CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Oral

Mathématiques 2

PSI

1. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on introduit la matrice suivante
$$M(a,b) = \begin{pmatrix} 3a-2b & -6a+6b+3 \\ a-b & -2a+3b+1 \end{pmatrix}$$
On note $e(a,b)$ le réel $|\lambda_1 - \lambda_2|$ où λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres complexes de $M(a,b)$.

   Écrire une fonction `ecart` qui étant donnés deux entiers a et b renvoie une valeur approchée décimale à 10^{-2} près de $e(a,b)$.

2. a. Soient A et B deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, de même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0,1[$.

   Écrire une fonction `hasard` qui, étant donné p réalise la simulation de 500 valeurs (a,b) du couple de variables aléatoires (A,B) et renvoie le nombre de fois où `ecart(a,b)` est supérieur ou égal à 10^{-1}.

   b. Pour $p = \frac{1}{100}, \frac{2}{100}, \dots, \frac{99}{100}$, relier les points de coordonnées $\left(p, \frac{\texttt{hasard}(p)}{500}\right)$.

   c. Sur le même graphe, tracer la courbe de la fonction $p \mapsto \dfrac{2-2p+p^2}{2-p}$ pour p dans $]0,1[$.

3. a. Montrer que la matrice $M(a,b)$ est semblable à $\begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

   b. À quelle condition la matrice $\begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

   c. Calculer la probabilité de l'événement « $M(A,B)$ est diagonalisable ».