}$.

**3** $x \mapsto \frac{1}{x}\ln(\ln(x))$.

**4** $x \mapsto \arctan\sqrt{1-x^2}$.

## Exercice 371

Calculer $\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan(t))\mathrm{d}t$.

## Exercice 372

Donner une méthode pour calculer $\int_0^1 \frac{t^p}{(1+t^2)^q}\mathrm{d}t$, lorsque $(p,q)\in\mathbb{N}^2$.

## Exercice 373

Soit $f$ continue sur $[a,b]$ telle que : $\forall x\in[a,b], f(a+b-x)=f(x)$.

**1** Montrer que $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

**2** Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{xe^{ix}}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

## Exercice 374

**1** Soit $f\in\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Montrer : $\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x$.

**2** Calculer $\int_0^\pi \frac{x\sin^{2n}x}{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x}\mathrm{d}x$.

Exercice 375

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) = 1$, et : $\forall\, x \geqslant \frac{1}{2},\ f(x) = 0$.

**1** Montrer que $\sup\limits_{\mathbb{R}^+} \left| f^{(n)} \right| \geqslant 2^n n!$.

**2** Montrer que pour $n \geqslant 1$, $\sup\limits_{\mathbb{R}^+} \left| f^{(n)} \right| > 2^n n!$

Exercice 376

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que :

(1) $\forall\, n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$.

(2) $\exists \lambda > 0, \forall\, n \in \mathbb{N}, \sup\limits_{\mathbb{R}} \left| f^{(n)} \right| \leqslant \lambda^n n!$.

**1** Montrer que $f$ est nulle sur l'intervalle $]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}[$, puis sur $\mathbb{R}$.

**2** Montrer que la première condition n'est pas suffisante pour que $f$ soit nulle.

CHAPITRE 40

# Primitives et formules de Taylor (corrigés)

Aller aux énoncés 39

Corrigé 366 (Fractions rationnelles)

Corrigé 367 (Fonctions trigonométriques circulaires)

Corrigé 368 (Fonctions trigonométriques hyperboliques)

Corrigé 369 (Racines)

Corrigé 370 (Primitives diverses)

Corrigé 371 (Calcul d'une intégrale)

Corrigé 372 (Méthode de calcul pour une intégrale *(Centrale MP 09)*)

Corrigé 373 (Une astuce de calcul intégral *(Mines PSI 08)*)

Corrigé 374 (La même astuce de calcul intégral *(Centrale MP 09)*)

Corrigé 375 (Fonction nulle sur un voisinage de $+\infty$)

Corrigé 376 (Fonction dont les dérivées sont nulles en 0)

CHAPITRE 41

# Déterminant (énoncés)

Aller aux corrigés 42
$n$ désigne un entier naturel non nul.

## 1. Calculs de déterminants

**Exercice 377**

Montrer sans calcul que pour tous réels $a, b, c, d$ :

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

**Exercice 378**

Montrer que le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

Exercice 379

Calculer les déterminants suivants :

**1**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 \end{vmatrix}.$$

**2**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{vmatrix}$$

**3**

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & 2 & & n \end{vmatrix}$$

**4**

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a, b, c$ pour que ce déterminant soit nul.

Exercice 380

**1** Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & n & \dots & 2 \\ 2 & 1 & \vdots & 3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

**Réponse :** $(-1)^{n-1} n^{n-2} \frac{n(n+1)}{2}$.

**2** Calculer $(a, b, c \in \mathbb{R})$ :

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (c+a)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

**Réponse :** $2abc(a+b+c)^3$.

**3** *(X MP 09, CCP PSI 09)* Soit $\Phi\ : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto^t A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\det \Phi$.

**4** *(X PC 09)* Soit $\Phi\ : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto A + 2^t A$. Déterminer la trace et le déterminant de $\Phi$.

### Exercice 381

On considère un entier $n \geqslant 1$ et $n+1$ scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$. Calculer :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \ldots & \alpha_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

### Exercice 382

On considère un entier $n \geqslant 2$ et $n$ scalaires $a_0, \ldots, a_{n-1}$. Calculer

$$\begin{vmatrix} -X & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & -X & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{n-1} - X \end{vmatrix}.$$

### Exercice 383

*(Mines PSI)* Soit $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ et $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, où $m_{i,i} = a_i + b_i$ et $m_{i,j} = b_i$ si $i \neq j$. Calculer le déterminant de $M$.

### Exercice 384

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_n = X^n - X + 1$.

**1** Montrer que $P_n$ admet $n$ racines distinctes $z_1, \ldots, z_n$ dans $\mathbb{C}$.

**2** Calculer le déterminant de $\begin{pmatrix} 1+z_1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1+z_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & 1+z_n \end{pmatrix}$.

**Exercice 385**

Soit $a, b, c$ trois réels, et $\Delta_n$ le déterminant de taille $n$ ($n \geqslant 2$) suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & & 0 \\ c & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ 0 & & c & a \end{vmatrix}$$

On pose $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = a$.

**1** Montrer que pour tout entier naturel $n$ :

$$\Delta_{n+2} = a\Delta_{n+1} - bc\Delta_n.$$

**2** En déduire une méthode de calcul de $\Delta_n$ pour tout entier naturel $n$.

**3** Donner une formule explicite pour $\Delta_n$ dans le cas où $a^2 = 4bc$.

**Exercice 386**

*(Centrale PC 09)* Soit $a, b, c$ trois réels, $b \neq c$. Calculer :

$$\begin{vmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ c & a & \ddots & \mathbf{b} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \mathbf{c} & \ddots & \ddots & b \\ c & \dots & \dots & c & a \end{vmatrix}.$$

**Exercice 387**

On se donne $m$ et $n$ dans $\mathbb{N}^*$ avec $m < n$, $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}_m[X]$, $a_1, \dots, a_n$ dans $\mathbb{R}$. Calculer le déterminant de la matrice $(P_i(a_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

## 2. Propriétés du déterminant

**Exercice 388**

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ ($p, q \geqslant 1$).

**1** Calculer

$$\begin{vmatrix} A & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & B \end{vmatrix}.$$

**2** Étendre ce résultat à $\begin{vmatrix} A & C \\ 0_{q,p} & B \end{vmatrix}$, où $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Exercice 389

**1** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}[X])$. Montrer que si $a_{i,j} = P_{i,j}(X) \in \mathbb{R}[X]$ (pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$), alors

$$(\det(A))' = \begin{vmatrix} P'_{1,1} & P_{1,2} & \dots & P_{1,n} \\ P'_{2,1} & P_{2,2} & \dots & P_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P'_{n,1} & P_{n,2} & \dots & P_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} P_{1,1} & P'_{1,2} & P_{1,3} & \dots & P_{1,n} \\ P_{2,1} & P'_{2,2} & P_{2,3} & \dots & P_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n,1} & P'_{n,2} & P_{n,3} & \dots & P_{n,n} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} P_{1,1} & \dots & P_{1,n-1} & P'_{1,n} \\ P_{2,1} & \dots & P_{2,n-1} & P'_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ P_{n,1} & \dots & P_{n,n-1} & P'_{n,n} \end{vmatrix}$$

**2** Calculer, au moyen d'une récurrence, le déterminant suivant de taille $n$ :

$$\begin{vmatrix} 1+X & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1+X \end{vmatrix}.$$

Exercice 390

**1** *(X MP 09)* Soit $n$ un entier pair, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique, $J$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Montrer que, pour tout réel $t$, $\det(A+tJ) = \det(A)$.

**2** *(X PC 09)* Déterminer les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que : $\forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \det(A+M) = \det(A) + \det(M)$.

Exercice 391

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On considère l'endomorphisme $u_A$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ défini par $B \mapsto AB$. Préciser la matrice de $u_A$ dans la base $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$, et vérifier que $\det(u_A) = (\det A)^2$.

Exercice 392

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$ et $\det(A+B) \geqslant 0$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\det(A^p + B^p) \geqslant 0$.

Exercice 393

Soit $A$ et $H$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{rg}(H) = 1$. Montrer : $\det(A+H)\det(A-H) \leqslant \det A^2$.

## 3. Utilisation du déterminant

**Exercice 394**

On suppose qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = -I_n$. Montrer que $n$ est pair. Si $n$ est pair, existe-t-il une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = -I_n$ ?

**Exercice 395**

Montrer qu'une matrice antisymétrique de taille impaire ne peut pas être inversible.

**Exercice 396**

En utilisant les déterminants, inverser la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 397**

On considère trois réels $a, b, c$, et

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$$

Calculer le déterminant et la comatrice de $A$. Quand $A$ est inversible, préciser $A^{-1}$.

**Exercice 398**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, où $n \geqslant 2$. Calculer $\operatorname{rg}(\operatorname{com} A)$ et $\det(\operatorname{com} A)$.
**Indication :** discuter selon le rang de $A$, le cas compliqué étant $\operatorname{rg}(A) = n - 1$.

**Exercice 399**

*(Mines MP 08, X PC 09)* Montrer que si deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors elles le sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

CHAPITRE 42

# Déterminant (corrigés)

Aller aux énoncés 41
$n$ désigne un entier naturel non nul.

## 1. Calculs de déterminants

Corrigé 377 (Nullité d'un déterminant)

Corrigé 378 (Déterminant d'une matrice triangulaire)

Corrigé 379 (Calculs simples de déterminants)

Corrigé 380 (Calculs divers de déterminants)

Corrigé 381 (*Déterminant de Vandermonde*)

Corrigé 382 (Matrice compagnon)

Corrigé 383 (Calcul de déterminant par multilinéarité)

Corrigé 384 (*Mines MP 08*)

Corrigé 385 (Un déterminant tridiagonal)

Corrigé 386 (Calcul astucieux de déterminant)

Corrigé 387 (*Mines MP 08*)

Si $m < n-1$, alors $(P_1, \ldots, P_n)$ est liée, donc la famille des lignes de la matrice $A$ dont on cherche le déterminant est liée : ce déterminant est nul.

On suppose désormais $m = n-1$.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, soit

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{i,k} X^k$$

la décomposition de $P_i$ dans la base canonique. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$P_i(a_j) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{i,j} a_j^k.$$

On observe que $A$ peut s'écrire comme le produit $BV$, où

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_{1,0} & \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,n-1} \\ \alpha_{2,0} & \alpha_{2,1} & \dots & \alpha_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,0} & \alpha_{n,1} & & \alpha_{n,n-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$\det(A) = \det(B) \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

## 2. Propriétés du déterminant

Corrigé 388 (Déterminant par blocs)

Corrigé 389 (Dérivation d'un déterminant)

Corrigé 390 (Perturbation matricielle sans effet sur le déterminant)

Corrigé 391 (Déterminant d'un endomorphisme matriciel)

Corrigé 392 (*(Ulm MP 08)*)

Corrigé 393 (*X 07, Mines MP 08*)

$H$ étant de rang 1, elle est équivalente à $J_r(1)$. Soit $U, V \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $H = UJ_1(n)V$.
Soit $B = U^{-1}AV^{-1} = (b_{i,j})$, de sorte que $A = UBV$.
On a $\det(A+H)\det(A-H) = \det(U)^2\det(V)^2\det(B - J_1(n))\det(B + J_1(n))$.
En utilisant la linéarité du déterminant par rapport à la première colonne, on observe que

$$\det(B + J_1(n)) = \det(B) + \begin{vmatrix} 1 & b_{1,2} & \dots & b_{1,n} \\ 0 & b_{2,2} & \dots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{n,2} & \dots & b_{n,n} \end{vmatrix},$$

soit encore $\det(B + J_1(n)) = \det(B) + \Delta$, où $\Delta$ est le mineur du coefficient en position $(1,1)$ de $B$. De même, $\det(B - J_1(n)) = \det(B) - \Delta$, puis

$$\det(A+H)\det(A-H) = \det(U)^2\det(V)^2(\det(B)^2 - \Delta^2) = \det(U)^2\det(V)^2\det(B)^2 = \det(A)^2.$$

## 3. Utilisation du déterminant

Corrigé 394 (Racines carrées réelles de l'unité)

Corrigé 395 (Matrice antisymétrique de taille impaire)

Corrigé 396 (Inversion matricielle par le déterminant)

Corrigé 397 (Comatrice)

Corrigé 398 (Rang et déterminant de la comatrice)

Corrigé 399 (Indépendance de la similitude par rapport au corps des scalaires)

CHAPITRE 43

# Séries numériques (énoncés)

Aller aux corrigés 44

## 1. Calculs de sommes

Exercice 400

Montrer la convergence et calculer la somme de $\sum u_n$, lorsque :

**1** $u_n = \frac{n}{n^4+n^2+1}$.

**2** $u_n = \frac{2n-1}{n^3-4n}$ (où $n \geqslant 3$).

**3** $u_n = \frac{1}{n^2+3n}$.

**4** $u_n = \frac{1}{n^2+3n+2}$.

**5** (Mines MP) $u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} k^2}$.

Exercice 401

Montrer la convergence et calculer la somme de $\sum u_n$, lorsque :

**1** $u_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ $(n \geqslant 2)$.

**2** On pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que la série $\sum u_n$ où $u_n = \frac{H_n}{n(n+1)(n+2)}$ converge, et calculer sa somme.

**3** $\sum \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

**4** $u_n = (-1)^n \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ $(n \geqslant 2)$.

**Indication :** on pourra utiliser la formule de Stirling.

## 2. Séries à termes positifs

**Exercice 402**

Déterminer la nature de $\sum u_n$, où :

**1** $u_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

**2** $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

**3** $u_n = \frac{\ln(n)}{\ln(e^n - 1)}$.

**4** $u_n = \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$.

**5** $u_n = \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$.

**6** $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$.

**7** $u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$.

**8** $u_n = e^{-\sqrt{n}}$.

**9** $u_n = \sqrt{\operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right) - 1}$.

**10** $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

**Exercice 403**

Soit $\alpha, \beta > 0$.

**1** Montrer que $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

**2** Donner un équivalent des sommes partielles lorsque $\alpha = \beta = 1$.

**Exercice 404**

On considère une série convergente à termes positifs $\sum a_n$.
Étudier la convergence des séries suivantes :

**1** $\sum a_n^2$.

**2** $\sum \frac{a_n}{a_n+1}$.

**3** $\sum a_n a_{2n}$.

**4** $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$.

**Remarque :** pour prolonger l'exercice, on peut se poser les questions suivantes :

**5** Étude des réciproques.

**6** Que se passe-t-il si on ne suppose plus la série à termes positifs ?

**Exercice 405**

Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries convergentes à termes positifs.
Établir la convergence des séries suivantes :
**1** $\sum \max(a_n, b_n)$.
**2** $\sum \sqrt{a_n b_n}$.
**3** $\sum \frac{a_n b_n}{a_n+b_n}$ (en supposant que $(a_n + b_n)$ ne s'annule pas).

**Exercice 406**

Soit $a > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $u_n = \frac{a^n n!}{n^n}$.
Étudier, selon la valeur de $a$, la convergence de $\sum u_n$.

**Exercice 407**

**1** Donner un exemple de série convergente $\sum u_n$ tel que $u_n \neq \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ (si possible avec $u_n \geqslant 0$).
**2** Montrer cependant que si $\sum u_n$ converge et si $(u_n)$ décroît, alors $u_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

## 3. Séries à termes quelconques

**Exercice 408**

Déterminer la nature de $\sum u_n$, où :
**1** $u_n = \frac{\sin(n^2)}{n^2}$.
**2** $u_n = \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$.
**3** $u_n = \sin\left(\pi(2-\sqrt{3})^n\right)$.
**4** $u_n = \sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)$.
**Indication :** faire le lien avec la question précédente.
**5** $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.
**6** $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{2n+1}\right)$.

**Exercice 409**

Donner un exemple de série divergente dont le terme général tend vers 0 et dont les sommes partielles sont bornées.

## 4. Applications aux développements asymptotiques

### Exercice 410

**1** Soit $(u_n)$ la suite de terme initial $u_0 \in ]0, \frac{\pi}{2}[$, et d'itératrice sinus. Donner un développement asymptotique à deux termes de $u_n$.
**2** (Mines MP 2010) Soit $(u_n)$ telle que $u_0 > 0$ et d'itératrice $f \ : x \mapsto x + \frac{1}{\sqrt{x}}$. Donner un développement asymptotique à deux termes de $u_n$.
**3** Soit $(x_n)$ une suite définie par $x_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$x_{n+1} = x_n + x_n^2.$$

**a** Montrer que $(x_n)$ tend vers $+\infty$.
**b** On pose $u_n = 2^{-n} \ln(x_n)$ et $v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que la série de terme général $v_n$ converge. En déduire que $(u_n)$ converge.
**c** Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $x_n \sim \alpha^{2^n}$.
**4** (Mines MP 2006) Soit $u_0 \in ]0, 2\pi[$, puis $u_{n+1} = \sin(u_n/2)$.
**a** Montrer que $(u_n)$ tend vers 0.
**b** Montrer que $\lim\limits_{n \to \infty} (2^n u_n) = A$ pour un certain $A > 0$.
**c** Trouver un équivalent simple de $(u_n - A2^{-n})$.

### Exercice 411

**1** (Mines MP) On pose

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n}.$$

**a** Montrer que $(a_n)$ converge et trouver sa limite $\lambda$.
**b** Trouver un équivalent simple de $a_n - \lambda$.
**2** Développement asymptotique à deux termes de $u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{\ln(p)}{p}$.
**3** Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs. On note $R_n = \sum k = n + 1^{\infty} u_k$ et on suppose

$$u_n \sim R_n^2.$$

Déterminer un équivalent de $u_n$.

### Exercice 412

Convergence et somme de
**1**
**a** $\sum \frac{1}{(2n)!}$.
**b** $\sum \frac{1}{(3n)!}$.
**c** $\sum \frac{n^3}{n!}$.
**2** Pour quels $z \in \mathbb{C}$ la série $\sum \frac{z^n}{n^2}$ est-elle convergente ?
**3** Pour quels $z \in \mathbb{C}$ la série $\sum \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ est-elle convergente ?

Exercice 413

On considère une suite $(a_n)$ de nombres complexes, $z \in \mathbb{C}$ (vu comme une variable), et la série $\sum a_n z^n$.

**1** Montrer l'existence (et l'unicité) de $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que, si $|z| < R$, alors $\sum a_n z^n$ converge absolument, et si $|z| > R$, alors $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.
$R$ est appelé *rayon de convergence* de la série entière $\sum a_n z^n$. Il faut bien comprendre que si $|z| = R$, nous sommes dans un cas douteux.

**2** Calculer les rayons de convergence de $\sum z^n$, $\sum n z^n$, $\sum \frac{z^n}{n}$, $\sum \frac{z^n}{n!}$ et $\sum n! z^n$.

CHAPITRE 44

# Séries numériques (corrigés)

Aller aux énoncés 43

## 1. Calculs de sommes

Corrigé 400 (Lorsque le terme général est une fonction rationnelle)

Corrigé 401 (Autres calculs de sommes)

## 2. Séries à termes positifs

Corrigé 402 (Nature de séries à termes positifs)

Corrigé 403 (Séries de Bertrand)

Corrigé 404 (Opérateurs sur les séries convergentes à termes positifs)

Corrigé 405 (Lois de composition interne sur les séries convergents à termes positifs)

Corrigé 406 (Cas douteux de la règle de d'Alembert)

Corrigé 407 (Une idée reçue sur les séries)

## 3. Séries à termes quelconques

Corrigé 408 (Nature de séries à termes quelconques)

Corrigé 409 (Une autre idée reçue sur les séries (X MP))

## 4. Applications aux développements asymptotiques

Corrigé 410 (Application des séries aux suites récurrentes)

Corrigé 411 (Autres développements asymptotiques)

Corrigé 412 (Vers les séries entières)

Corrigé 413 (Rayon de convergence d'une série entière)

CHAPITRE 45

# Variables aléatoires (énoncés)

Aller aux corrigés 46

## 1. Loi d'une variable aléatoire

### Exercice 414

Déterminer la loi de la variable aléatoire $X$, dans les situations suivantes.

**1** On range au hasard 10 objets dans 3 tiroirs. $X$ est le nombre d'objets dans le premier tiroir.

**2** Un fermier a cinq poules, quatre lapins et trois moutons : $X$ est le nombre de pattes de l'animal choisi (au hasard) pour le déjeuner.

**3** Un dé cubique équilibré porte un nombre sur chacune de ses faces : $-2$ sur 3 faces, 1 sur 2 faces, et 4 sur une face. On lance le dé deux fois de suite. $X$ est la somme des points obtenus.

**4** Lors d'un vide-grenier, quinze ordinateurs sont mis en vente, dont six sont en panne. Une personne en achète trois au hasard. $X$ est le nombre d'ordinateurs en état de marche achetés par cette personne.

**5** Une cible circulaire est composée de 3 zones qui rapportent respectivement $1, 2$ ou 3 points. Elles sont touchées respectivement avec les probabilités $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{6}$. Un joueur tire deux fois dans la cible, et l'on suppose que ses deux tirs sont indépendants. $X$ est la somme des points obtenus.

### Exercice 415

Dans chacune des situations ci-dessous reconnaître la loi de $X$ parmi les lois usuelles et préciser son ou ses paramètres.

**1** On lance un dé équilibré. On note $X$ le nombre obtenu.

**2** On lance un dé équilibré 10 fois de suite. On note $X$ le nombre de 6 obtenus.

**3** On dispose d'une urne contenant 6 boules blanches et 7 boules noires. On en pioche successivement 3 sans remise. On note $X$ le nombre de boules blanches obtenues.

**4** On dispose d'une urne contenant 6 boules blanches et 7 boules noires. On effectue des tirages successifs avec remise jusqu'à ce qu'on obtienne une boule blanche. On note $X$ le nombre de tirages nécessaire.

**5** On dispose d'une urne contenant 6 boules blanches et 7 boules noires. On effectue 9 tirages successifs avec remise. On note $X$ le nombre de boules blanches obtenues.

Exercice 416

On dispose de deux urnes $U$ et $V$. L'urne $U$ contient 3 boules noires et 2 boules blanches et l'urne $V$ contient 4 boules noires et 1 boule blanche.

**1** On choisit une urne au hasard et on extrait successivement 3 boules, avec remise à chaque fois de la boule tirée. On note $X$ la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées. Déterminer $P(X = 0)$.

**2** On choisit une urne au hasard et on extrait successivement 3 boules, sans remise de la boule tirée. On note $Y$ la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées. Déterminer $P(Y = 3)$.

## 2. Couples de variables aléatoires

Exercice 417

**1** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Déterminer la loi de $X - Y$.

**2** Soit $n$ et $m$ deux entiers naturels non nuls, et $p \in ]0, 1[$. Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{B}(m, p)$.

**a** Déterminer la loi conjointe de $X$ et $Y$.

**b** Déterminer la loi de $X + Y$.

**3** La loi d'un couple de variables aléatoires $(X, Y)$ est donnée par le tableau suivant que l'on complètera :

| $X \backslash Y$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0,4 | 0 |
| 2 | 0,1 | 0,2 | 0,1 |
| 3 | 0 | 0 | $\ldots$ |

**a** Déterminer les lois marginales de $(X, Y)$.

**b** Les variables $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?

**c** Calculer $E(X)$ et $E(Y)$. Soit $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$.

**d** Écrire la table de la loi conjointe de $U$ et $V$, puis en déduire les lois de $U$ et de $V$.

**e** Déterminer directement la loi de $V$.

**4** Soit, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $p_{i,j} = \lambda ij$.

**a** Déterminer $\lambda$ pour que ceci définisse une loi conjointe.

Pour cette valeur de $\lambda$, soit $(X, Y)$ un couple de variables aléatoires réelles admettant cette loi conjointe.

**b** Déterminer les lois marginales de $(X, Y)$.

**c** $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?

**d** Donner la valeur de $\mathrm{Cov}(X, Y)$, et en déduire la valeur de $E(XY)$.

Exercice 418

Soit $p \in ]0,1[$. On considère deux variables aléatoires $X$ et $Y$ dont la loi conjointe est donnée par le tableau suivant que l'on complétera :

| $X \backslash Y$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | $\frac{2}{3} - p$ | $p - \frac{1}{6}$ |
| 1 | $p$ | |

**1** Montrer que $\frac{1}{6} \leqslant p \leqslant \frac{1}{2}$.

**2** Déterminer les lois marginales du couple, puis déterminer l'espérance et la variance de $X$ et $Y$.

**3** Pour quelle valeur de $p$ les variables $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 419

**1** On considère une urne contenant $N$ jetons numérotés de 1 à $N$. On tire simultanément $n$ jetons de l'urne et on note $X$ le plus petit des numéros obtenus et $Y$ le plus grand. Donner la loi marginale du couple.

**2** On lance deux dés équilibrés, on note $U_1$ et $U_2$ les variables aléatoires correspondant aux résultats obtenus. On appelle $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$.

- **a** Donner loi et espérance de $X$.
- **b** Exprimer $X + Y$ en fonction de $U_1$ et $U_2$. En déduire $E(Y)$.
- **c** Exprimer $XY$ en fonction de $U_1$ et $U_2$. En déduire $\text{Cov}(X, Y)$.

### 3. Espérance, variance, moments

Exercice 420

On vous propose de jouer, autant de fois que vous le voulez, à un jeu. Selon la situation, acceptez-vous de jouer ?

**1** Vous lancez un dé : si vous obtenez 6, vous gagnez 6 euros, et perdez 1 euro sinon.

**2** Vous lancez deux dés, et vous gagnez 5 euros si vous sortez 7, et perdez 1 euro sinon.

**3** Vous lancez deux dés : si vous obtenez un double $i$, vous gagnez $i$ euros. Sinon, vous perdez 1 euro.

Exercice 421

Un professeur a la réputation d'avoir un écart-type supérieur à sa moyenne. Cela est-il possible ? (le professeur ne donne pas de notes strictement négatives)

Exercice 422

Soit $\sigma_X$ l'écart type d'une variable aléatoire $X$, et l'écart moyen $\sigma = E(|X - E(X)|)$. Comparer $\sigma$ et $\sigma_X$ et traiter le cas d'égalité.

## Exercice 423

**1** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Soit $X$ une v.a. à valeurs dans $\{0, 1, ..., n\}$ telle que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad P(X = k) = \binom{n}{k} \frac{\beta}{k+1}.$$

Déterminer $\beta$, $E(X)$, et $V(X)$.

**2** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in ]0, 1[$ et $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. On définit la v.a. $Y$ de la façon suivante :
– Si $X = k$ avec $k > 0$, alors $Y = k$.
– Si $X = 0$, alors $Y$ prend une valeur quelconque avec équiprobabilité dans $\{1, ..., n\}$.
Déterminer la loi et l'espérance de $Y$.

**3** On tire $n$ boules dans une urne de $N$ boules, numérotées de 1 à $N$. $X$ est le plus grand des numéros obtenus. Déterminer la loi et l'espérance de $X$.

## Exercice 424

Les vaches laitières sont atteintes par une maladie $M$ avec le probabilité $p = 0.15$. Pour dépister la maladie $M$ dans une étable de $n$ vaches, on fait procéder à une analyse de lait. Deux méthodes sont possibles :
– **Première méthode** On fait une analyse sur un échantillon de lait de chaque vache.
– **Seconde méthode** On effectue d'abord une analyse sur un échantillon de lait provenant du mélange des $n$ vaches. Si le résultat est positif, on fait une nouvelle analyse, cette fois pour chaque vache.

On voudrait connaître la méthode la plus économique (*i.e.* celle qui nécessite en moyenne le moins d'analyses). Pour cela, on note $X_n$ la variable aléatoire du nombre d'analyses réalisées dans la deuxième méthode. On pose $Y_n = \frac{X_n}{n}$.

**1** Déterminer la loi et l'espérance de $Y_n$.

**2** En déduire la réponse à la question posée (dépendant de $n$).

## Exercice 425

**1** Soit $N \in \mathbb{N}$ et $X$ une variable aléatoire de support inclus dans $[\![0, N]\!]$.
Montrer que : $E(X) = \sum_{k=0}^{N} P(X > k)$.

**2** On considère une urne de $N$ boules numérotées de 1 à $N$. On effectue un tirage simultané de $n$ boules, et on note $X$ le plus grand numéro obtenu. Déterminer $E(X)$.

## Exercice 426

**1** Soit $X$ une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n, p)$. Calculer l'espérance de $Y = \frac{1}{X+1}$.

**2** Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$, telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$P(X = k) = a\binom{n}{k}$$

Calculer espérance et variance de $X$.

Exercice 427

Soit $X$ une variable aléatoire réelle.

**1** Soit $g\ : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, strictement croissante, et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer

$$P(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{E(g(|X|))}{g(a)}$$

**2** On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p,n)$. Montrer, pour tous $\varepsilon, \lambda > 0$ :

**a** $P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\varepsilon\sqrt{n}}$.

**b** $P(X - np > n\varepsilon) \leqslant E(\exp(\lambda(X - np - n\varepsilon)))$.

## 4. V.a.i.i.d.

Exercice 428

Dans la suite du problème $n$ désigne un entier supérieur ou égal à 2. On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant $n$ boules numérotées de 1 à $n$ et indiscernables au toucher.
On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathcal{U}$.
Soit $k$ un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note $X_i$ la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro $i$ au cours des $k$ premiers tirages.

**1** Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Donner la loi de $X_i$. Rappeler l'espérance et la variance de $X_i$.

**2** Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

**a** Montrer que $X_i$ et $X_j$ ne sont pas indépendantes.

**b** Déterminer la loi de la variable aléatoire $X_i + X_j$.

Exercice 429

Soit $p \in ]0,1[$ et $q = 1 - p$. Soit $n$ un entier naturel.
On considère $n$ joueurs qui visent une cible. Chaque joueur effectue deux tirs. À chaque tir, chaque joueur a la probabilité $p$ d'atteindre la cible. Les tirs sont indépendants les uns des autres.
On définit la variable aléatoire $X$ égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au premier tir et la variable aléatoire $Z$ égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au moins une fois à l'issue des deux tirs.

**1** Déterminer la loi de $X$. Rappeler son espérance et sa variance.

**2** Montrer que $Z$ suit une loi binomiale, et donner ses paramètres. Donner son espérance et sa variance.
On note $Y = Z - X$.

**3** Que représente la variable aléatoire $Y$ ? Déterminer sa loi.

**4** Les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 430

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.i.i.d. de Bernoulli de paramètre $p$. On pose $Y_n = X_nX_{n+1}$.

**1** Déterminer la loi de $Y_n$.

**2** Discuter, selon les valeurs de $i$ et $j$, l'indépendance de $Y_i$ et $Y_j$.

**3** Pour tout $n \geqslant 2$, donner la matrice des variances-covariances du vecteur $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$.

**4** En déduire la variance de $\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

**5** Reprendre ces questions, en supposant que les $(X_n)$ soient mutuellement indépendantes, et que $X_n$ suive $\mathcal{B}(p^n)$ pour tout $n$.

CHAPITRE 46

# Variables aléatoires (corrigés)

Aller aux énoncés 45

## 1. Loi d'une variable aléatoire

Corrigé 414 (Détermination de lois)

Corrigé 415 (Nul n'est censé ignorer la loi)

Corrigé 416 (Variables aléatoires et urnes)

## 2. Couples de variables aléatoires

Corrigé 417 (Loi d'un couple)

Corrigé 418 (Indépendance dans un couple)

Corrigé 419 (Minimum, maximum)

## 3. Espérance, variance, moments

Corrigé 420 (Voulez-vous jouer ?)

Corrigé 421 (Un professeur sévère)

Corrigé 422 (Comparatif de deux indicateurs de dispersion)

Corrigé 423 (Calculs d'espérance et de variance)

Corrigé 424 (Vaches laitières)

Corrigé 425 (Une formule pour $E(X)$ dans un cas particulier)

Corrigé 426 (Calculs d'espérance et variance)

Corrigé 427 (De jolies inégalités)

## 4. V.a.i.i.d.

Corrigé 428 (Tirages dans une urne)

Corrigé 429 (Cible)

Corrigé 430 (Produit consécutif de Bernoulli)

CHAPITRE 47

# Espaces euclidiens (énoncés)

Aller aux corrigés 48

On se placera parfois implicitement dans $\mathbb{R}^p$ euclidien canonique (pour un certain entier naturel non nul $p$). Sauf mention contraire, $E$ désigne un espace euclidien.

On vérifiera que les applications qualifiées de produits scalaires en sont vraiment.

## 1. Produits scalaires

### Exercice 431

**1** Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}^1([0,1])$ en posant :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{C}^1([0,1])^2, < f,g >= f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\mathrm{d}t.$$

**2** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'application $(P,Q) \mapsto \sum_{k=0}^n P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

### Exercice 432

Soit $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. Montrer que :

**1** $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

**2** $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

### Exercice 433

**1** Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ pour le produit scalaire donné par

$$(P|Q) = \int_0^2 P(t)Q(t)\mathrm{d}t.$$

**2** Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$ muni du produit scalaire :

$$(P|Q) = \sum_{i=0}^4 P(i)Q(i)$$

Chercher une base orthonormée de $E$.

Exercice 434

Pour tous éléments $A$, $B$ de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $(A \mid B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$.
**1** Vérifier que c'est un produit scalaire. Pourquoi l'appelle-t-on produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ?
**Remarque :** la même formule définit plus généralement un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, dit *canonique*.
**2** Déterminer l'orthogonal de l'espace des matrices scalaires, des matrices symétriques.
**3** Soit $P \in O(n)$. Montrer que les applications

$$\phi_P : A \longmapsto AP \text{ et } \psi_P : A \longmapsto P^{-1}AP$$

sont orthogonales.
**4** Réciproquement, si $\phi_P$ ou $\psi_P \in O(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, est-ce que $P \in O(n)$ ? (réponses différentes pour $\phi$ et $\psi$).

Exercice 435

Soit $[-a, a]$ un segment centré en 0, et $\mathcal{C}([-a, a])$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $[-a, a]$, à valeurs réelles. On munit $\mathcal{C}([-a, a])$ du produit scalaire classique $(f, g) \mapsto \int_{[-a,a]} fg$. Soit $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{I}$) l'ensemble des fonctions paires (resp. impaires) de $\mathcal{C}([-a, a])$.
**1** Montrer que $\mathcal{I}$ et $\mathcal{P}$ sont orthogonaux et supplémentaires dans $\mathcal{C}([-a, a])$.
**2** Expression de la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$.

Exercice 436

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1])$ muni du produit scalaire : $(f|g) = \int_{t=0}^{1} f(t)g(t)\mathrm{d}t$, et $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$.
Montrer que $F^{\perp} = \{0\}$. En déduire que $E$ est de dimension infinie.

Exercice 437

**1** *(X PC 09)*On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire : Pour $P = \sum_i a_i X^i$ et $Q = \sum_i b_i X^i$, $(P|Q) = \sum_i a_i b_i$.
Soit $H = \{P \in E, P(1) = 0\}$.

**a** Trouver une base orthonormale de $H$.

**b** Calculer $d(X, H)$.

**2** Soit $\alpha = \inf\{\int_{-1}^{1} (ax^2 + bx + c - |x|)^2 \, dx : a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

**a** Déterminer un espace vectoriel euclidien $(E, (\cdot, \cdot))$, un sous-espace vectoriel $F$ de $E$ et $v \in E$ tel que $\alpha = d(v, F)^2$.

**b** Déterminer $p \in F$ tel que $\alpha = \mathrm{d}(v, p)^2$ et calculer $\alpha$.

**Réponse :** $\alpha = \frac{1}{96}$.

**3** *(Mines MP 09)* Déterminer $\min\left\{\int_{-1}^{1}(t^4 - at^2 - bt - c)^2 \mathrm{d}t, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\right\}$.

**Réponse :** $\frac{128}{11025}$.

**4** *(Mines MP 09)* Soit $f\ : t \in ]0, 1] \mapsto t\ln(t)$, prolongée par continuité en 0. Calculer $\min\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (f(t) - at - b)^2 \mathrm{d}t$ et déterminer les couples $(a, b)$ qui réalisent ce minimum.

**Réponse :** le minimum cherché vaut $\frac{1}{108}$.

Exercice 438

Soit $\lambda < 1$ et $A$ une partie de la sphère unité de $E$ telle que pour tout couple $(a, a')$ d'éléments distincts de $A$, on ait : $< a, a' > \leqslant \lambda$. Montrer que $A$ est finie.

## 2. Endomorphismes d'espaces euclidiens

Exercice 439

Soit $f$ un endomorphisme de $E$ tel que : $\forall (x, y) \in E^2, < x, y >= 0 \Rightarrow < f(x), f(y) >= 0$. Montrer que $f$ est composée d'une homothétie et d'une isométrie vectorielle.

Exercice 440

Soit $p$ un projecteur orthogonal de $E$.

**1** Montrer que $\|p(x)\|^2 =< p(x), x >$ pour tout $x \in E$.

**2** Montrer que, pour toute base orthonormée $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $E$, $\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2 = \mathrm{rg}(p)$.

Exercice 441

**1** Soit $F, G$ deux sous-espaces de $E$ tels que $F \perp G$. On note $s_F$ et $s_G$ les symétries orthogonales respectives par rapport à $F$ et $G$. Montrer que $s_F \circ s_G = s_G \circ s_F = s_{(F \oplus G)^\perp}$.

**2** Soit $F, G$ deux sous-espaces de $E$ tels que $F \subset G$. On note $s_F$ et $s_G$ les symétries orthogonales respectives par rapport à $F$ et $G$. Montrer que $s_F \circ s_G = s_G \circ s_F = s_{F \oplus G^\perp}$.

Exercice 442

Soit $f \in O(E)$. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :
**1** $f \circ f = -\mathrm{Id}_E$.
**2** $\forall x \in E, (f(x)|x) = 0$.
**3** $\forall x, y \in E, (f(x)|y) = -(x|f(y))$.

Exercice 443

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :
**1** $p$ est un projecteur orthogonal.
**2** $\forall x, y \in E, (x|p(y)) = (p(x)|y)$.
**3** $\forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Exercice 444

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)$. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall (x,y) \in E^2, < u(x), y >=< x, v(y) >$. Montrer que $u+v$ est inversible.

### 3. Matrices orthogonales

Exercice 445

Soit $n \in \mathbb{N}$ impair et $\Phi\ : \mathbb{R} \to \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ une fonction dérivable. Montrer que pour tout réel $t$, $\Phi'(t) \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 446

Quelles sont les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ égales à leur comatrice ?

### 4. Espaces euclidiens de petite dimension

Exercice 447

$\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien. Vérifier que les vecteurs $e_1 = (1,0,1)$, $e_2 = (1,0,2)$ et $e_3 = (1,1,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer l'orthonormalisée $(f_1, f_2, f_3)$ de Gram-Schmidt.

Exercice 448

Donner la matrice canoniquement associée à la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathcal{D}$ donnée par le système :

$$\begin{cases} x-y+z &= 0 \\ x+y+2z &= 0 \end{cases}$$

Exercice 449

Donner l'expression analytique de

**1** La projection orthogonale par rapport au plan d'équation $x+2y+z=0$.

**2** La réflexion par rapport au plan d'équation $2x+2y+z=0$.

CHAPITRE 48

# Espaces euclidiens (corrigés)

Aller aux énoncés 47

On se placera parfois implicitement dans $\mathbb{R}^p$ euclidien canonique (pour un certain entier naturel non nul $p$). Sauf mention contraire, $E$ désigne un espace euclidien.

On vérifiera que les applications qualifiées de produits scalaires en sont vraiment.

## 1. Produits scalaires

Corrigé 431 (Exemples de produits scalaires)

Corrigé 432 (Relations entre orthogonaux)

Corrigé 433 (Recherche de base orthonormée)

Corrigé 434 (Produit scalaire canonique matriciel)

Corrigé 435 (Encore les fonctions paires et impaires)

Corrigé 436 (Étude d'orthogonal en dimension infinie)

Corrigé 437 (Calculs de distances)

Corrigé 438 (Vecteurs de la sphère unité et produit scalaire contraint *(X MP 09)*)

## 2. Endomorphismes d'espaces euclidiens

Corrigé 439 (Endomorphisme conservant l'orthogonalité *(TPE MP 08, Mines MP 09)*)

Corrigé 440 (Expression du rang d'un projecteur orthogonal *(CCP PSI 08)*)

Corrigé 441 (Composées de symétries orthogonales)

Corrigé 442 (Équivalences de propriétés d'un automorphisme orthogonal)

Corrigé 443 (Caractérisations d'un projecteur orthogonal)

Corrigé 444 (Une somme inversible d'endomorphismes *(X PC 09)*)

## 3. Matrices orthogonales

Corrigé 445 (Fonction à valeurs dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ *(X MP 08)*)

Corrigé 446 (Matrice égale à sa comatrice)

## 4. Espaces euclidiens de petite dimension

Corrigé 447 (Orthonormalisée de Gram-Schmidt)

Corrigé 448 (Matrice d'une symétrie orthogonale)

Corrigé 449 (Expressions analytiques d'endomorphismes de l'espace)