ÉPREUVE COMMUNE DE TIPE 2009 - Partie D

TITRE :

Comment Gauss retrouva Cérès

Temps de préparation : ……………..……2 h 15 minutes
Temps de présentation devant le jury : …….10 minutes
Entretien avec le jury : ……………………..10 minutes

GUIDE POUR LE CANDIDAT :

Le dossier ci-joint comporte au total : 14 pages

Document principal (13 pages, dont celle-ci)
Annexe : 1 page

Travail **suggéré** au candidat :

Après avoir présenté les systèmes de coordonnées, la signification des éléments d'une orbite, l'information contenue dans une observation et les méthodes de calculs d'éléments, le candidat pourra conclure son exposé en résumant par un schéma l'enchainement des idées qui permettent à Gauss de prévoir la position de Cérès. Le candidat trouvera en annexe quelques définitions renvoyées dans le texte par un astérisque.

Attention : *si le candidat préfère effectuer un autre travail sur le dossier, il lui est* ***expressément recommandé*** *d'en informer le jury avant de commencer l'exposé.*

CONSEILS GENERAUX POUR LA PREPARATION DE L'EPREUVE :

* Lisez le dossier en entier dans un temps raisonnable.
* Réservez du temps pour préparer l'exposé devant le jury.

- Vous pouvez écrire sur le présent dossier, le surligner, le découper … mais tout sera à remettre au jury en fin d'oral.
- En fin de préparation, rassemblez et ordonnez soigneusement TOUS les documents (transparents, *etc.*) dont vous comptez vous servir pendant l'oral, ainsi que le dossier, les transparents et les brouillons utilisés pendant la préparation. En entrant dans la salle d'oral, vous devez être prêts à débuter votre exposé.
- A la fin de l'oral, vous devez remettre au jury le présent dossier, les transparents et les brouillons utilisés pour cette partie de l'oral, ainsi que TOUS les transparents et autres documents présentés pendant votre prestation.

Comment Gauss retrouva Cérès

Plusieurs astronomes avaient remarqué au XVIII siècle que la dimension des orbites des planètes connues suivait à peu près une progression régulière. En effet elles ont une orbite elliptique dont le demi grand axe exprimé en **unité astronomique***, évolue suivant le rang n de la planète, d'après la loi empirique de Titius-Bode, à peu près comme la suite

$$a_0 = 0,4$$

$$a_n = 0,4 + 0,3 \,.\, 2^{n-1} \,.$$

La découverte d'Uranus en 1781 conforta cette relation. Cependant cette progression impose de sauter un terme entre Mars et Jupiter:

valeur de n	planète	a_n	Demi grand axe réel
0	Mercure	0,4	0,39
1	Vénus	0,7	0,72
2	Terre	1	1
3	Mars	1,6	1,52
4		2,8	
5	Jupiter	5,2	5,20
6	Saturne	10	9,54
7	Uranus	19,6	19,2

On chercha donc intensivement une nouvelle planète située entre Mars et Jupiter correspondant au terme manquant. Les planètes connues ayant toutes des orbites de faible inclinaison, donc à peu près toutes dans le même plan, on explora particulièrement la bande du ciel voisine de **l'écliptique*** à la recherche d'un astre se déplaçant par rapport aux étoiles. Cette démarche aboutit le 1er janvier 1801 par la découverte de Cérès par Giuseppe Piazzi. Plus tard on se rendra compte que Cérès n'était que la plus massive d'une multitude de petites planètes, les astéroïdes, occupant des orbites voisines entre Mars et Jupiter.

Piazzi put observer et déterminer la position de Cérès 24 fois pendant 40 jours ceci jusqu'au 11 février avant que son mouvement apparent ne la rapproche trop du Soleil. Elle devint alors invisible car noyée dans la clarté du jour. On chercha à déterminer les paramètres de son orbite à partir de ces informations afin de la retrouver quand elle serait à nouveau visible à la tombée du jour en Automne 1801.

La méthode géométrique suivie par Kepler lors de la détermination de la troisième loi ne pouvait s'appliquer puisqu'elle nécessite l'observation d'au moins une orbite complète.

Olbers proposa une orbite calculée en faisant l'hypothèse d'une orbite circulaire. Malheureusement l'excentricité ne pouvait pas être considérée comme nulle car on ne retrouva pas Cérès à la position prévue.

Laplace, célèbre auteur du *Traité de mécanique céleste* avait développé une méthode analytique pour obtenir les éléments d'une orbite mais elle était très sensible aux erreurs et donc ne permettait pas d'obtenir des prévisions à long terme. Elle était donc inapplicable ici et Laplace considéra le problème comme insoluble.

Carl Friedrich Gauss, âgé de 24 ans, s'attaqua à la détermination de l'orbite de Cérès en octobre 1801. Il proposa une méthode utilisant des outils élémentaires. Il commença par déterminer à partir de considérations géométriques sur le mouvement képlérien une orbite approchée utilisant seulement 3 observations. Puis il améliora cette orbite en tenant compte de l'ensemble des observations en utilisant la méthode des moindre carrés, méthode qu'il inventa en même temps que Legendre mais qu'il ne publiera qu'en 1809.

A partir de l'orbite définitive qu'il avait calculée il prédit une **éphéméride*** de Cérès. Le 31 décembre 1801 on retrouva Cérès près de la position prévue.

Gauss qui avait déjà résolu le problème de la constructibilité à la règle et au compas des côtés des polygones réguliers inscrits dans un cercle donné devint dès lors célèbre. Sa méthode de détermination des orbites se prête bien à l'utilisation de l'ordinateur et est toujours utilisée.

Le demi grand axe de Cérès est de 2,77 ua. On découvrit bientôt Pallas et Junon puis une multitude d'autres petites planètes dans des orbites voisines. On baptisa ces petits corps astéroïdes.

I Mouvement képlerien d'une planète et obtention d'une éphéméride.

Nous ferons l'hypothèse d'un mouvement respectant les trois lois de Kepler (rappelons que, à l'origine issues de l'observation, elles peuvent se déduire de l'étude du problème des 2 corps dans le cadre de la mécanique newtonienne).

L'orbite est dans un plan et est une ellipse dont le Soleil *0* occupe un des foyers (première loi).

Considérons tout d'abord un système de coordonnées dit **héliocentrique**, centré sur le Soleil et donné par 3 axes $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ orthogonaux pointant dans des directions fixes. On choisira $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans le plan de l'écliptique c'est-à-dire dans le plan de l'orbite de la Terre.

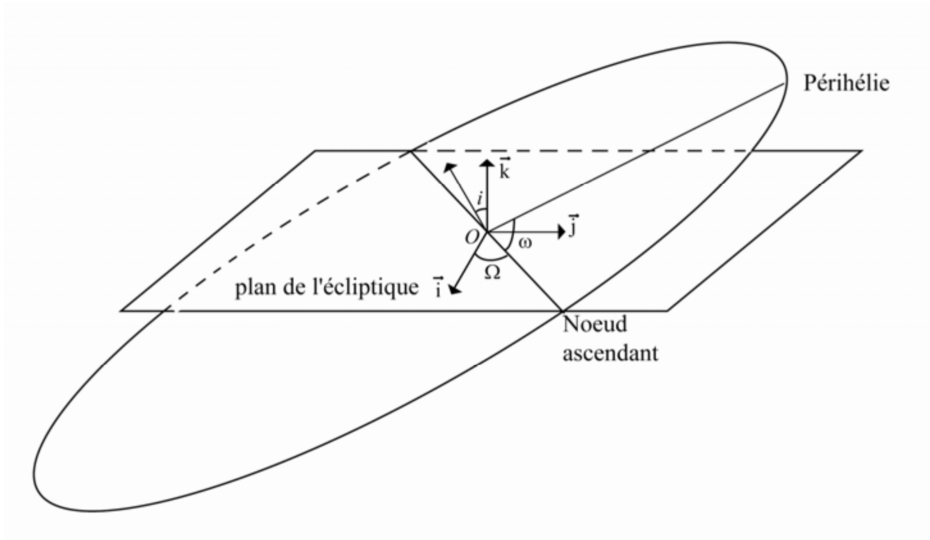


Figure 1

Pour caractériser le plan de l'orbite de la planète nous avons besoins de 2 paramètres: l'**inclinaison** i qui est l'angle entre la normale à ce plan et l'axe $\vec{k}$, et un angle supplémentaire Ω. On considère pour cela la ligne des nœuds, la droite intersection du plan avec l'écliptique. Cette droite intersecte l'orbite en 2 points. On appellera nœud ascendant N celui qui correspond à des coordonnées croissantes suivant l'axe $\vec{k}$. La **longitude du nœud ascendant** est l'angle Ω entre l'axe $\vec{i}$ et $\overrightarrow{ON}$.

Le plan de l'orbite étant défini il reste à caractériser l'ellipse. Pour cela on utilise l'**excentricité** e, le **demi grand axe** a et l'orientation de l'axe donnée par l'**argument du périhélie*** ω, angle entre la ligne des nœuds et l'axe de l'ellipse.

En fait si on considère une orbite de faible inclinaison la ligne des nœud est mal déterminée, et dans le cas d'une orbite à forte excentricité l'incertitude sur l'orbite deviendrait forte, c'est pourquoi au lieu de considérer l'angle ω on utilise parfois la somme $\varpi = \omega + \Omega$ (on remarquera cependant que ces angles ne sont pas dans le même plan).

Finalement la détermination de la position de la planète sur son orbite demande de connaître un couple (position, temps) pour cela on utilise **le temps de passage au périhélie** τ_p c'est-à-dire la valeur du temps t lors d'un passage au point le plus proche du Soleil de l'orbite.

Les 6 constantes $(a, e, i, \Omega, \omega, \tau_p)$ sont dites **éléments** de l'orbite. En fait comme on ne peut pas complètement négliger les planètes les plus massives du système solaire le problème n'est pas exactement un problème de deux corps et sur de longues périodes de temps les éléments varient lentement. Mais, comme Gauss, nous négligerons ces perturbations.

A partir de ces éléments on peut calculer une **éphéméride*** c'est-à-dire la position de la planète pour un temps *t* choisi.

En effet plaçons-nous dans le plan de l'orbite. Considérons le repère polaire centré sur le Soleil O défini par l'axe $\overrightarrow{OP}$, où P est le périhélie et soit C la position de la planète (figure 2).

En coordonnées polaire (r,θ) l'équation de l'ellipse est $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$. L'angle θ s'appelle l'**anomalie vraie**.

Considérons le cercle dit principal, centré sur le centre de l'ellipse et de rayon a. Soit C' le point de ce cercle sur la perpendiculaire à l'axe de l'ellipse passant par C

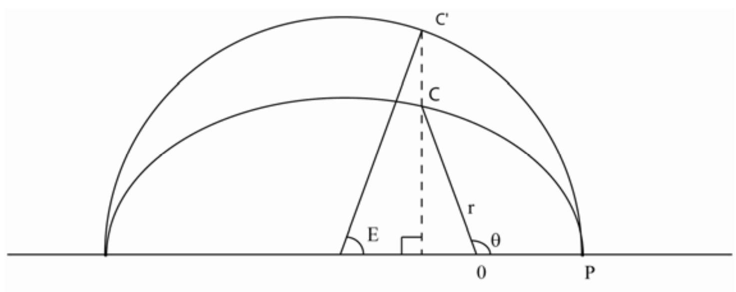


Figure 2

L'angle E (figure 2) est connu sous le nom d'**anomalie excentrique** et est relié à l'anomalie vraie par la relation:

$$\tan\tfrac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2}.$$

Le mouvement sur la trajectoire est donné par la seconde loi de Kepler (loi des aires): $r^2.\frac{d\theta}{dt} = C$ où la constante C est dite constante des aires. L'aire d'une ellipse de demi grand axe a et demi petit axe b étant $S = \pi ab$ on a ici, si P désigne la période de révolution,

$$P = 2\frac{\pi ab}{C} = 2\frac{\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{C}.$$

En explicitant la constante C on pourrait obtenir la troisième loi de Kepler qui affirme que le rapport $\frac{a^3}{P^2}$ est identique pour toutes les planètes. Connaissant ce demi grand axe et la période de révolution de la Terre on en déduit la période de révolution pour la planète.

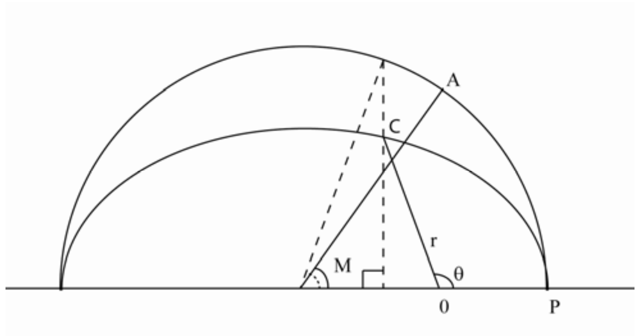


Figure 3

Soit A un point se déplaçant sur le cercle principal d'un mouvement circulaire uniforme de période P, A étant au périhélie en τ_p. L'angle M (figure 3) s'appelle **anomalie moyenne** et vérifie donc

$$M = \frac{2\pi}{P}(t - \tau_p) .$$

L'anomalie moyenne et l'anomalie excentrique sont reliées par l'équation dite de Kepler :

$$M = E - e \sin E .$$

Connaissant le temps t on peut déterminer l'anomalie moyenne puis, en résolvant par des méthodes numériques l'équation de Kepler, l'anomalie excentrique et donc l'anomalie vraie.

Connaissant l'anomalie vraie θ, on peut exprimer la position de la planète dans un repère du plan de l'orbite et donc par un simple changement de coordonnées on en déduit sa position dans le repère héliocentrique O, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ de départ. Connaissant cette position, celle du centre de la Terre et la position de l'observateur sur la Terre on en déduit la position de la planète par rapport à un repère associé à l'observateur puisque les mouvements de la Terre sont par ailleurs bien connus.

II Les données.

Le problème qui se pose est donc de calculer les éléments de Cérès à partir d'observations ne représentant qu'une petite partie de l'orbite, ceci avec suffisamment de précision pour pouvoir déterminer sa position 6 mois plus tard. Quelles sont les informations que fournit une observation? La position de la planète par rapport aux étoiles au moment de l'observation. On appellera **temps de l'observation** la valeur de la variable t, le temps, à l'instant de l'observation.

Les coordonnées les plus naturelles d'un point du ciel pour l'observateur sont les **coordonnées azimutales*** : La hauteur au dessus de l'horizon h et l'Azimut A (angle que fait la projection dans le plan horizontal de la direction avec l'axe Nord Sud) .

Les étoiles étant à une très grande distance on peut admettre avec beaucoup de précision que leurs positions ne varient pas (ni mouvement propre ni mouvement apparent lié aux déplacements de la Terre). On peut donc les considérer comme fixées sur une sphère, appelée la sphère céleste, centrée sur l'observateur et de rayon arbitrairement grand. Les objets plus proches comme la lune, le Soleil et les planètes sont observés en projection sur cette sphère. D'autre part à cause de la rotation de la Terre cette sphère est perçue en rotation, son axe de rotation correspondant à l'axe des pôles terrestres (ce mouvement de période 23h 56m est dit **mouvement diurne**).

De la même façon qu'on peut repérer un point à la surface de la Terre par sa longitude et sa latitude tout point de la sphère céleste peut être représenté par ses **coordonnées équatoriales*** : son **ascension droite** α et sa **déclinaison** δ.

Les mouvements de la Terre étant bien connus il est facile, connaissant l'instant de l'observation et la position de l'observateur sur la Terre, de déterminer les coordonnées équatoriales d'un objet qu'on observe dans une direction exprimées en coordonnées azimutales.

D'autre part on **réduira** ces observations, c'est-à-dire qu'on les corrigera de divers effets les modifiant légèrement comme la réfraction de la lumière dans l'atmosphère, l'aberration due au mouvement de l'observateur, l'aberration due à la vitesse de la lumière, et on les exprimera pour un observateur situé au centre de la Terre.

Dans l'absolue ces corrections nécessitent de connaître la distance de l'objet dont on cherche à réduire les coordonnées. Gauss dans un premier temps fera sa réduction en supposant que Cérès est à la distance qu'elle aurait si elle suivait l'orbite circulaire déterminée par Olbers. Après avoir mené à bien son calcul complet d'orbite il vérifiera qu'en introduisant la distance calculée à partir de ses résultats les modifications sur la réduction sont suffisamment faibles pour avoir des effets négligeables sur l'orbite finale.

En complétant ces coordonnées équatoriales réduites par la distance ρ entre la Terre et l'objet on obtient les **coordonnées géocentriques** (α,δ,ρ) .

Il est clair que, toujours parce que les mouvements de la Terre sont connus, on peut passer pour un temps t donné des coordonnées héliocentriques aux coordonnées géocentriques par des transformations géométriques simples.

On peut donc considérer qu'une observation de Cérès au temps t_i nous fournit deux données indépendantes α_i, et δ_i. La distance ρ_i n'étant pas directement observable. Puisque nous avons six paramètres $(a,e,i,\Omega,\omega,\tau_p)$ à déterminer trois observations peuvent a priori suffire. Or nous en avons 24. Cependant ces observations ne sont connues qu'avec une certaine précision. La première idée novatrice de Gauss consiste à choisir 3 observations. Il va chercher une orbite (dite orbite initiale) qui les représente exactement. Puis il va itérer un algorithme d'amélioration de l'orbite initiale pour représenter au mieux l'ensemble des observations.

III Amélioration de l'orbite initiale.

Nous reviendrons plus tard sur la manière dont Gauss a déterminé une orbite initiale suffisamment précise pour permettre la convergence de l'algorithme d'amélioration. Présentons au préalable cet algorithme.

L'orbite initiale nous fournit un premier ensemble d'éléments $(a^0,e^0, i^0,\Omega^0,\omega^0, \tau_p^{\,0})$. Supposons que lors de la K ième itération de l'algorithme les paramètres calculés sont $(a^K,e^K, i^K,\Omega^K,\omega^K, \tau_p^{\,K})$.

A partir de ces éléments on peut calculer une éphéméride et donc $(\alpha^K(t)\ ,\ \delta^K(t))$ la position de Cérès en fonction du temps. Pour chacun des 24 temps d'observations t_i on peut calculer ces positions et les comparer aux coordonnées observées $(\alpha_i,\ \delta_i)$. Gauss a l'idée d'introduire comme mesure de la qualité des prévisions pour l'ensemble des mesures $\sum_{i=1}^{24}\left(\left|\alpha^{\mathrm{K}}(\mathrm{t_i}) - \alpha_{\mathrm{i}}\right|^2 + \left|\delta^{\mathrm{K}}(\mathrm{t_i}) - \delta_{\mathrm{i}}\right|^2\right)$ et va chercher à modifier les éléments de l'orbite pour minimiser la quantité $\Delta = \sum_{i=1}^{24}\left(\left|\alpha(\mathrm{t_i}) - \alpha_{\mathrm{i}}\right|^2 + \left|\delta(\mathrm{t_i}) - \delta_{\mathrm{i}}\right|^2\right)$. On peut interpréter Δ comme le carré de la distance entres coordonnées calculées à partir des éléments et coordonnées mesurées.

Etudions la dépendance de $\alpha^K(t)=\alpha\,(t,\ a^K,e^K,\ i^K,\Omega^K,\omega^K,\ \tau_p^{\,K})$ suivant une petite variation des 6 éléments au voisinage de $(a^K,e^K,\ i^K,\Omega^K,\omega^K,\ \tau_p^{\,K})$. Supposons t fixé, en linéarisant, c'est-à-dire en considérant un développement de Taylor au premier ordre, on peut remplacer $\alpha\,(\,t,\ a,e,\ i,\Omega,\omega,\ \tau_p\,)$ et $\delta\,(\,t,\ a,e,\ i,\Omega,\omega,\ \tau_p\,)$ par respectivement:

$$\alpha^K(t) + \frac{\partial\alpha^K}{\partial a}(t)(a-a^K) + \frac{\partial\alpha^K}{\partial e}(t)(e-e^K) + \frac{\partial\alpha^K}{\partial i}(t)(i-i^K) + \frac{\partial\alpha^K}{\partial\Omega}(t)(\Omega-\Omega^K) + \frac{\partial\alpha^K}{\partial\omega}(t)(\omega-\omega^K) + \frac{\partial\alpha^K}{\partial\tau_p}(t)(\tau_p-\tau_p^{\,K})$$

et

$$\delta^K(t) + \frac{\partial \delta^K}{\partial a}(t)(a - a^K) + \frac{\partial \delta^K}{\partial e}(t)(e - e^K) + \frac{\partial \delta^K}{\partial i}(t)(i - i^K) + \frac{\partial \delta^K}{\partial \Omega}(t)(\Omega - \Omega^K) + \frac{\partial \delta^K}{\partial \omega}(t)(\omega - \omega^K) + \frac{\partial \delta^K}{\partial \tau_p}(t)(\tau_p - \tau_p{}^K)$$

En remplaçant dans Δ l'expression obtenue pour le temps de chaque observation on obtient un polynôme de degré 2 sur les 6 variables $a\text{-}a^K$, $e\text{-}e^K$, $i\text{-}i^K$, $\omega\text{-}\omega^K$, $\Omega\text{-}\Omega^K$, $\tau_p\text{-}\tau_p{}^K$ dont on a tous les coefficients. On peut alors déterminer les valeurs de ces variables qui le minimisent et donc obtenir un nouvel ensemble d'éléments $(a^{K+1}, e^{K+1}, i^{K+1}, \Omega^{K+1}, \omega^{K+1}, \tau_p{}^{K+1})$ permettant d'améliorer la qualité des prévisions. Dans le cas pratique des mesures de Cérès, au bout de très peu d'itérations les éléments convergeaient vers une solution que Gauss considéra comme ceux de l'orbite définitive.

IV Obtention d'une orbite initiale à partir de deux positions héliocentriques.

Considérons les 3 vecteurs suivants:

$\overrightarrow{OC}$ vecteur entre le Soleil et Cérès

$\overrightarrow{OT}$ vecteur entre le Soleil et la Terre

$\vec{\rho}$ vecteur entre la Terre et Cérès.

Nous pouvons écrire ce dernier vecteur sous la forme $\vec{\rho} = \rho\vec{\lambda}$ où $\vec{\lambda}$ est un vecteur unitaire et ρ la distance Terre Cérès. Chaque observation nous fournit la donnée du vecteur unitaire $\vec{\lambda}$ au temps de l'observation mais pas la valeur de ρ.

Supposons cependant que nous connaissions 2 vecteurs $\overrightarrow{\rho_1}$ et $\overrightarrow{\rho_2}$ correspondants à 2 temps t_1 et t_2 différents. On en déduirait les vecteurs héliocentriques $\overrightarrow{OC_1}$ et $\overrightarrow{OC_2}$ puisque $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OT} + \vec{\rho}$. Le plan défini par ces 2 vecteurs est donc celui de l'orbite, ce qui détermine l'inclinaison i et la longitude du nœud ascendant Ω. Nous pouvons donc nous placer dans le repère polaire du plan de l'orbite centré sur le soleil défini à partir de l'axe $\overrightarrow{ON}$, où N est le nœud ascendant (figure 4). Les données de $\overrightarrow{OC_1}$ et $\overrightarrow{OC_2}$ fournissent les valeurs de r_1 et r_2 et les angles $\omega+\theta_1$ et $\omega+\theta_2$.

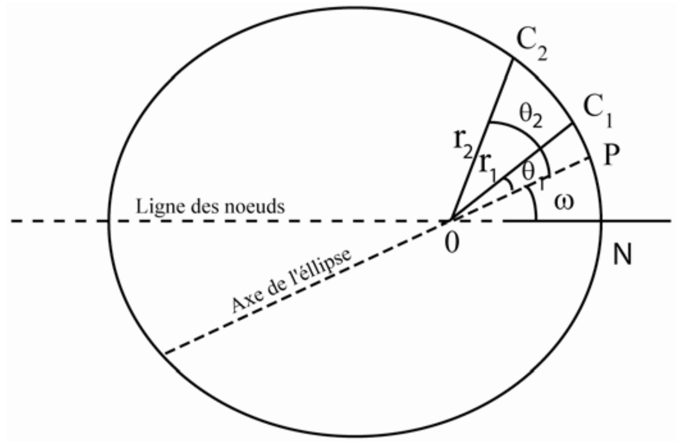


Figure 4

Considérons le demi grand axe a comme connu. Le second foyer est alors à la distance $2a\text{-}r_1$ de C_1 et $2a\text{-}r_2$ de C_2 et est donc déterminé. L'ellipse est donc complètement caractérisée et on peut déterminer successivement le second foyer, l'excentricité e, l'axe principal, ω, les anomalies vraies θ_1 et θ_2, et finalement les anomalies excentriques E_1 et E_2. L'équation de Kepler fournit alors les anomalies moyennes M_1 et M_2. On peut donc en déduire la période P puisque $P = (t_2 - t_1)\dfrac{2\pi}{M_2 - M_1}$.

On a donc obtenu une expression de P en fonction de a.

D'autre part la troisième loi de Kepler en fournit une autre puisqu'on connait le rapport $\dfrac{a^3}{P^2}$.

En écrivant l'égalité des deux expressions on obtient une équation en a qui après résolution fournit la valeur du demi grand axe et donc ω et e. Connaissant la position de la planète au temps t on peut calculer le temps nécessaire pour aller du périhélie à cette position et donc en déduire le dernier élément τ_p.

V Obtention d'une orbite initiale par la méthode de Gauss.

Considérons 3 positions successives C_1,C_2 et C_3 de Cérès aux temps t_1, t_2 et t_3.

Soient $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ les coordonnées héliocentriques de ces 3 positions.

Remarquons que le Soleil et les positions successives de Cérès sont dans un même plan ce qui se traduit par $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$.

En développant ce déterminant par rapport à la première ligne on obtient l'équation:

$$x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = 0$$

Pour i, j dans $\{1,2,3\}$ et $i \neq j$ notons ***[i,j]*** le triangle formé par les positions de Cérès C_i et C_j et par le Soleil et soit *[i,j]* son aire.

Le déterminant $\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix}$ représente le double de l'aire de la projection du triangle ***[2,3]*** sur le plan d'équation $x=0$. Donc $\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 2 \cos \varphi\ [2,3]$ *où* φ représente l'angle entre ce plan et le plan de l'orbite.

De même les deux autres déterminants sont proportionnels avec le même coefficient aux aires *[1,3]* et *[1,2]*. On peut donc réécrire l'équation sous la forme :

$$x_1[2,3] - x_2[1,3] + x_3[1,2]=0$$

De même en développant le déterminant suivant la seconde et la troisième ligne on obtient deux autres équations similaires et donc les cordonnées héliocentriques vérifient le système:

$$\begin{cases} x_1 \dfrac{[2,3]}{[1,3]} - x_2 + x_3 \dfrac{[1,2]}{[1,3]} = 0 \\ y_1 \dfrac{[2,3]}{[1,3]} - y_2 + y_3 \dfrac{[1,2]}{[1,3]} = 0 \\ z_1 \dfrac{[2,3]}{[1,3]} - z_2 + z_3 \dfrac{[1,2]}{[1,3]} = 0 \end{cases}$$

Supposons connus les rapports $\dfrac{[2,3]}{[1,3]}$ et $\dfrac{[1,2]}{[1,3]}$. Soient T_1 ,T_2 et T_3 les positions de la Terre au temps t_1, t_2 et t_3. En écrivant que $\overrightarrow{OC_i} = \overrightarrow{OT_i} + \rho_i \vec{\lambda}_i$ et en remarquant que les vecteurs $\overrightarrow{OT_i}$ et $\vec{\lambda}_i$ sont connus on peut réécrire le système comme un système linéaire de 3 équations dont les inconnues sont les distances ρ_1, ρ_2 *et* ρ_3 et dont tous les coefficients sont déterminés.

Après résolution de ce système on peut donc déterminer les vecteurs $\overrightarrow{OC_i} = \overrightarrow{OT_i} + \rho_i \vec{\lambda}_i$. On connait donc 3 positions héliocentriques ce qui nous permet d'en déduire une orbite initiale comme nous l'avons vu au paragraphe précédent.

Le problème qu'il nous reste à résoudre est donc de déterminer les rapports $\frac{[2,3]}{[1,3]}$ et $\frac{[1,2]}{[1,3]}$ correspondant aux aires des triangles déterminés par le Soleil et les 3 positions de Cérès.

Gauss remarque tout d'abord qu'on peut approximer, par exemple, l'aire du triangle ***[2,3]*** par A_{23} l'aire du secteur d'ellipse délimité par les positions C_2 et C_3. Cette aire est proportionnelle, par la seconde loi de Kepler, à t_3-t_2. On peut donc écrire que $\frac{[2,3]}{[1,3]} \approx \frac{A_{23}}{A_{13}} = \frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1}$.

Peut on améliorer cette estimation?

Par des méthodes géométriques Gauss évalue la correction à appliquer, par exemple, à l'aire du secteur d'ellipse A_{23} pour obtenir une meilleure approximation de l'aire du triangle ***[2,3]***. Il en déduit une valeur plus précise du rapport $\frac{[2,3]}{[1,3]}$. Il a d'autre part pris le soin de choisir les 3 observations utilisées pour que t_2-t_1 soit à peu près égal à t_3-t_2 ce qui améliore encore la précision de l'approximation du rapport. A partir de ces valeurs de $\frac{[2,3]}{[1,3]}$ et $\frac{[1,2]}{[1,3]}$ Gauss peut donc résoudre le système, obtenir les coordonnées héliocentriques des 3 positions et donc, comme nous l'avons vu, est capable d'en déduire les éléments de l'orbite initiale.

VI Obtention d'une orbite par la méthode de Laplace.

La méthode développée par Laplace en 1778 est plus naturelle mais les éléments qu'elle fournit ne sont pas, dans le cas de Cérès, suffisamment précis pour permettre l'élaboration d'une éphéméride valable 6 mois plus tard. Décrivons sommairement cette méthode.

Considérons les observations (α_i,δ_i) au temps t_i , $i=1,..3$. On peut en déduire pour un même temps, par exemple t_1, des estimations de $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\delta}{dt}$, $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$, $\frac{d^2\delta}{dt^2}$.

En effet en écrivant le développement de Taylor au voisinage du temps t_1 on a

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{d\alpha}{dt}.(t_2\text{-}t_1) + \frac{1}{2}.\frac{d^2\alpha}{dt^2}.(t_2\text{-}t_1)^2 + ...$$

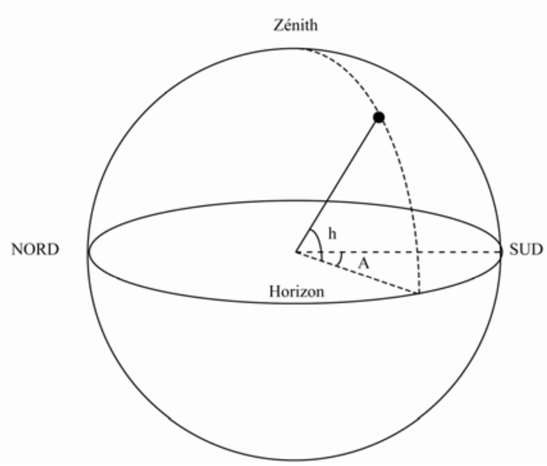
$$\alpha_3 = \alpha_1 + \frac{d\alpha}{dt}.(t_3\text{-}t_1) + \frac{1}{2}.\frac{d^2\alpha}{dt^2}.(t_3\text{-}t_1)^2 + ...$$

On peut donc par résolution d'un système linéaire de 2 équations obtenir une estimation de $\frac{d\alpha}{dt}$ et de $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$. En procédant de même pour δ on obtient la valeur de 6 variables qui sont utilisées par Laplace pour déterminer, au même temps t_1, la distance géocentrique ρ et ses dérivées $\frac{d\rho}{dt}$, $\frac{d^2\rho}{dt^2}$. On peut en déduire finalement toujours au temps t_1 le vecteur héliocentrique $\overrightarrow{OC}$ et sa dérivée $\frac{d\overrightarrow{OC}}{dt}$. On a alors les conditions initiales du mouvement ce qui permet de déterminer les éléments de l'orbite.

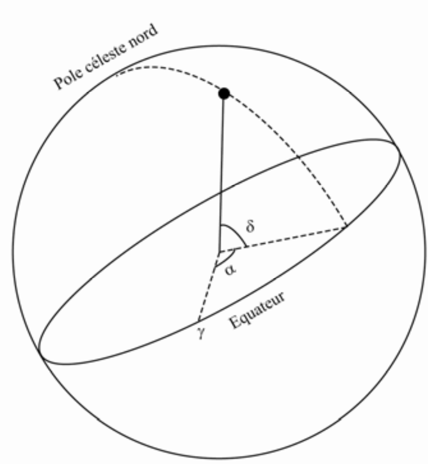
Dans le cas de plus de 3 observations on peut directement améliorer, par des techniques classiques d'analyse numérique, l'estimation des valeurs de $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\delta}{dt}$, $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$, $\frac{d^2\delta}{dt^2}$.

Annexe : quelques définitions

Coordonnées équatoriales : l'ascension droite α et la déclinaison δ caractérisent la position d'un objet sur la sphère céleste de la même façon que la longitude et la latitude caractérisent un lieu sur la surface de la Terre. En effet les pôles célestes étant définis (comme prolongement de l'axe des pôles de la Terre) l'équateur céleste est déterminé. Soit γ le point vernal intersection de l'équateur et de l'écliptique. Tout point de la sphère est alors caractérisé par δ traduisant sa distance angulaire avec l'équateur et α l'angle entre le grand cercle passant par les pôles sur lequel il est situé et celui passant par γ.



Coordonnées azimutales



*Coordonnées équatoriale*s

Coordonnées géocentriques: système de coordonnées centré sur la Terre. On peut par exemple utiliser les coordonnées équatoriales (α,δ) qu'on complète par la distance ρ entre l'objet et la Terre.

Coordonnées héliocentriques: système de coordonnées centré sur le Soleil donné par 3 axes $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ orthogonaux pointant dans des directions fixes.

Ecliptique: grand cercle correspondant à la trajectoire annuelle apparente du Soleil sur la sphère céleste. Par extension le plan de l'écliptique est le plan de l'orbite de la Terre.

Eléments d'une orbite: les 6 constantes $(a,e,i,\Omega,\omega,\tau_p)$ qui permettent de caractériser une orbite elliptique autour du Soleil et de définir la position d'un objet sur cette orbite. On a supposé dans tout le document que les mouvements se font tous dans le même sens.

Ephéméride: en astronomie les **éphémérides** sont des tables par lesquelles on détermine, pour chaque jour, une grandeur comme la position des planètes, de leurs satellites, de la Lune, du Soleil, des comètes.

Périhélie: point de l'orbite elliptique le plus près du foyer occupé par le Soleil.

Unité astronomique: unité de distance utilisée en astronomie valant le demi grand axe de l'orbite de la Terre. 1 ua= (149 597 870,691 ± 0,030) km. On appréciera la précision!