Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$. On note $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ pour n entier non nul.

1. Préciser la loi de S_n, son espérance et sa variance.
2. Déterminer une expression sommatoire (que l'on ne cherchera pas à simplifier) de $\mathbb{P}\left(S_n < \frac{n}{2}\right)$.
3. Programmer une fonction `binom(n,k)` qui calcule le coefficient binomial $\dbinom{n}{k}$ avec $k \in [\![0, n]\!]$.
4. Programmer une fonction `sn2(n)` qui calcule $\mathbb{P}\left(S_n < \frac{n}{2}\right)$.
5. Pour $n \geqslant 1$, on note $u_n = \mathbb{P}\left(S_n < \frac{n}{2}\right)$. Représenter les termes de la suite $(u_{20k})_{k\in[1,100]}$.

   Que peut-on conjecturer ?
6. Pour $n \geqslant 1$, on note $v_n = \mathbb{P}\left(S_n \geqslant \frac{n}{2}\right)$. établir l'égalité
$$\forall n \geqslant 1 \qquad v_n = u_n + \mathbb{P}\left(S_n = \frac{n}{2}\right)$$
7. En déduire une démonstration du résultat observé à la question 5.
8. On note $w_n = \mathbb{P}(S_{2n} = n)$ pour $n \geqslant 1$. En considérant $\ln\left(\dfrac{w_{n+1}}{w_n}\right)$, retrouver le résultat précédent sans utiliser l'équivalent de Stirling.