**Programme de colles MP2**
Semaine 13 (09-13 janvier 2016)

# Réduction des endomorphismes (I)

## Plan de cours

Sous-espace stable par un endomorphisme, endomorphisme induit. Interprétation matricielle.

Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée : valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre, spectre.

La somme de sous-espaces propres est directe.

Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes (deux à deux) est libre.

Si $u$ et $v$ commutent, alors $v$ stabilise $\mathrm{Ker}(u)$, $\mathrm{Im}(u)$ et tout sous-espace propre de $u$.

Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres de $\mathbb{K}[X]$ vers $\mathcal{L}(E)$ envoyant $X$ sur $u$. Idéal annulateur de $u$.

Lemme de décomposition des noyaux.

Dans ce qui suit, on travaille en dimension finie.

Polynôme caractéristique $\chi$ : définition (il est désormais toujours unitaire), degré, interprétation des coefficients des termes constant et de degré $\deg(\chi) - 1$.

Multiplicité d'une valeur propre. Elle majore la dimension du sous-espace propre associé (on peut éventuellement parler de multiplicité géométrique et de multiplicité algébrique).

Polynôme minimal.

$(u^k)_{0 \leqslant k < d}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$, où $d$ est le degré du polynôme minimal de $u$.

Théorème de Cayley-Hamilton (démonstration admise).

Diagonalisation : d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.

Les projecteurs et les symétries sont diagonalisables.

Les endomorphismes nilpotents non nuls ne sont pas diagonalisables.

Caractérisation de la diagonalisabilité par le polynôme caractéristique.

Caractérisation de la diagonalisabilité par un polynôme annulateur, par le polynôme minimal.

L'induit d'un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace stable est diagonalisable.

## Exercices

Sur les notions et résultats ci-dessus.